Трудные задачи к досрочному экзамену

1. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^\kappa$ нормально тогда и только тогда, когда κ не более чем счётно.

2. Докажите, что пространство $\{0,1\}^\kappa$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$.

3. Приведите пример вполне регулярного сепарабельного не наследственно сепарабельного пространства.

4. Верно ли, что всякое хаусдорфово пространство без изолированных точек можно представить как объединение двух непересекающихся всюду плотных подпространств?

5. Пусть X — топологическое пространство, Y — его всюду плотное подпространство $f\colon Y \to [0,1]$ — непрерывное отображение. Докажите, что отображение f можно непрерывно продолжить на X в том и только том случае, если для каждой пары F, G непересекающихся замкнутых подмножеств отрезка $[0,1]$ замыкания их прообразов $f^{-1}(F)$ и $f^{-1}(G)$ в пространстве X не пересекаются.

6. Пусть A — любое индексное множество и X_α, $\alpha\in A$, — топологические пространства. Выберем любую точку $x^*=(x^*_\alpha)_{\alpha\in A}\in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и обозначим через $\sum\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ подпространство произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, состоящее из всех таких точек $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, что $x_\alpha\neq x^*_\alpha$ только для не более чем счётного множества индексов α. Все подпространства пространства $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ вида $\sum\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ называются Σ-произведениями пространств X_α, $\alpha\in A$.

Докажите, что любое Σ-произведение прямых $\mathbb{R}$ нормально.

7. Придумайте пример регулярного пространства X, на котором любая непрерывная функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ постоянна.

8. Топологическое пространство X называется *секвенциальным*, если для любого незамкнутого множества $A\subset X$ существует последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n\in A$, сходящаяся к некоторой точке из $\overline{A}\setminus A$.

Верно ли, что всякое секвенциальное пространство является пространством Фреше–Урысона?

9. Докажите, что если хаусдорфово пространство X с первой аксиомой счётности не содержит несчётного семейства попарно непересекающихся открытых множеств, то $|X|\leqslant 2^{\aleph_0}$.

10. Семейство $\mathcal{N}$ подмножеств топологического пространства X называется *сетью* этого пространства, если любое открытое множество в X является объединением некоторого подсемейства семейства $\mathcal{N}$. Докажите, что если κ — бесконечный кардинал и X — хаусдорфово пространство, обладающее сетью мощности $\leqslant\kappa$, то существуют хаусдофово пространство Y веса $\leqslant\kappa$ и непрерывная биекция $f\colon X\to Y$ (т.е. топологию пространства X можно ослабить до хаусдорфовой топологии веса $\leqslant\kappa$).

11. Метрика d на множестве X называется *полной*, если любая фундаментальная последовательность в метрическом пространстве (X,d) сходится.

Говорят, что подмножество Y топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ-*множеством*, если Y можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Докажите, что подпространство Y метризуемого полной метрикой пространства X само метризуемо полной метрикой тогда и только тогда, когда Y — множество типа G_δ в X.

12. Докажите, что всякое замкнутое подпространство пространства $B=D^{\aleph_0}$, где D — дискретное пространство любой мощности, является ретрактом пространства B.

13. Верно ли, что если X и Y — компактные подпространства плоскости $\mathbb{R}^2$ и произведение $X\times[0,1]$ гомеоморфно произведению $Y\times[0,1]$, то и сами пространства X и Y гомеоморфны?

14. Докажите, что замкнутая полуплоскость не гомеоморфна плоскости.

15. Верно ли, что для любого бесконечного индексного множества A и любых непустых неодноточечных конечных дискретных пространств X_α и Y_α, $\alpha\in A$, топологические произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и $\prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ гомеоморфны?

16. Метрика d на множестве X называется *полной*, если любая фундаментальная последовательность в метрическом пространстве (X,d) сходится.

Говорят, что подмножество Y топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ-*множеством*, если Y можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Докажите, что всякое метризуемое полной метрикой всюду плотное подпространство хаусдорфова пространства является множеством типа G_δ в этом пространстве.

17. Пусть X — тихоновское пространство и $f\colon X\to Y$ — замкнутая непрерывная сюръекция с тем свойством, что прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in Y$ компактен. Докажите, что X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения пространства Y на некоторый компакт.

18. Докажите, что евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^3$.

19. Докажите, что каждое метризуемое пространство X вкладывается в счётную степень ежа колючести $w(X)$.

20. Докажите, что для любых двух счетных всюду плотных подмножеств A и B евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ существует такой гомеоморфизм $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $f(A) = B$.

21. Пусть M — прямая $\mathbb{R}$ с топологией, базу которой составляют все открытые интервалы и все подмножества множества иррациональных чисел. Докажите, что произведение $M \times \mathbf{P}$ не нормально (здесь $\mathbf{P}$ — множество иррациональных чисел с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$).

22. Говорят, что подмножество A топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ-*множеством*, если A можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Докажите, что если произведение $X \times Y$ двух пространств X и Y наследственно нормально, то либо все замкнутые множества в X имеют тип G_δ, либо каждое счётное подмножество пространства X замкнуто.

23. Говорят, что подмножество A топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ-*множеством*, если A можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Докажите, что если в нормальном пространстве каждое замкнутое множество имеет тип G_δ, то оно наследственно нормально.

24. Докажите, что если хаусдорфово пространство с первой аксиомой счётности является факторпространством некоторого пространства со счётной базой, то оно само обладает счётной базой.

25. Докажите, что для любого натурального n и любых двух счётных всюду плотных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ существует такой гомеоморфизм $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $f(A) = B$.

26. Говорят, что подпространство Y топологического пространства X C-вложено в X, если любая непрерывная функция $f\colon Y \to \mathbb{R}$ непрерывно продолжается на X.

Докажите, что тихоновское пространство X гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $\mathbb{R}^\kappa$ (для некоторого кардинала κ) тогда и только тогда, когда X замкнуто в любом тихоновском пространстве, содержащем его в качестве C-вложенного подпространства.

27. Пусть A — любое индексное множество и X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства. Выберем любую точку $x^* = (x^*_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и обозначим через $\sum_{\alpha \in A} X_\alpha$ подпространство произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, состоящее из всех таких точек $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, что $x_\alpha \neq x^*_\alpha$ только для не более чем счётного множества индексов α. Все подпространства пространства $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ вида $\sum_{\alpha \in A} X_\alpha$ называются Σ-произведениями пространств X_α, $\alpha \in A$.

Докажите, что если все пространства X_α сепарабельны и Y — любое Σ-произведение пространств X_α, то любая непрерывная функция $Y \to \mathbb{R}$ непрерывно продолжается на $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

28. Докажите, что произведение $f \times \mathrm{id}_K\colon X \times K \to Y \times K$ факторного отображения $f\colon X \to Y$ и тождественного отображения id_K компактного хаусдорфова пространства K на себя факторно.

29. Докажите, что пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно обладает предбазой $\mathscr{B}$ с тем свойством, что любое покрытие пространства X элементами семейства $\mathscr{B}$ содержит конечное подпокрытие.

30. Докажите, что хаусдорфово пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно регулярно и любая непрерывная биекция $f\colon X \to Y$ на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом. Можно ли опустить требование регулярности?

31. Приведите пример тихоновского пространства X такого, что всякая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена, но при этом X содержит бесконечное множество, не имеющее ни одной предельной точки в X.

32. Докажите, что топологическое пространство X метризуемо в том и только том случае, если оно является T_1-пространством и обладает базой $\mathscr{B}$ с тем свойством, что для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности U найдется окрестность $V \subset U$ точки x такая, что множество всех элементов базы $\mathscr{B}$, пересекающихся с V и с $X \setminus U$, конечно.

33. Пусть X — компактное T_1-пространство, κ — бесконечный кардинал, $\mathscr{B}$ — база топологии X и для каждой точки $x \in X$ $|\{U \in \mathscr{B} : x \in U\}| \leqslant \kappa$. Докажите, что $|\mathscr{B}| \leqslant \kappa$.

34. Докажите, что мощность каждого несчётного компакта с первой аксиомой счётности не меньше $2^{\aleph_0}$.

35. Семейство подмножеств топологического пространства X *дискретно*, если у каждой точки $x \in X$ имеется окрестность, пересекающая не более одного элемента этого семейства.

Топологическое пространство X называется *коллективно нормальным*, если $X \in T_1$ и для любого дискретного семейства $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства X найдётся дискретное семейство $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытых множеств такое, что $Y_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Приведите пример нормального не коллективно нормального пространства.

36. Докажите, что в тихоновском произведении произвольного семейства сепарабельных пространств любое семейство попарно непересекающихся открытых множеств не более чем счётно.

37. Докажите, что хаусдорфово компактное пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда пространство $X \times X \times X$ наследственно нормально.

38. Подмножество A топологического пространства называется *плотным в себе*, если оно не содержит изолированных (в A) точек. Верно ли, что если в хаусдорфовом пространстве все плотные в себе множества открыты, то это пространство дискретно?

39. Докажите, что мощность любого компактного хаусдорфова пространства с первой аксиомой счётности не превосходит $2^{\aleph_0}$.

40. Докажите, что любое линейно упорядоченное пространство с порядковой топологией, обладающее счётной базой, гомеоморфно подпространству прямой $\mathbb{R}$.

41. Говорят, что подмножество A топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ-*множеством*, если A можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Топологическое пространство X называется k-*пространством*, если множество $U \subset X$ открыто в X тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым компактным подмножеством K пространства X открыто в K (с индуцированной топологией).

Докажите, что всякое подпространство типа G_δ компакта (т.е. хаусдорфова компактного пространства) является k-пространством.

42. Докажите, что мощность каждого несчётного компакта (т.е. хаусдорфова компактного пространства) счётного веса равна $2^{\aleph_0}$.

43. Докажите, что бесконечное дискретное пространство мощности κ можно вложить в компакт (т.е. компактное хаусдорфово пространство) мощности 2^{2^κ} в качестве всюду плотного подпространства. Чему равен вес такого компакта?

44. Существует ли множество $X \subset \mathbb{R}$, которое пересекает все несчётные замкнутые подмножества прямой, но само не содержит ни одного такого множества?

45. Докажите, что если X — регулярное пространство со счётной базой и $f : X \to Y$ — замкнутое непрерывное отображение, то прообразы $f^{-1}(y)$ компактны для всех точек $y \in Y$, за исключением не более чем счётного их числа.

46. Топологическое пространство X называется *однородным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f : X \to X$, для которого $f(x) = y$.

Докажите, что если X — регулярное пространство со счётной базой и Y — однородное T_1-пространство, являющееся образом пространства X при непрерывном замкнутом отображении, то Y тоже имеет счётную базу. (Можно пользоваться утверждением задачи 45.)

47. Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание всякого его открытого подмножества открыто.

Докажите, что мощность любого бесконечного экстремально несвязного компакта (т.е. хаусдорфова компактного пространства) больше или равна $2^{2^{\aleph_0}}$.

48. Говорят, что подмножество A топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ-*множеством*, если A можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Топологическое пространство *линделёфово*, если оно регулярно и всякое открытое покрытие этого пространства содержит не более чем счётное подпокрытие.

Докажите, что мощность всякого линделёфова пространства, в котором любое замкнутое множество имеет тип G_δ, не превосходит $2^{\aleph_0}$.

49. Верно ли, что произведение нормального пространства и компакта (т.е. хаусдорфова компактного пространства) всегда нормально?

50. Докажите, что если X — метризуемый компакт и A — его счётное подмножество, то пространство $X \setminus A$ можно взаимно однозначно непрерывно отобразить на некоторый метризуемый компакт.

51. Докажите, что если компакт можно разбить на счётное число попарно непересекающихся непустых замкнутых подмножеств, то он несвязен.

52. Говорят, что подмножество A топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ-*множеством*, если A можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Докажите, что если X — подпространство типа G_δ компакта (т.е. компактного хаусдорфова пространства) K и F — замкнутое подпространство пространства X, то F тоже является подпространством типа G_δ компакта K.

53. Семейство подмножеств топологического пространства X *дискретно*, если у каждой точки $x \in X$ имеется окрестность, пересекающая не более одного элемента этого семейства.

Топологическое пространство X называется *коллективно нормальным*, если $X \in T_1$ и для любого дискретного семейства $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства X найдётся дискретное семейство $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытых множеств такое, что $F_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Для кардинала κ обозначим через $A(\kappa)$ пространство $D \cup \{*\}$, где D — множество мощности κ, все точки которого изолированы в $A(\kappa)$ и $*$ — точка, окрестностями которой служат множества вида $(D \cup \{*\}) \setminus F$ для всевозможных конечных множеств $F \subset D$.

Докажите, что пространство X коллективно нормально тогда и только тогда, когда $X \times A(|X|)$ нормально.

54. Хаусдорфово топологическое пространство *локально компактно*, если у каждой его точки есть компактная окрестность, или, что равносильно, если у каждой его точки есть открытая окрестность с компактным замыканием (проверьте, что эти условия действительно равносильны).

Докажите, что если X — локально компактное хаусдорфово пространство со счётной базой и хаусдорфово пространство Y с первой аксиомой счётности является его образом при факторном отображении, то Y тоже является локально компактным пространством со счётной базой.

55. Семейство подмножеств топологического пространства X *дискретно*, если у каждой точки $x \in X$ имеется окрестность, пересекающая не более одного элемента этого семейства.

Топологическое пространство X называется *коллективно нормальным*, если $X \in T_1$ и для любого дискретного семейства $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства X найдётся дискретное семейство $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытых множеств такое, что $Y_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Докажите, что всякое линейно упорядоченное пространство с порядковой топологией наследственно коллективно нормально (т.е. все его подпространства коллективно нормальны).

56. Пусть K — сепарабельный связный компакт (т.е. компактное хаусдорфово пространство) с тем свойством, что пространство $K \setminus \{x\}$ связно для ровно двух точек $x \in K$. Докажите, что K гомеоморфен отрезку $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

57. Говорят, что точка x в топологическом пространстве X *имеет тип* G_δ, или является G_δ*-точкой*, если $\{x\}$ можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Докажите, что мощность всякого сепарабельного регулярного пространства, в котором каждая точка имеет тип G_δ, не превосходит $2^{\aleph_0}$.

58. Пусть X — метризуемое пространство с тем свойством, что для любых непересекающихся замкнутых множеств $F, G \subset X$ существует открыто-замкнутое множество $U \subset X$ такое, что $F \subset U$ и $G \subset X \setminus U$. Докажите, что топология этого пространства порождается некоторым линейным порядком.

59. Пусть A — любое индексное множество и X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства. Выберем любую точку $x^* = (x^*_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и обозначим через $\sum\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ подпространство произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, состоящее из всех таких точек $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, что $x_\alpha \neq x^*_\alpha$ только для не более чем счётного множества индексов α. Все подпространства пространства $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ вида $\sum\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ называются Σ-произведениями пространств X_α, $\alpha \in A$.

Докажите, что если X — любое Σ-произведение отрезков $[0,1]$, то всякая непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$ ограничена.

60. Хаусдорфово топологическое пространство *локально компактно*, если у каждой его точки есть компактная окрестность, или, что равносильно, если у каждой его точки есть открытая окрестность с компактным замыканием (проверьте, что эти условия действительно равносильны).

Может ли локально компактное хаусдорфово пространство X, на котором все непрерывные функции $X \to \mathbb{R}$ ограничены, содержать бесконечное замкнутое дискретное множество?

61. Докажите, что всякое счётное метризуемое пространство без изолированных точек гомеоморфно пространству рациональных чисел.

62. *Теснотой* топологического пространства X называется наименьший кардинал κ с тем свойством, что для всякого множества $A \subset X$ и любой точки $x \in \overline{A}$ существует множество $B \subset A$, $|B| \leqslant \kappa$, для которого $x \in \overline{B}$.

Докажите, что теснота любого компакта (т.е. компактного хаусдорфова пространства) K равна супремуму мощностей множеств $A \subset X$, которые можно упорядочить так, что $\overline{\{x \in A : x < a\}} \cap \overline{\{x \in A : x \geqslant a\}} = \varnothing$ и $|\{x \in A : x < a\}| < |A|$ для любого $a \in A$.

63. Докажите, что тихоновское пространство X псевдокомпактно тогда и только тогда, когда для любого центрированного семейства $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых подмножеств пространства X пересечение $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ непусто.

64. Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание всякого его открытого подмножества открыто.

Докажите, что если X — регулярное экстремально несвязное пространство и $f: X \to X$ — любой гомеоморфизм, то множество $\{x \in X : f(x) = x\}$ всех неподвижных точек отображения f открыто.

65. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств топологического пространства X *локально конечно*, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, пересекающая лишь конечное число элементов семейства $\mathscr{F}$.

Топологическое пространство *паракомпактно*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Докажите, что всякое метризуемое пространство паракомпактно.

Дополнительная задача к задаче 3. Говорят, что подмножество A топологического пространства X *имеет тип* G_δ, или является G_δ*-множеством*, если A можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств.

Пусть K — компакт, в котором каждое замкнутое множество имеет тип G_δ, и пусть X — неметризуемое подпространство этого компакта. Докажите, что X нельзя представить в виде объединения счётного семейства его метризуемых подпространств.

66. Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание всякого его открытого подмножества открыто.

Докажите, что пространство $\beta\mathbb{N}$ экстремально несвязно, а $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ нет (здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с дискретной топологией).

67. Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание всякого его открытого подмножества открыто.

Топологическое пространство X называется *однородным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \to X$, для которого $f(x) = y$.

Докажите, что всякий однородный экстремально несвязный компакт конечен.

68. Докажите, что пространство X обладает тем свойством, что произведение $X \times K$ нормально для любого компакта K, тогда и только тогда, когда X — паракомпакт.

Дополнительная задача к задаче 13. Докажите, что всякое регулярное пространство с тем свойством, что в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие (не обязательно открытое), паракомпактно.

69. Докажите, что если компакт является непрерывным образом некоторой степени двухточечного дискретного пространства $\{0, 1\}$ (с тихоновской топологией) и удовлетворяет первой аксиоме счётности, то он удовлетворяет и второй аксиоме счётности.