В. И. Малыхин, О разложимости произведения двух пространств и одной задаче Катетова, *Докл. АН СССР*, 1975, том 222, номер 5, 1033–1036

Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 5

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. И. МАЛЫХИН

О РАЗЛОЖИМОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРОСТРАНСТВ И ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАТЕТОВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 I 1975)

В 1947 г. М. Катетов поставил (см. ([1])) следующую задачу: существует ли топологическое пространство * без изолированных точек, на котором всякая вещественная функция непрерывна в какой-нибудь точке? **. Задача привлекает простотой и неожиданностью формулировки. Конечно, для очень широкого класса пространств весьма просто указать вещественную функцию, которая всюду разрывна. Например, если пространство содержит два дизъюнктных плотных множества A и B, то, положив $f(x)=1$ на A и $f(x)=0$ на B и определив f как угодно в остальных точках, получим всюду разрывную функцию. Разложимыми пространствами (т. е. содержащими два дизъюнктных плотных множества) являются, например, все k-пространства (Н. В. Величко). Однако и среди неразложимых пространств тоже очень много весьма «хороших» пространств. Например, неразложимым может быть счетное регулярное пространство ([1]). Неразложимые, а также максимальные и близкие к ним пространства обладают рядом причудливых свойств (см., например, ([1], [2–4])), что привлекает к ним внимание топологов.

Одним из центральных нерешенных вопросов, связанных с разложимостью пространств, является вопрос о разложимости произведения двух пространств. В работе устанавливается тесная связь данного вопроса с задачей М. Катетова. Основным результатом работы является указание модели M теории множеств ZFC, в которой задача М. Катетова решается отрицательно, а произведение двух пространств всегда разложимо. Замечательным свойством модели M является то, что в ней всякое топологическое пространство (напоминаем, что рассматриваются только бесконечные плотные в себе пространства) разлагается в счетную сумму своих подпространств с пустой внутренностью.

1. О максимальных, SI, разложимых и неразложимых пространствах, их свойствах и строении см. ([1], [2–4]).

Кардиналы обозначаются буквами m, n, k и отождествляются с начальными ординалами той же мощности. Через m^+ обозначается последующий кардинал, через m^- — предыдущий (в таком случае он существует). Ординалы обозначаются буквами α, β, γ, ε, а также m, n, k и т. д. Знак Σ обозначает дизъюнктную сумму.

Пусть (X, τ), (Y, μ) — топологические пространства. Положим по определению:

1) $(X, \tau)\in\mathscr{K} \leftrightarrow$ всякая вещественная функция на X непрерывна в какой-нибудь точке.

2) $(X, \tau)\in$ПВИ$\leftrightarrow$семейство всех подпространств с пустой внутренностью есть σ-идеал.

3) $((X, \tau), (Y, \mu))\in$Нер$\leftrightarrow$произведение пространств X и Y неразложимо.

---

* Все пространства в дальнейшем предполагаются бесконечными и плотными в себе.

** В оригинале требуется хаусдорфовость такого пространства, но в плане данной работы это несущественно.

4) $(X, \tau)\in SIB \leftrightarrow (X, \tau)$ есть SI-пространство, полное по Бэру.

5) $(X, \tau)\in ПВ(m) \leftrightarrow X=\bigcup\{X_\alpha\colon \alpha<m\}$ и $\operatorname{Int} X_\alpha=\Lambda$ при всяком $\alpha<m$. Если $m=\aleph_0$, то положим $ПВ(\aleph_0)\equiv ПВ$.

2. Лемма 1. $ПВ\cap\mathscr{K}=\Lambda$.

Действительно, пусть $(X, \tau)\in ПВ$, т. е. $X=\bigcup\{X_n\colon n<\omega_0\}$ и для всякого $n<\omega_0$ множество X_n имеет пустую внутренность. Определим вещественную функцию f на X правилом:

$$f(x)=\frac{1}{n}\leftrightarrow x\in X_n.$$

Легко видеть, что f — всюду разрывная функция, тем самым $(X, \tau)\notin\mathscr{K}$.

Лемма 2. *Если* $(X, \tau)\notin ПВ$, *то существует* $V\in\tau$ *такое, что* $(V, \tau/V)\in ПВИ$ *.

Действительно, иначе существует система $\mathscr{D}$ открытых в X множеств такая, что $W\in\mathscr{D}\rightarrow(W, \tau/W)\in ПВ$ и $\bigcup\mathscr{D}$ плотно в X. Но тогда $(X, \tau)\in ПВ$. Противоречие.

Лемма 3 (А. Г. Елькин). *Если* (X, τ) — *максимальное пространство,* $(X, \tau)\notin ПВ$, *то* $(X, \tau)\in\mathscr{K}$.

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из пространства (X, τ) во множество действительных чисел; ее можно считать ограниченной. Тогда f в каждой точке x имеет предел; обозначим этот предел через $\varphi(x)$. Рассмотрим множество $A_n=\{x\colon |f(x)-\varphi(x)|\geqslant 1/n\}$. Если функция f всюду разрывна, то $\bigcup\{A_n\colon n<\omega_0\}=X$. Так как $(X, \tau)\notin ПВ$, то существует n_0, для которого $\operatorname{Int} A_{n_0}\neq\Lambda$. Пусть $z\in\operatorname{Int} A_{n_0}$. Так как $\varphi(z)=\lim\limits_{y\to z} f(y)$, то существует такая окрестность V точки z, что $|\varphi(z)-f(y)|<1/(4n_0)$ для всякой точки $y\in V$. Следовательно, для всяких двух точек y_1, y_2 из V будет $|f(y_1)-f(y_2)|<1/(2n_0)$, что противоречит определению множества A_{n_0}.

Теорема 1. *Справедливы следующие импликации*:

$$Нер\neq\Lambda\rightarrow\mathscr{K}\neq\Lambda\leftrightarrow ПВИ\neq\Lambda\leftrightarrow SIB\neq\Lambda.$$

Доказательство. 1) Докажем сначала эквивалентность $\mathscr{K}\neq\Lambda\leftrightarrow ПВИ\neq\Lambda$. Пусть $(X, \tau)\in\mathscr{K}$. Тогда $(X, \tau)\notin ПВ$ по лемме 1. Значит (по лемме 2) существует $V\in\tau$ такое, что $(V, \tau/V)\in ПВИ$. Тем самым $ПВИ\neq\Lambda$. Пусть теперь $(X, \tau)\in ПВИ$. Существует большая, чем τ, максимальная топология τ'. Ясно, что $(X, \tau')\notin ПВ$, так как $(X, \tau)\notin ПВ$. Но тогда (по лемме 3) $(X, \tau')\in\mathscr{K}$.

2) Чтобы установить эквивалентность $ПВИ\neq\Lambda\leftrightarrow SIB\neq\Lambda$ необходимо знать, что всякое подпространство SI-пространства с пустой внутренностью нигде не плотно (см., например, ([4])).

3) Пусть теперь $Нер\neq\Lambda$ и $((X, \tau), (Y, \mu))\in Нер$. Обозначим через (Z, ν) произведение пространств (X, τ) и (Y, μ). Согласно ([3]), в (Z, ν) существует открытое SI-подпространство, которое можно выбрать «прямоугольником» $A\times B$, где A и B — открытые SI-подпространства пространств X и Y соответственно. Как следует тогда из теоремы 3 работы ([5]), какое-то из пространств $(A, \tau/A)$, $(B, \mu/B)$ не входит в класс ПВ и из леммы 2 заключаем, что $ПВИ\neq\Lambda$.

Извлечем из теоремы 1

Следствие 1. *Задача М. Катетова эквивалентна следующей:*

Существует ли топологическое пространство, на котором всякая вещественная функция непрерывна почти всюду, т. е. на плотном открытом множестве?

Действительно, $\mathscr{K}\neq\Lambda\rightarrow$ «существует $(X, \tau)\notin ПВ$.» Пусть τ' — большая, чем τ, максимальная топология, тогда $(X, \tau')\notin ПВ$. По лемме 2 существует $V\in\tau'$, для которого $(V, \tau'/V)\in ПВИ$, причем, очевидно, $(V, \tau'/V)$ — максимальное пространство. Итак, найдено максимальное пространство $(Z, \nu)\in ПВИ$. Тогда, как легко видеть, $(Z, \nu)\in\mathscr{K}$ и $(W, \nu/W)\in\mathscr{K}$ для вся-

* τ/V — топология на V как на подпространстве (X, τ)

кого $W \in \nu$. Пусть f — произвольная вещественная функция на Z. Тогда множество точек непрерывности f всюду плотно в (Z, ν) и, следовательно, открыто, что и требовалось доказать.

3. Здесь доказывается основное для всей работы

Утверждение. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} +$ «*всякое топологическое пространство разлагается в счетную сумму своих подпространств с пустой внутренностью*») *.

Пусть $K_0(m^+)$ обозначает следующее предложение:

На m^+ существует семейство F подмножеств такое, что $|F| > m^+$ и $|\{f \cap \alpha : f \in F\}| \leqslant m$ для всякого $\alpha < m^+$.

Легко видеть, что $K_0(m^+)$ влечет существование на m^+ системы $\mathscr{R} = \{T_\varepsilon^\delta : \delta < m, \varepsilon_1 < m^{++}\}$ подмножеств со следующими свойствами:

а) если $\delta < m$, $\varepsilon_1 < m^{++}$, $\varepsilon_2 < m^{++}$, то $|T_{\varepsilon_1}^\delta \cap T_{\varepsilon_2}^\delta| \leqslant m$;

б) $\cup \{T_\varepsilon^\delta : \delta < m\} = m^+$ для всякого $\varepsilon < m^{++}$.

Действительно, возьмем множество m и пусть Φ_α — какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между множеством m и множеством $\{f \cap \alpha : f \in F\}$. Теперь каждому $f \in F$ однозначно соотносится функция $\tilde{f}$ из множества m^+ в множество m по правилу $\tilde{f}(\alpha) = \Phi_\alpha^{-1}(\{f \cap \alpha\})$. Определим множество $T_\varepsilon^\delta \in \mathscr{R}$ правилом: если $\eta \in m^+$, то $\eta \in T_\varepsilon^\delta \leftrightarrow \tilde{f}_\varepsilon(\eta) = \delta$.

Можно убедиться, что система $\mathscr{R}$ обладает свойствами а) и б) (см. также ([6])).

Известно ([7]), что $[V = L] \to$ «Для всякого бесконечного кардинала m верно $K_0(m^+)$.

В дальнейшем все изложение ведется (если прямо не оговорено обратное) в модели $[V = L]$.

Обозначим через θ наименьший недостижимый кардинал **. Следовательно, если $m < \theta$, то $m = (m^-)^+$ или $\mathrm{cf}(m) = (\mathrm{cf}(m)^-)^+ < m$ ***.

Теорема 2. $\cup \{\text{ПВ}(m) : m < \theta\} \subseteq \text{ПВ}$.

Доказательство по индукции. Предположим, что для любого $k < n$, где $n < \theta$ уже доказано, что $\text{ПВ}(k) \subseteq \text{ПВ}$. Докажем, что $\text{ПВ}(n) \subseteq \text{ПВ}$.

В силу замечания (непосредственно перед теоремой 2) необходимо рассмотреть два случая.

1) Пусть n — регулярный кардинал и, значит, имеется предшествующий кардинал m, таким образом, $n = m^+$. Пусть $(Y, \tau) \in \text{ПВ}(n)$, т. е. $Y = \Sigma \{Y_\alpha : \alpha < m^+\}$ и $\mathrm{Int} Y_\alpha = \Lambda$ для всякого $\alpha < m^+$. Рассмотрим систему $\mathscr{R}$ на множестве m^+ (см. определение и свойства системы $\mathscr{R}$ выше) и положим $Y_\varepsilon^\delta = \cup \{Y_\alpha : \alpha \in T_\varepsilon^\delta\}$.

Тогда система $\tilde{\mathscr{R}} = \{Y_\varepsilon^\delta\}$ обладает следующими свойствами:

а) $\cup \{Y_\varepsilon^\delta : \delta < m\} = Y$ для каждого $\varepsilon < m^{++}$;

б) если $\delta < m$, $\varepsilon_1 < m^{++}$, $\varepsilon_2 < m^{++}$, то

$$Y_{\varepsilon_1}^\delta \cap Y_{\varepsilon_2}^\delta = \cup \{Y_\alpha : \alpha \in T_{\varepsilon_1}^\delta \cap T_{\varepsilon_2}^\delta\}.$$

Возможны следующие варианты:

А) Существует $\varepsilon < m^{++}$ такое, что $\mathrm{Int}\, Y_\varepsilon^\delta = \Lambda$ при каждом $\delta < m$. Тогда $(Y, \tau) \in \text{ПВ}(m)$ и по индуктивному предположению $(Y, \tau) \in \text{ПВ}$.

Б) Для всякого $\varepsilon < m^{++}$ существует $\delta(\varepsilon) < m$ такое, что $\mathrm{Int}\, Y_\varepsilon^{\delta(\varepsilon)} \neq \Lambda$. Тогда, как легко видеть, существует некоторое $\delta < m$ и «последовательность» $\{\varepsilon_\alpha : \alpha < m^{++}\}$ такие, что $\mathrm{Int}\, Y_{\varepsilon_\alpha}^\delta \neq \Lambda$ при всяком $\alpha < m^{++}$. Пусть $P_\alpha = \{\beta \in T_{\varepsilon_\alpha}^\delta : (\mathrm{Int}\, Y_{\varepsilon_\alpha}^\delta) \cap Y_\beta \neq \Lambda\}$.

Заметим, что если $P_{\alpha_1} \cap P_{\alpha_2} = \Lambda$ при любых α_1, α_2 из m^{++}, то мы имеем во множестве m^+ систему мощности m^{++} дизъюнктных непустых подмножеств, чего не может быть. Значит, существуют такие α_1, α_2 из m^{++}, что $P_{\alpha_1} \cap P_{\alpha_2} \neq \Lambda$. Но тогда $G = \mathrm{Int}(Y_{\varepsilon_{\alpha_1}}^\delta \cap Y_{\varepsilon_{\alpha_2}}^\delta) \neq \Lambda$. Однако $G \subseteq \cup \{Y_\gamma : \gamma \in T_{\varepsilon_{\alpha_1}}^\delta \cap T_{\varepsilon_{\alpha_2}}^\delta\}$

* См. сноску в начале работы.

** Так как $[V = L] \to \mathrm{GCH}$, то понятия слабо и сильно недостижимого кардиналов совпадают.

*** $\mathrm{cf}(m)$ – конфинальный характер кардинала m.

и каждое Y_γ имеет пустую внутренность, т. е. $(G, \tau/G) \in \text{ПВ}(m)$. Теперь либо мы найдем дизъюнктную систему $\mathscr{D}$ из открытых множеств такую, что $\cup\mathscr{D}$ плотно в Y и $(G, \tau/G) \in \text{ПВ}(m)$ для всякого $G \in \mathscr{D}$; но тогда, как легко видеть, $(Y, \tau) \in \text{ПВ}(m)$ (и тем самым, по индуктивному предположению, $(Y, \tau) \in \text{ПВ}$); либо в пространстве (Y, τ) существует открытое множество V такое, что $(W, \tau/W) \notin \text{ПВ}(m)$ для всякого открытого множества $W \subseteq V$. Однако тогда $(V, \tau/V) \in \text{ПВ}(m)$ по А), ибо предположение Б) для него неверно. Итак, в случае регулярного кардинала n теорема 2 доказана.

2) Пусть n — сингулярный кардинал, тем самым $\text{cf}(n) < n$ и $(\text{cf}(n))^-$ существует (см. замечание непосредственно перед теоремой 2). Пусть $m = (\text{cf}(n))^-$. Тогда $m^+ = \text{cf}(n)$. По предположению $Y = \sum\{Y_\alpha: \alpha < n\}$ и $\text{Int}\, Y_\alpha = \Lambda$ для всякого $\alpha < n$. Пусть φ — функция из m^+ в n и $\sup\{\varphi(\beta): \beta < m^+\} = n$ (φ существует в силу определения $\text{cf}(n)$). Пусть $\mathscr{D} = \{V \in \tau$: существует такое $k < n$, что $(V, \tau/V) \in \text{ПВ}(k)\}$. По индуктивному предположению $\mathscr{D} = \{V \in \tau: (V, \tau/V) \in \text{ПВ}\}$. Если $\cup\mathscr{D}$ плотно в (Y, τ), то и $(Y, \tau) \in \text{ПВ}$. Поэтому пусть $W = Y \setminus [\cup\mathscr{D}] \neq \Lambda$. Теперь $W = \cup\{W_\alpha = W \cap Y_\alpha: \alpha < n\}$ и $\text{Int}\, W_\alpha = \Lambda$ для всякого $\alpha < n$. Заметим, что если $V \in \tau$ и $V \subset W$, то $(V, \tau/V) \notin \text{ПВ}(k)$ для всякого $k < n$. Отсюда $\text{Int}\, Z_\beta = \Lambda$ для всякого $\beta < m^+$, где $Z_\beta = \cup\{W_\alpha: \alpha < \varphi(\beta)\}$. Но тогда $(W, \tau/W) \in \text{ПВ}(m^+)$. Этим противоречием (ибо $m^+ < k$) заканчивается доказательство теоремы 2.

Обозначим через M класс всех множеств (напомним, что все изложение ведется в модели $[V = L]$), ранг каждого из которых строго меньше θ. Тогда M — модель для системы аксиом ZFC. В M нет недостижимых кардиналов, поэтому очевидна

Теорема 3 $[M]$ *. *Всякое топологическое пространство разлагается в сумму счетного числа своих подпространств с пустой внутренностью.*

Следствие 2 $[M]$. *Классы* $\mathscr{K}$, ПВИ, *SIB*, Нер *пусты.*

Следствие 3 $[M]$. *Всякое максимальное пространство совершенно* **.

Замечание. Известно (см., например, ([8])), что предположение о существовании измеримого кардинала противоречит аксиоме конструктивности. Для нас поэтому интересно следующее

Предложение 1. *Если существует измеримый кардинал, то* Нер$\neq\Lambda$ (*и, тем самым,* $\mathscr{K}\neq\Lambda$, ПВИ$\neq\Lambda$, *SIB*$\neq\Lambda$).

Соответствующий пример, доказывающий предложение 1, можно найти в ([5]) (следствие 1).

Автор благодарен В. И. Пономареву за внимание, проявленное к работе, и А. Г. Елькину за ценные советы и постановку задач.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Катетов,* Матем. сб., т. 21, № 1, 3 (1947). [2] *M. Katětov,* Čas. pro pěst. mat. a fys., v. 75, № 2, 69 (1950). [3] *E. Hewitt,* Duke Math. J., v. 10, № 1, 309 (1943). [4] *А. Г. Елькин,* Вестн. Московск. унив., сер. матем., мех., № 5, 51 (1969). [5] *В. И. Малыхин,* Матем. сб., т. 90, № 1, 106 (1973). [6] *K. Prikry,* Proc. Am. Math. Soc., v. 38, № 3, 617 (1973). [7] *C. C. Chang,* Theory of Sets and Topology, VEB, Berlin, 1972. [8] *Т. Йех,* Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.

* Знаком $[M]$ сопровождаем предложения, верные в модели M.
** Т. е. всякое открытое множество есть множество типа F_σ.