1979 г. ноябрь — декабрь *т. 34, вып. 6 (210)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

В. И. Малыхин (Москва, СССР)

Всегда интересно наложить на пространство несколько жестких ограничений вместе и посмотреть, каким оно будет, в частности, может ли существовать пространство, удовлетворяющее всем этим ограничениям.

К числу жестких ограничений безусловно нужно отнести бикомпактность, экстремальную несвязность (э. н.), топологическую однородность и еще более сильное свойство пространства — быть топологической группой.

Сравнительно недавно стало известно, что всякий топологически однородный э. н. бикомпакт конечен (З. Фролик, К. Кунен; см. об этом в [1]). Однако топологически однородные э. н. вполне регулярные пространства произвольного дисперсионного характера [1]) были построены еще в 1968 г. Б. А. Ефимовым [2] — это были орбиты точек в абсолютах отделимых топологических групп при естественном продолжении на абсолют гомеоморфизмов этих групп.

В 1969 г. С. Сирота [3] построил в предположении континуум-гипотезы CH счетную недискретную отделимую э. н. топологическую группу. Умножив такую группу на какую-нибудь несчетную дискретную топологическую группу, получим несчетную дискретную отделимую топологическую группу, однако С. Сироте не удалось построить отделимую э. н. топологическую группу несчетного дисперсионного характера. Причина состоит в том, что при конструировании своей группы он построил в предположении CH на счетном множестве весьма специальный ультрафильтр, который сейчас называют рамсеевским. Но такие ультрафильтры несчетного дисперсионного характера могут существовать только на очень больших множествах — мощность которых измерима по Уламу (и как доказал К. Кунен [4], непротиворечиво считать, что их нет вообще ни на каком множестве). Следовательно, конструкция С. Сироты не могла привести к успеху в построении отделимых э. н. топологических групп дисперсионного характера $\aleph_1$, $\aleph_2$, и т. д. — малых несчетных кардиналов.

Затем мне удалось получить ряд результатов о э. н. топологических группах. Так, в [5] установлено существование в каждой отделимой э. н. топологической группе открытой подгруппы, каждый элемент которой имеет порядок 2; в силу этого результата строение э. н. топологических групп значительно прояснилось. В этой же работе был предложен новый весьма простой способ построения э. н. отделимых топологических групп. Опираясь на теорему Н. Хиндмэна [6] (теорема рамсеевского типа о разбиениях нату-

---

[1]) Дисперсионный характер топологического пространства — это дисперсионный характер его топологии, как системы подмножеств, т. е. минимум мощностей непустых подмножеств системы.

рального ряда), удалось в предположении выполнимости леммы Буса LB (широкоизвестного следствия из аксиомы Мартина) построить отделимую максимальную топологическую группу, т. е. топологическую группу, топология которой максимальна в классе всех плотных в себе топологий. В максимальном пространстве нет двух дизъюнктных подмножеств, имеющих общую предельную точку.

Удивительный факт состоит в том, что не существует максимальных топологических групп несчетного дисперсионного характера! Это утверждает теорема 10 из [8] (ее доказательство приводится ниже). В этой теореме нет обычных для таких ситуаций оговорок о существовании измеримых кардиналов.

Несмотря на близость э. н. и максимальных топологических групп, их различие проявляется, в частности, в том, что отделимые э. н. топологические группы могут иметь несчетный дисперсионный характер. Впервые отделимая э. н. топологическая группа несчетного дисперсионного характера была построена мною в [7] в предположении существования измеримого по Уламу кардинала и ее дисперсионный характер был измерим. По-существу, конструкция С. Сироты была перенесена на группу измеримой мощности.

Основным результатом данной работы является построение в предположении CH отделимой сепарабельной э. н. топологической группы дисперсионного характера $\aleph_1 = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, а также, с использованием метода форсинга,— отделимой э. н. топологической группы дисперсионного характера $\aleph_1$, в которой всякое счетное подмножество замкнуто.

Используемые в работе обозначения и терминология обычны, если контекст допускает однозначное толкование обозначения или термина, определение последнего опускается.

1. В целях полноты изложения кратко опишем конструкцию С. Сироты счетной отделимой э. н. топологической группы.

Сначала нужно взять подходящую алгебраическую группу. Как следует из упомянутого выше моего результата, необходимо взять счетную бесконечную группу из элементов 2-го порядка. Такие группы, как нетрудно доказать, абелевы и определяются своей мощностью, поэтому все счетные бесконечные такие группы одинаковы с алгебраической точки зрения. Удобно взять множество всех конечных подмножеств $\omega(X)$ какого-нибудь счетного бесконечного множества X с групповой операцией — симметрической разностью. Таким образом, $A + B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Роль нейтрального элемента группы отводится пустому множеству. Рассмотрим теперь какой-нибудь фильтр F на X и определим базу в точке 0 как семейство подгрупп $\{\omega(A)\colon A \in F\}$, т. е. произвольное базовое множество $\omega(A)$ есть семейство всех конечных подмножеств из A — некоторого множества из фильтра F. Возникающая групповая топология $\tau(F)$ сама по себе достаточно интересна, в некоторых аспектах она исследована С. Сиротой [9].

Пусть теперь ξ — рамсеевский ультрафильтр на X, т. е. для любого $n \in \omega_0$ и для всякого разбиения множества $[X]^n$ всех конечных подмножеств из X, содержащих не более n элементов, на два множества Y_1 и Y_2, найдется $A \in \xi$ такое, что $[A]^n \subset Y_1$ или $[A]^n \subset Y_2$. Доказательство того, что топология $\tau(\xi)$ э. н., достаточно сложно и длинно, к тому же С. Сирота использовал другие свойства построенного им в предположении CH ультрафильтра и только позднее стало ясно, что этот ультрафильтр рамсеевский.

2. Опишем теперь другой способ построения э.н. групповой топологии на том же множестве $\omega(X)$. Фактически мы будем иметь дело лишь с фильтрами окрестностей нейтрального элемента, имеющими базу из подгрупп. Такие фильтры назовем линейными, а соответствующую групповую топологию — линейной.

Лемма 1 [LB]. *Пусть линейный фильтр Φ имеет базу мощности меньше $\mathfrak{c}$, тогда существует линейный фильтр F со счетной базой и больший чем Φ.*

Доказательство. В силу LB существует последовательность элементов группы $\{x_i\colon i \in \omega_0\}$, сходящаяся к 0 в топологии $\tau(\Phi)$. Пусть K_n — подгруппа, порожденная множеством $\{x_i\colon i \geqslant n\}$. Система подгрупп $\{K_i\colon i \in \omega_0\}$ и есть база искомого фильтра.

Лемма 2. *Пусть F — линейный фильтр, $G \in \tau(F)$ и $0 \in [G]$ и $\{x_i\colon i \in \omega_0\}$ — последовательность элементов группы, лежащая в G и сходящаяся к 0 в топологии $\tau(F)$. Тогда существует линейный фильтр F' со счетной базой, больший чем F и такой что $\{0\} \cup G \in \tau(F')$.*

Доказательство. Так как $x_1 \in G$ и G открыто, то найдется такая окрестность V_1 нейтрального элемента группы, что V_1 — подгруппа и $x_1 + V_1 \subset G$. Возьмем какой-нибудь элемент $x_{i_2} \in V_1$ и найдем окрестность V_2 нейтрального элемента такую, что V_2 — подгруппа, $V_2 \subset V_1$ и $x_{i_2} + V_2 \subset G$ и т. д. Рассмотрим получившуюся последовательность $\{x_{i_k}\colon k \in \omega_0\}$ элементов группы. Ясно, что сумма любого конечного числа элементов этой последовательности лежит в $\{0\} \cup G$, здесь весьма существенно то, что группа состоит из элементов 2-го порядка! Отсюда вытекает, что K_1 — подгруппа, порожденная последовательностью $\{x_{i_k}\colon k \in \omega_0\}$, лежит в $\{0\} \cup G$. Семейство $\{K_n\colon n \in \omega_0\}$ подгрупп, порожденных множествами $\{x_{i_k}\colon k \geqslant n\}$ и есть счетная база искомого фильтра F'.

Теорема 1 [LB]. *Для всякой линейной групповой топологии на $\omega(X)$ с базой мощности меньше $\mathfrak{c}$ существует большая линейная групповая топология, обладающая следующим свойством:*

если V открыто и $0 \in [V]$, то $\{0\} \cup V$ — открытое множество.

Как легко видеть, выполнение этого свойства влечет э. н. топологии.

Доказательство. По трансфинитной индукции по всем ординалам, меньшим $\mathfrak{c}$, строится система все больших и больших линейных фильтров, имеющих базу мощности меньше $\mathfrak{c}$. На очередном шаге построения берется какое-нибудь открытое множество V, касающееся 0, и фильтр окрестностей 0 увеличивается так, чтобы в новой топологии множество $\{0\} \cup V$ стало открытым. За $\mathfrak{c}$ шагов это можно проделать со всеми открытыми множествами.

Теорема доказана.

Примерно также строится и счетная группа с максимальной топологией (см. [5]). Однако справедлива

Теорема 2. *Не существует отделимых э. н. топологических групп несчетного дисперсионного характера.*

Доказательство. Предположим обратное и пусть (G, τ) — отделимая э. н. топологическая группа с максимальной топологией. Так как всякая максимальная хаусдорфова топология э. н., то группу G можно считать просто группой $\Omega = \omega(X)$ — группой всех конечных подмножеств некоторого несчетного множества X с групповой операцией — симметрической разностью.

Мы укажем такое разбиение (Ω_1, Ω_2) множества $\Omega \setminus \{0\}$, что для любого несчетного множества $V \subset \Omega$, содержащего 0, будет $(V + V + V + V) \cap \Omega_1 \neq \wedge$ и $(V + V + V + V) \cap \Omega_2 \neq \wedge$. Но это противоречит максимальности топологии τ.

Пусть $x \in \Omega \setminus \{0\}$ и $|x| = n$. Разложим n на простые множители и подсчитаем число двоек в этом разложении. Если их четное число, то отнесем x во множество Ω_1, в противном случае — во множество Ω_2. Заметим самое существенное для нас свойство этого разбиения: если $x \cap y = \wedge$ и $|x| = |y|$ и $x, y \in \Omega_1(\Omega_2)$, то $x + y \in \Omega_2(\Omega_1)$. Этот факт очевиден.

Пусть $V \subset \Omega$, $|V| > \aleph_0$ и $0 \in V$. Ясно, что существует такое натуральное число n, что $|x| = n$ для каждого $x \in W$, где W — некоторое несчетное подмножество из V. Согласно известной лемме о пересечениях (см., например, [10]), существуют такое конечное подмножество $z \subset X$ и несчетное множество $W_1 \subset W$, что $x \cap y = z$ для всяких $x, y \in W_1$. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольные четыре элемента из W. Тогда $(x_1 + x_2) \cap (x_3 + x_4) = \Lambda$ и $|x_1 + x_2| = |x_3 + x_4|$, тем самым, элементы $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_3 + x_4$ и $y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ не могут принадлежать одному и тому же элементу разбиения (Ω_1, Ω_2).

Теорема доказана.

3. Здесь излагаются недавно полученные результаты о э.н. топологических группах.

Т е о р е м а 3 [*CH*]. *Существует сепарабельная отделимая э. н. топологическая группа дисперсионного характера* $c = \aleph_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через X какую-нибудь группу мощности $\aleph_1$, каждый элемент которой имеет порядок 2. Занумеруем элементы группы счетными ординалами: $X = \{x_\alpha \colon \alpha \in \omega_1\}$. Если $C \subset X$, то через $\mathrm{Al}\,[C]$ будем обозначать наименьшую подгруппу, порожденную подмножеством C; в связи с этим, пусть $X_\alpha = \mathrm{Al}[\{x_\beta : \beta \in \alpha\}]$.

Условием будем называть тройку $p = \langle X^p, \Phi^p, \mathcal{T}^p \rangle$, где X^p — некоторая счетная подгруппа из X, Φ^p — счетное семейство подгрупп из X^p, образующее базу фильтра, тем самым на X^p возникает топология f_p такая, что (X^p, f_p) — топологическая группа; замыкание подмножества C из X^p в этой топологии будем обозначать через $[C]_p$. Наконец, $\mathcal{T}^p$ — это счетное множество пар вида $\langle S, B^p \rangle$, где $S \subset X^p$, $B^p \in \Phi^p$ и $[S \setminus \Delta]_p \supset B^p$ для любого конечного подмножества Δ и S. От условия p потребуем также, чтобы $X_{\omega_0} \subset X^p$ и чтобы X_{ω_0} было плотно в (X^p, f_p).

Мы будем считать, что каждое $A^p \in \Phi^p$ имеет еще и некоторое имя $u(A^p)$, что может быть сделано, например, приписыванием каждому такому множеству какого-нибудь ординала с помощью соответствующего взаимнооднозначного отображения $u\colon \Phi^p$ в ω_1.

Для двух условий p, q положим $p \leqslant q$, если и только если $X^p \subseteq X^q$, $\Phi^p \mathrel{\dot{\subseteq}} \Phi^q$, $\mathcal{T}^p \mathrel{\dot{\subseteq}} \mathcal{T}^q$. Здесь $\dot{\subseteq}$ — не обычное теоретико-множественное включение, а имеет следующий смысл: каждое множество $A^p \in \Phi^p$ входит и в Φ^q, сохраняя свое имя (множества, имеющие одно и то же имя будут, как правило, обозначаться одной буквой, но с различными индексами), но может увеличиться лишь за счет новых элементов из $X^q \setminus X^p$. Структура базы фильтра Φ^q остается прежней на элементах базы фильтра Φ^p; но в Φ^p, вообще говоря, могут появиться новые множества, которых в Φ^p не было. Далее, всякая пара $\langle S, B^p \rangle \in \mathcal{T}^p$ входит и в $\mathcal{T}^q$, причем первый член пары остается неизменным; кроме того, в $\mathcal{T}^q$ могут появиться новые пары, которых в $\mathcal{T}^p$ не было.

(Нетрудно видеть, что и понятие условия и отношение сравнения между условиями и еще кое-что — все это идет из форсинга.)

Тривиально проверяется, что частично упорядоченное множество условий $\mathcal{P}$ счетно замкнуто, т. е. если $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots$ — возрастающая последовательность условий, то существует естественным образом определенное условие — точная верхняя грань этой последовательности условий.

Теперь нам необходимы несколько лемм.

Л е м м а 3. *Для всякого условия p, всякого $A^p \in \Phi^p$ и всякого $\alpha \in \omega_1$ найдется условие $q \geqslant p$ и такое, что $A^q \setminus X_\alpha \neq \Lambda$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x — произвольный элемент из $X \setminus \mathrm{Al}\,[X_\alpha \cup X^p]$ и положим $X^q = \mathrm{Al}[X^p \cup \{x\}]$, $\mathcal{T}^q \mathrel{\dot{=}} \mathcal{T}^p$ (здесь $\dot{=}$ имеет примерно тот же смысл, что и $\dot{\subseteq}$, объясненный несколько ранее);

далее положим $\Phi^q = \{A^q = \mathrm{Al}[A^p \cup \{x\}]\colon A^p \in \Phi^p\}$. Докажем, что $q = \langle X^q, \Phi^q, \mathcal{T}^q\rangle$ — условие и большее чем p.

Ясно, что надо проверить только следующее:

$$\text{если } \langle S, B^q\rangle \in \mathcal{T}^q, \text{ то } [S]_q \supset B^q,$$

т. е., что $(b+A^q) \cap S \neq \Lambda$ для всяких $b \in B^q$ и $A^q \in \Phi^q$.

Отметим, что $B^q = \mathrm{Al}\,[B^p \cup \{x\}] = B^p \cup \{t+x\colon\ t \in B^p\}$ и $A^q = A^p \cup \cup \{t+x\colon t \in A^p\}$.

Итак, если $b \in B^p$, то $(b+A^q) \supset (b+A^p)$, но $(b+A^p) \cap S \neq \Lambda$, ибо $[S]_p \supset B^p$.

Если же $b \in B^q \setminus B^p$, то $b = r+x$, где $r \in B^p$ и тогда $(r+x+A^q) \supset \supset \{r+x+t+x\colon t \in A^p\} \supset \{r+t\colon t \in A^p\}$, но $(r+A^p) \cap S \neq \Lambda$, ибо $[S]_p \supset B^p$.

Лемма 4. *Для всякого условия p существует условие $q \geqslant p$ и такое, что $\bigcap \Phi^q = \{0\}$.*

Доказательство. Положим $X^q = X^p$, $\mathcal{T}^q = \mathcal{T}^p$, а Φ^q определим так:

Рассмотрим следующее семейство подмножеств из X^p:

$$\Delta = \{X_{\omega_0} - x\colon\ x \in X^p\} \cup \{S - a\colon\ a \in B^p,\ \langle S,\ B^p\rangle \in \mathcal{T}^p\}.$$

Заметим, что Δ — счетное семейство бесконечных подмножеств из X^p, касающихся 0 в топологии f_p. Выделим теперь в Φ^p убывающую счетную базу для Φ^p — $\{A_n\colon n \in \omega_0\}$.

Пусть $\widetilde{\Delta} = \{K_n\colon n \in \omega_0\}$ — последовательность подмножеств из X^p, каждое K_n есть какое-то множество из Δ, причем каждое множество из Δ встречается в $\widetilde{\Delta}$ бесконечное число раз. Пусть далее x_n — произвольный элемент из $A_n \cap K_n$, причем $x_n \neq x_k$, если $n \neq k$ и $x_n \notin \mathrm{Al}[\{x_k\colon k < n\}]$. Положим $R_n = \mathrm{Al}[\{x_k\colon k \geqslant n\}]$, затем положим $\Phi^q = \Phi^p \cup \{R_n\colon n \in \omega_0\}$ и, наконец, пусть $q = \langle X^q, \Phi^q, \mathcal{T}^q\rangle$. Нетрудно проверить, что q — условие, большее чем p и что $\bigcap \Phi^q = \{0\}$, ибо $\bigcap \Phi^q \supset \bigcap \{R_n\colon n \in \omega_0\} = \{0\}$.

Лемма 5. *Пусть $p = \langle X^p, \Phi^p, \mathcal{T}^p\rangle$ — произвольное условие и W — подмножество X^p, открытое и касающееся 0 в топологии f_p. Тогда найдется условие $q = \langle X^q, \Phi^q, \mathcal{T}^q\rangle$, большее чем p и такое, что в $\mathcal{T}^q$ есть пара $\langle S, B^q\rangle$ такая, что $S \subset W$.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\colon n \in \omega_0\}$ — убывающая база для Φ^p, рассмотрим следующее семейство подмножеств из X^p:

$$\Delta = \{X_{\omega_0} - x\colon x \in X^p\} \cup \{S - a\colon a \in B^p, \langle S, B^p\rangle \in \mathcal{T}^p\}.$$

Заметим, что Δ — счетное семейство подмножеств из X^p, каждое из которых плотно в некоторой окрестности 0. Пусть $\widetilde{\Delta} = \{K_n\colon n \in \omega_0\}$ — последовательность подмножеств из X^p, каждое K_n есть какое-то множество из Δ, причем каждое множество из Δ встречается в $\widetilde{\Delta}$ бесконечно много раз.

По индукции нетрудно найти точки $x_n \in A_n \cap K_n \cap W$ и такие, что $x_n \neq x_k$, если $n \neq k$, и если положить $R_n = \mathrm{Al}[\{x_k\colon k \geqslant n\}]$, то $R_0 \setminus \{0\} \subset \subset W$. Положим далее $X^q = X^p$, $\Phi^q = \Phi^p \cup \{R_n\colon n \in \omega_0\}$, и $\mathcal{T}^q = \mathcal{T}^p \cup \cup \{\{\langle R_0 \setminus \{0\}, R_0\rangle\}\}$. Несложно проверить, что q — условие, удовлетворяющее заключению леммы: пара $\langle S, B^q\rangle$ есть $\langle R_0 \setminus \{0\}, R_0\rangle$.

Собственно доказательство теоремы. Основным в этом доказательстве является

Утверждение [*CH*]. Существует возрастающее семейство условий $G = \{p_\alpha\colon \alpha \in \omega_1\}$, обладающее следующими свойствами: (пусть I — множество имен подмножеств из $\bigcup \{\Phi^p\colon p \in G\}$, $\Phi = \{\widetilde{A} = \bigcup \{A \in \Phi^p\colon p \in G, u(A) = u_0\}\colon u_0 \in I\}$, т. е. $\tilde{A}$ есть объединение подмножеств из Φ^p, где $p \in G$, имеющих одинаковое имя)

1) Φ — база фильтра, состоящая из подгрупп

2) каждое $\tilde{A} \in \Phi$ несчетно

3) $\bigcap \Phi$ содержит лишь 0,

4) если V — открытое множество в топологии f, порожденной фильтром Φ, и V касается 0, то существует счетное подмножество K из V и некоторое $\tilde{B} \in \Phi$, такие что $[K]_f \supset \tilde{B}$.

Как легко видеть, условие 3) влечет отделимость топологии f, условие 2) — несчетность дисперсионного характера и, наконец, условие 4) — э. н. топологии f.

Только что описанное семейство G строим по трансфинитной индукции. Множество Φ будет иметь мощность $\aleph_1$, поэтому можно занумеровать счетными ординалами всевозможные счетные наборы будущих базовых открытых (в топологии f) подмножеств из X, причем каждый такой набор получит номер, не меньший, чем имеет условие p_α, в топологии f_α которого он содержится. Используя все три леммы, строим семейство G. Поясним, что существенную роль в доказательстве того, что свойство 4) выполняется для G, играет сепарабельность строящейся топологии f, нужно, впрочем, лишь наличие условия Суслина.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. *С системой ZFC аксиом теории множеств совместно утверждение о существовании отделимой э. н. топологической группы дисперсионного характера $\aleph_1$, в которой всякое счетное подмножество замкнуто.*

Приступим к доказательству этой теоремы. От читателя предполагается знакомство с методом форсинга (см., например, [11], [12]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — какая-нибудь счетная стандартная транзитивная модель для системы ZFC аксиом теории множеств [1]). В $\mathfrak{M}$ возьмем группу X мощности $\aleph_1$, каждый элемент которой имеет порядок 2 (остальные соглашения в обозначениях об этой группе см. в начале доказательства теоремы 1). Опишем частично упорядоченное множество условий $\mathcal{P}$.

Условие p есть тройка $\langle X^p, \Phi^p, \mathcal{T}^p\rangle$, где X^p и Φ^p такие же, как и в доказательстве предыдущей теоремы (не требуется, однако, чтобы X_{ω_0} было плотно в (X^p, f_p)). Но $\mathcal{T}^p$ — это счетное множество пар вида $\langle S^p, B^p\rangle$, где $B^p \in \Phi^p$, а S^p — открытое в топологии f_p подмножество, являющееся суммой счетного числа открытых множеств вида $x + A^p$, где $x \in X^p$, $A^p \in \Phi^p$, и содержащее B^p в своем замыкании.

Отношение сравнения $\leqslant$ для условий из $\mathcal{P}$ определяется примерно так же, как и для условий в доказательстве теоремы 1 — обычным для форсинга образом.

Тривиально проверяется счетная замкнутость частично упорядоченного множества условий $\mathcal{P}$.

Пусть G — какое-нибудь генерическое подмножество из $\mathcal{P}$ и $\mathfrak{M}[G]$ — соответствующее генерическое расширение модели $\mathfrak{M}$. Из счетной замкнутости частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ вытекает, что ω_1 из $\mathfrak{M}$ остается ω_1 и в $\mathfrak{M}[G]$ (см., например, [11], [12]).

В $\mathfrak{M}[G]$ на X определим семейство Φ следующим образом: каждое подмножество $\tilde{A} = \bigcup \{A^p\colon A^p \in \Phi^p,\ p \in G,\ A^p$ имеет одно и то же имя$\}$ (мы будем говорить, что $\tilde{A}$ выросло из (любого) множества A^p) принадлежит Φ, и Φ состоит только из таких подмножеств. Тривиально проверяется, что Φ состоит только из подгрупп на X, и что Φ образует базу фильтра; тем самым, на X возникает топология f, превращающая X в топологическую группу

[1]) Только такие модели рассматриваются в данной работе.

(X, f); замыкание подмножества C из X в топологии f будем обозначать через $[C]_f$. Докажем, что топология f отделима, имеет дисперсионный характер $\aleph_1$, э. н. и каждое счетное подмножество из X замкнуто.

Первые два свойства будут доказаны, если мы установим, что каждое $\widetilde{A}$ из Φ несчетно и что $\bigcap \Phi = \{0\}$.

Первое вытекает из леммы, совершенно аналогичной лемме 3 из доказательства теоремы 1 и на этом останавливаться не будем.

Лемма 6 аналогична лемме 4 из доказательства теоремы 1, но мы ее сформулируем несколько иначе, что достаточно для доказательства того, что $\bigcap \Phi = \{0\}$.

Лемма 6. *Для всякого условия p и для всякого $\alpha \in \omega_1$ существует условие $s \geqslant p$ и такое, что в Φ^s есть K^s, дизъюнктное с множеством $X_\alpha \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из $X \setminus \mathrm{Al}[X_\alpha \cup X^p]$ и положим $A^q = \mathrm{Al}[A^p \cup \{x\}]$, $\mathscr{T}^q \doteq \mathscr{T}^p$ ($\doteq$ — не обычное равенство!: см. об этом несколько ранее). Далее положим $\Phi^q = \{A^q\colon A^p \in \Phi^p\}$. Несложно доказать, что $q = \langle \mathrm{Al}[X^p \cup \{x\}], \Phi^q, \mathscr{T}^q\rangle$ — условие и большее, чем p. Отметим, что если $b \in B^q \cap X^p$ и $\langle S^q, B^q\rangle \in \mathscr{T}^q$, то для любого $A^q \in \Phi^q$ верно $((S^q - b) \setminus \mathrm{Al}[X^p \cup X_\alpha]) \cap A^q \neq \Lambda$. Совершив счетное число таких переходов, мы можем в конце концов найти условие $r \geqslant p$ и такое, что следующее построение можно будет провести.

Рассмотрим семейство подмножеств из X^r

$$\Delta = \{(S^r - a) \setminus \mathrm{Al}[X^p \cup X_\alpha]\colon \alpha \in B^r,\ \langle S^r, B^r\rangle \in \mathscr{T}^r\}.$$

Это — счетное семейство подмножеств из X^r, касающихся 0 в топологии f_r.

В Φ^r выделим убывающую базу $\{A_n\colon n \in \omega_0\}$ и пусть $\widetilde{\Delta} = \{K_n\colon n \in \omega_0\}$ — последовательность подмножеств из X^r, каждое K_n есть какое-то множество из Δ, причем каждое множество из Δ встречается в $\widetilde{\Delta}$ бесконечно много раз.

По индукции найдем такие точки $x_n \in A_n \cap K_n$, $x_n \neq x_k$, если $n \neq k$ и если положить $R_n = \mathrm{Al}[\{x_k\colon k \geqslant n\}]$, то $R_0 \cap X_\alpha = \{0\}$.

Определим теперь условие s, большее чем r (и тем более, чем p) следующим образом: $X^s = X^r$, $\mathscr{T}^s = \mathscr{T}^r$, $\Phi^s = \Phi^r \cup \{R_n\colon n \in \omega_0\}$. Это условие — искомое.

Из последней леммы вытекает, что 0 не есть предельная точка никакого счетного подмножества из X в топологии f.

Докажем теперь основную лемму.

Лемма 7. *Если V — открытое подмножество топологической группы и $0 \in [V]_f$, то $[V]_f$ содержит некоторую окрестность 0.*

Доказательство леммы. Пусть $p \in G$ и $p \Vdash$ «$\underline{V}$ открыто и $\underline{V} \cap \underline{\widetilde{A}} \neq \Lambda$ для всякого $\underline{\widetilde{A}} \in \underline{\Phi}$». (Условимся в дальнейшем для условия $q = \langle X^q, \Phi^q, \mathscr{T}^q\rangle$ нумеровать натуральными числами множества A_n^q из Φ^q, образующие для Φ^q убывающую счетную базу.)

Мы намерены найти последовательность условий $p_n = \langle X_n, \Phi_n, \mathscr{T}_n\rangle$ таких, что $p = p_0 \leqslant p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots$ и последовательность точек $\{x_n\colon n \in \omega_0\}$, обладающие следующими свойствами:

1) $K_n = \mathrm{Al}\,[\{x_k\colon k \geqslant n\}] \subset \bigcap \{A_n^{p_i}\colon i \leqslant n\}$,

2) если пара $\langle T, B\rangle \in \bigcup \{\mathscr{T}_n\colon n \in \omega_0\}$, то $(b + K_n) \cap T \neq \Lambda$ для всяких $b \in B$ и K_n,

3) $p_{n+1} \Vdash$ «$x_n + \underline{W}_n \subset \underline{V}$ и $\underline{W}_n \subset \underline{W}_{n-1}$», где $W_n \in \Phi$ и W_n есть $W_n^{p_{n+1}}$, а $W_n^{p_{n+1}} \in \Phi_{n+1}$ (т. е. W_n «выросло» из $W_n^{p_{n+1}}$).

Затем мы образуем новое условие $q = \langle X^q, \Phi^q, \mathscr{T}^q\rangle$, где $X^q = \bigcup \{X_n\colon n \in \omega_0\}$, $\Phi^q = (\bigcup \{\Phi_n\colon n \in \omega_0\} \cup \{K_n\colon n \in \omega_0\})$, $\mathscr{T}^q = (\bigcup \{\mathscr{T}_n\colon n \in \omega_0\}) \cup \{\langle W, K_1\rangle\}$, где W

есть сумма счетного числа открытых в топологии f_q множеств $x_n + T_n$, где T_n имеет то же имя, что и $W_n^{p_{n+1}}$.

Из свойств 1), 2) видно, что q действительно условие и $q \geqslant p_n$ для любого $n \in \omega_0$. Но легко видеть, что $q \Vdash$ «$\bigcup\{x_n + \underline{\widetilde{W}}_n\colon n \in \omega_0\} \subset \underline{V}$», значит, $q \Vdash$ «$\underline{V} \supset [\widetilde{K}_1]_f$».

Итак, все будет доказано, если мы построим указанные выше последовательности условий и точек.

Сделаем одно замечание. Рассмотрим будущую, еще не построенную последовательность условий: $p = p_0 \leqslant p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots$

Семейство $\widetilde{\Delta} = \{S - b\colon S$ — первый член пары $\langle S, b\rangle \in \bigcup \{\mathscr{T}_n\colon n \in \omega_0\}$, а b взято из $B\}$ счетно и каждое множество $S - b$ содержит некоторую окрестность нейтрального элемента 0 (в соответствующей топологии). Будем предполагать, что семейство $\widetilde{\Delta}$ занумеровано натуральными числами и множество $S - b$ имеет в этой нумерации номер, не меньший, чем номер условия, из которого оно взято. Далее, семейство $\widetilde{\Delta}$ нетрудно увеличить до семейства $\Delta = \{S_n\colon n \in \omega_0\}$ такого, что каждое множество из семейства $\widetilde{\Delta}$ повторяется в Δ бесконечное число раз.

Итак, V открыто и $0 \in [V]_f$, а S_0 содержит некоторую окрестность 0, следовательно, найдутся $x_0 \in S_0 \cap A_0^p$, $W_0 \in \Phi$ и условие $p_1 \geqslant p$ такие, что W_0 есть $\widetilde{W}_0^{p_1}$, где $W_0^{p_1} \in \Phi_1$ и $p_1 \Vdash$ «$x_0 + \underline{W}_0 \subset \underline{V}$».

Далее найдутся $x_1 \in S_1 \cap A_1^p \cap A_1^{p_1}$, $W_1 \in \Phi$ и условие $p_2 \geqslant p_1$ такие, что W_1 есть $\widetilde{W}_1^{p_2}$, где $\widetilde{W}_1^{p_2} \in \Phi_1$ и $p_2 \Vdash$ «$x_1 + \underline{W}_1 \subset \underline{V}$ и $\underline{W}_1 \subset \underline{W}_0$», и т. д. ... найдутся $x_n \in S_n \cap \bigcap\{A_n^{p_i}\colon i \leqslant n\}$, $W_n \in \Phi$ и условие $p_{n+1} \geqslant p_n$ такие, что W_n есть $\widetilde{W}_n^{p_{n+1}}$, где $W_n^{p_{n+1}} \in \Phi_{n+1}$ и $p_{n+1} \Vdash$ «$x_n + \underline{W}_n \subset \underline{V}$ и $\underline{W}_n \subset \underline{W}_{n-1}$» и т. д. ... По завершении описанного индуктивного процесса по всем натуральным числам получим требуемые последовательности условий и точек. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. W. Comfort, Ultrafilters: some old and some new problems, Bull. Amer. Math. Soc. 83:4 (1977), 417—455.

[2] Б. А. Ефимов, Абсолюты однородных пространств, ДАН **179**:2 (1968), 271—274.

[3] С. Сирота, Произведение топологических групп и экстремальная несвязность, Матем. сб. **79**:2 (1969), 179—192.

[4] K. Kunen, Some points in $\beta N \setminus N$, Math. Proc. Cambridge Philosoph. Soc. **30**:3 (1976), 385—398.

[5] В. И. Малыхин, Экстремально несвязные и близкие к ним группы, ДАН **220**:1 (1975), 27—30.

[6] N. Hindman, Einite sums from sequences within cells of a partition of N, J. Combin. Theory **17**:1 (1974), 1—11.

[7] В. И. Малыхин, О разложимых и максимальных пространствах, ДАН **218**:5 (1974), 1017—1020.

[8] В. И. Малыхин, О максимальных и разложимых пространствах. II, ДАН **223**:5 (1975), 1060—1063.

[9] С. Сирота, О топологиях на произведении групп, ДАН **183**:6 (1968), 1265—1268.

[10] W. W. Comfort, A survey of cardinal invariants, Gen. Topol. and Appl. **1**:2 (1971), 163—199.

[11] Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.

[12] Дж. Шенфильд, Математическая логика, М., «Наука», 1975.