К общей теории алгебраических систем

А. И. Мальцев (Москва)

В теории алгебраических систем, наряду с изучением свойств отдельных конкретных систем, обычно изучаются зависимости между свойствами произвольной индивидуальной системы. Однако часто вместо отдельных систем приходится рассматривать классы систем. Поэтому представляет интерес также изучение зависимостей между свойствами, принадлежащими одновременно всем системам некоторого класса. Зависимости последнего вида и рассматриваются в настоящей статье. При этом в качестве классов систем берутся так называемые примитивные классы, т. е. совокупности алгебраических систем, имеющих одинаково называемые операции и удовлетворяющие некоторой фиксированной системе тождеств. Основными рассматриваемыми свойствами являются перестановочность конгруэнтностей, транзитивность группы трансляций и определяемость конгруэнтностей своими смежными классами. В §§ 1—2 устанавливается ряд зависимостей между этими свойствами. В остальных параграфах дается определение топологических алгебраических систем и ищутся по возможности более широкие классы их, для которых остаются справедливыми общие свойства, присущие топологическим группам.

Для удобства в статье приведены определения всех нужных для понимания результатов понятий. Необходимые факты, используемые в доказательствах, содержатся в монографиях Л. С. Понтрягина [4] и Г. Биркгофа [2].

§ 1. Трансляции. Производные системы

Отображение f, ставящее каждой последовательности $x_1, \dots, x_n$ из n элементов множества M в соответствие однозначно определенный элемент $f(x_1, \dots, x_n)$ того же множества, называется n-*арной операцией, определенной на* M. Если соответствующие значения $f(x_1, \dots, x_n)$ определены не для всех $x_1, \dots, x_n$, а лишь для некоторых, то такая операция называется *частичной*. Множество A, рассматриваемое вместе с совокупностью заданных на нем операций $f_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha})$, называется алгебраической *системой*, а операции f_α называются *основными* для этой системы. Если среди основных операций есть частичные, то система называется *частичной*.

При одновременном рассмотрении нескольких алгебраических систем между основными их операциями обычно считается установленным взаимно однозначное соответствие, при котором n-арные операции отвечают n-арным. Соответствующие операции называются одноименными и обозначаются одинаково. Изоморфизм и гомоморфизм систем с одноименными основными операциями определяются обычным образом.

Выражения вида $f_\alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$, а также $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$, где $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ — буквы, а f_α — обозначения основных операций, называются полиномами от $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ первой ступени. По индукции выражения вида $f_\alpha(u_1,\ldots,u_n)$, где $u_1,\ldots,u_n$ — полиномы не выше k-й ступени от букв $x_1,\ldots,x_p$ и хотя бы один из этих полиномов является полиномом k-й ступени, называются полиномами $(k+1)$-й ступени от $x_1,\ldots,x_p$.

Заменяя в полиноме некоторые буквы элементами рассматриваемой алгебраической системы, получим многочлен от оставшихся букв. Каждый многочлен от букв $x_1,\ldots,x_p$ можно рассматривать как p-арную операцию, определенную на множестве элементов заданной алгебраической системы. Результатом операции $F(x_1,\ldots,x_n)$, примененной к элементам $a_1,\ldots,a_n$, называется элемент, получающийся в результате подстановки в многочлен F вместо букв соответственных элементов $a_1,\ldots,a_n$ и выполнения внутри заданной алгебраической системы операций, указанных в записи многочлена. Операции, получаемые при помощи многочленов, называются многочленными или производными. Если данная система — частичная, то производные операции также могут оказаться частичными.

Преобразования множества элементов алгебраической системы, имеющие вид $x \to F(x) = xF$, где $F(x)$ — некоторый многочлен от x, называются трансляциями системы. Так как многочлен от многочлена есть многочлен, то произведение трансляций, определяемое обычной формулой $x \cdot ST = xS \cdot T = T(S(x))$, снова является трансляцией. Поэтому совокупность трансляций алгебраической системы образует полугруппу — полугруппу трансляций. К числу трансляций всегда относится и тождественное преобразование E. Трансляция T называется обратимой, если существует трансляция S, для которой $ST = TS = E$. Все обратимые трансляции составляют группу трансляций данной системы.

Трансляции вида $x \to f_\alpha(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n)$, где f_α — основная операция алгебраической системы A, называются ее главными трансляциями. Произведение конечного числа главных трансляций называется элементарной трансляцией. Элементарные трансляции образуют подполугруппу в полугруппе всех трансляций данной системы.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение, определенное на произвольном множестве M, называется эквивалентностью на M. Эквивалентность θ, определенная на M, называется инвариантной относительно преобразования T этого множества, если из $x \equiv y\ (\theta)$ следует $xT \equiv yT\ (\theta)$. Эквивалентность θ называется согласованной с операцией $f(x_1,\ldots,x_n)$, если из $x_1 \equiv x_1',\ldots,x_n \equiv x_n'\ (\theta)$ следует $f(x_1,\ldots,x_n) \equiv f(x_1',\ldots,x_n')\ (\theta)$. Эквивалентность, согласованная со всеми основными операциями алгебраической системы, называется **конгруэнтностью** на этой системе.

Индукцией по ступеням многочленов легко доказывается

Теорема 1. *Конгруэнтности инвариантны относительно всех трансляций системы. Для того чтобы эквивалентность была конгруэнтностью, достаточно, чтобы она была инвариантна относительно главных трансляций системы. Эквивалентность, согласованная с данными операциями, согласована и со всеми производными операциями.*

Имея алгебраическую систему A с данными основными операциями, можно образовать ряд многочленных производных операций. Совокупность элементов A вместе с несколькими производными операциями, рассматриваемыми в качестве основных, будет новой алгебраической системой, называемой **производной** над данной. Теорема 1 утверждает, что все эквивалентности на множестве A, являющиеся конгруэнтностями для первоначальной системы, являются конгруэнтностями и для всех производных систем.

Алгебраическая система с операцией умножения $\cdot$ и двумя операциями деления $/, \backslash$, элементы которой удовлетворяют тождествам

$$(xy) / y = x, \quad y \backslash (yx) = x, \quad x / y \cdot y = x, \quad y \cdot y \backslash x = x, \tag{1}$$

называется **квазигруппой**. Элемент e квазигруппы G называется ее **правой единицей**, если $x \cdot e = x$ для всех $x \in G$ (ср. [6]). Из (1) следует, что во всех квазигруппах имеют место тождества $x / (y \backslash x) = y$, $(x / y) \backslash x = y$, а в квазигруппе с правой единицей e сверх того тождества $x / e = x$, $x \backslash x = e$. Квазигруппа, содержащая элемент e, являющийся одновременно правой и левой единицей, называется **лупой**. Лупа с ассоциативным умножением является группой.

Лемма. *Каждая квазигруппа содержит в качестве производной системы лупу с произвольным наперед заданным элементом e в качестве единицы.*

Действительно, пусть e — произвольный элемент заданной квазигруппы G. Определим в G производные операции $\circ$, $/\!/$, $\backslash\!\backslash$ посредством формул

$$x \circ y = (x \cdot e \backslash e) / (y \backslash e),$$

$$x /\!/ y = (x \cdot y \backslash e) / (e \backslash e),$$

$$y \backslash\!\backslash x = e / (x \backslash (y \cdot e \backslash e)).$$

Легко видеть, что для новых операций тождества (1) остаются верными. Сверх того

$$x \circ e = e \circ x = x,$$

что и требовалось.

Теорема 2. *Для того чтобы каждая алгебраическая система некоторого примитивного класса содержала производную систему, элементарные трансляции которой образуют транзитивную группу, необходимо и достаточно, чтобы каждая система класса среди своих производных систем содержала лупу.*

Доказательство. Достаточность очевидна, так как элементарные трансляции всякой квазигруппы образуют транзитивную группу. Для доказательства необходимости рассмотрим в заданном примитивном классе свободную алгебраическую систему A со счетным множеством свободных порождающих $a_1, a_2, \ldots$. Среди основных операций данной производной системы над A найдется неодинарная операция $F(x_1, \ldots, x_n)$. Вводим обозначение:

$$x \cdot y = F(x, y, a_3, \ldots, a_n).$$

По условию, трансляции L_a, R_a, определяемые формулами

$$xL_a = a \cdot x, \quad xR_a = x \cdot a \quad (a, x \in A),$$

должны иметь обратные L_a^{-1}, R_a^{-1}, т. е. для подходящих многочленов $P(x, a, a_3, \ldots, a_n)$, $Q(x, a, a_3, \ldots, a_n)$ должны выполняться тождества

$$P(xL_a, a, a_3, \ldots, a_n) = P(x, a, a_3, \ldots, a_n)\, L_a = x \tag{2}$$

и аналогичные тождества для Q. Вводя операции

$$a \setminus x = P(x, a, a_3, \ldots, a_n), \qquad x \,/\, a = Q(x, a, a_3, \ldots, a_n),$$

можно придать тождествам (2) вид (1). Таким образом, относительно введенных трех операций множество A становится квазигруппой. Согласно лемме, в этой квазигруппе существуют производные операции, относительно которых A является лупой.

Алгебраическую систему с двумя тернарными операциями xyz, $x\tau y\tau z$, элементы которой удовлетворяют тождествам

$$(xyz)\tau y\tau z = x, \quad (x\tau y\tau z)yz = x, \quad xxz = z, \tag{3}$$

условимся называть битернарной системой.

Заметим, что в битернарной системе имеет место тождество

$$x\tau y\tau x = y, \tag{4}$$

так как из (3) следует: $x = (xxy)\tau x\tau y = y\tau x\tau y$.

Тождества (3) показывают, что трансляции R_{ab}, S_{ab}, где

$$xR_{ab} = xab, \quad xS_{ab} = x\tau a\tau b,$$

взаимно обратны, а из тождества (4) следует, что $aS_{ba} = b$ при любых a, b, т. е., что группа, порожденная трансляциями R_{ab}, S_{ab}, транзитивна.

Теорема 3. *Для того чтобы были транзитивными группы обратимых трансляций всех систем некоторого примитивного класса, необходимо и достаточно, чтобы существовали производные тернарные операции, относительно которых системы рассматриваемого класса были бы битернарными.*

Доказательство. Достаточность очевидна, так как группы обратимых трансляций битернарных систем транзитивны. Для доказательства необходимости снова рассмотрим свободную систему данного класса со счетным числом порождающих элементов $a_1, a_2, \ldots$. Согласно условию, существуют трансляция P, переводящая a_1 в a_2, и обратная ей трансляция P^{-1}. Иначе говоря, существуют многочлены $P(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $Q(x, a_1, \ldots, a_n)$, связанные тождествами

$$Q(P(x, a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n) = P(Q(x, a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n) = x. \tag{5}$$

При помощи новых операций, определяемых равенствами

$$xyz = P(x, y, z, a_3, \ldots, a_n), \quad x\tau y\tau z = Q(x, y, z, a_3, \ldots, a_n),$$

тождества (5) можно переписать в виде первых двух тождеств (3), а условие $a_1 P = a_2$ дает третье тождество (3).

Произведением бинарных отношений θ_1, θ_2, определенных на множестве M, называется бинарное отношение $\theta_1\theta_2$, истинное для тех и только тех пар элементов x, y из M, для которых в M существует элемент z, для которого отношения $x\theta_1 z$ и $z\theta_2 y$ истинны. Отношения θ_1, θ_2 называются перестановочными, если $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$.

Теорема 4. *Для того чтобы все конгруэнтности на каждой алгебраической системе некоторого примитивного класса были перестановочными, необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен* $\Psi(x, y, z)$, *удовлетворяющий тождествам*

$$\Psi(x, x, z) = z, \quad \Psi(x, z, z) = x$$

на всех системах этого класса.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как если многочлен $\Psi(x, y, z)$ существует и для некоторых конгруэнтностей θ_1, θ_2 справедливы соотношения $a \equiv c \ (\theta_1), c \equiv b\,(\theta_2)$, то

$$\Psi(a, c, b) \equiv \Psi(a, a, b) \ (\theta_1), \quad \Psi(a, c, b) \equiv \Psi(a, c, c) \ (\theta_2)$$

или

$$\Psi(a, c, b) \equiv b \ (\theta_1), \quad \Psi(a, c, b) \equiv a \ (\theta_2),$$

откуда $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$.

Для доказательства необходимости рассмотрим в данном примитивном классе свободную систему A с порождающими a, b, c. Если эти порождающие связать соотношением $a = c$, то система A перейдет в фактор-систему от A по соответствующей конгруэнтности θ_1, а если связать соотношением $b = c$, то A перейдет в фактор-систему A/θ_2. Из сравнений $a \equiv c \ (\theta_1)$, $b \equiv c \ (\theta_2)$ и перестановочности θ_1 с θ_2 вытекает существование в A элемента d, связанного сравнениями $a \equiv d \ (\theta_2)$, $b \equiv d \ (\theta_1)$. Пусть $d = \Psi(a, c, b)$ — выражение этого элемента через порождающие. В фактор-системе A/θ_1 имеем: $\Psi(a, a, b) = b$. Но так как A/θ_1 — свободная система в данном классе с порождающими a, b (см. [3]), то $\Psi(a, a, b) = b$ является тождеством во всех системах рассматриваемого класса. Аналогичным способом устанавливается и тождество $\Psi(a, b, b) = a$.

В битернарной системе в качестве многочлена Ψ можно взять

$$\Psi(x, y, z) = (xya)\tau z\tau a,$$

где a — какой-либо фиксированный элемент, и, следовательно, на битернарных системах все конгруэнтности перестановочны. Вспоминая теорему 3, видим, что конгруэнтности перестановочны вообще на всех классах систем с транзитивными группами обратимых трансляций. Перестановочными будут, в частности, конгруэнтности на квазигруппах.

§ 2. Нормальные комплексы и правильные конгруэнтности

Как известно, в классическом случае обыкновенных групп конгруэнтность однозначно определена, если известен один из ее смежных классов, и конгруэнтности взаимно однозначно соответствуют нормальным делителям. Аналогичное положение имеет место также в лупах. В связи с этим возник общий вопрос о характеристике более общих алгебраических систем, где имели бы место подобные факты.

Вместе с Е. С. Ляпиным назовем совокупность K элементов алгебраической системы A ее **нормальным комплексом**, если на A существует хотя бы одна конгруэнтность, для которой K является смежным классом. Нормальный комплекс K — **правильный**, если он является смежным классом в точности одной конгруэнтности.

Теорема 5 *. *Для того чтобы непересекающиеся совокупности $K_i, K_j, \ldots$ элементов алгебраической системы A были смежными классами подходящей конгруэнтности θ на A, необходимо и достаточно, чтобы каждая транслированная совокупность $K_i T$ или целиком содержалась в одной из заданных, или не имела общих элементов ни с одной из заданных совокупностей.*

Доказательство. Действительно, поскольку для любой конгруэнтности θ и любой трансляции T из $a \equiv b\ (\theta)$ следует $aT \equiv bT(\theta)$, то трансляция $K_i T$ смежного класса K_i состоит из конгруэнтных элементов и, следовательно, является или смежным классом, или же частью смежного класса, чем и доказывается необходимость условий теоремы.

Обратно, пусть заданы совокупности $K_i, K_j, \ldots$, удовлетворяющие условиям теоремы. Для элементов a, b из A пишем $a \sim b\ (\theta)$, если или $a = b$, или a, b входят в некоторое K_j, или в некотором K_j найдутся такие u, v, что для подходящей трансляции T будет $a = uT$, $b = vT$. Элементы a, b назовем **сравнимыми** по θ, если в A найдется конечная цепочка элементов $x_1, \ldots, x_n$, для которых $a \sim x_1$, $x_1 \sim x_2, \ldots, x_n \sim b\ (\theta)$. Легко доказывается, что сравнения по θ являются конгруэнтностью на A. Покажем, что каждое множество K_i будет смежным классом относительно θ. Прежде всего для любых двух элементов a, b из K_i имеем $a \sim b$ и, следовательно, $a \equiv b\ (\theta)$. Пусть теперь $a \in K_i$, $b \equiv a\ (\theta)$. Остается доказать, что $b \in K_i$. Согласно определению, в A найдется конечная цепочка элементов, связанных

---

* В другой форме эта теорема для подгрупп была доказана Е. С. Ляпиным [5]. Позже она была доказана В. В. Вагнером для однородных пространств с полугруппой преобразований. В приведенной в тексте форме она является простым соединением результатов Ляпина — Вагнера с теоремой 1.

условиями $a \sim x_1 \sim \ldots \sim x_n \sim b$ (θ). Из $a \sim x_1$, $a \in K_i$ следует, что или $x_1 \in K_i$ или $a = uT$, $x_1 = vT$ $(u, v \in K_i)$. В последнем случае $K_i T$ содержит элемент a, входящий в K_i. По условиям теоремы отсюда вытекает, что $K_i T \subset K_i$, т. е., что $x_1 \in K_i$. Применяя последовательно указанные рассуждения к парам $x_1 \sim x_2, \ldots, x_n \sim b$, получим $b \in K_i$, что и требовалось.

Особый интерес представляют системы, в которых, подобно группам или кольцам каждая совокупность может являться смежным классом не более одной конгруэнтности. Для характеристики этих систем введем одно вспомогательное понятие. Пусть S — любая совокупность элементов алгебраической системы A. Для элементов a, b из A условимся писать $a \sim b\,(\mathrm{mod}.\,S)$, если или $a = b$, или $a, b \in S$, или $a = uT$, $b = vT$, где $u, v \in S$, а T — некоторая трансляция. Элементы a, b назовем сравнимыми $\mathrm{mod}.\,S$, если для некоторых $x_1, \ldots, x_n$ из A имеем: $a \sim x_1$, $x_1 \sim x_2, \ldots, x_n \sim b$ $(\mathrm{mod}.\,S)$. Легко видеть, что сравнение $\mathrm{mod}.\,S$ является конгруэнтностью на A.

Теорема 6. *Для того чтобы нормальный комплекс K был смежным классом лишь одной конгруэнтности, необходимо и достаточно, чтобы каждая пара элементов a, b из A, для которой при любой трансляции T утверждения $aT \in K$ и $bT \in K$ равносильны, была сравнимой* $\mathrm{mod}.\,K$.

Доказательство. Конгруэнтность $\mathrm{mod}.\,S$ — минимальная среди всех тех, для которых элементы S сравнимы друг с другом. Поэтому из условий теоремы следует, что K — смежный класс $\mathrm{mod}.\,K$. Пусть θ — какая-либо другая конгруэнтность, для которой K также является смежным классом, и пусть a, b — произвольные элементы, для которых $a \equiv b$ (θ), $a \not\equiv b$ $(\mathrm{mod}.\,K)$. Необходимость условий теоремы будет доказана, если для пары a, b утверждения $aT \in K$, $bT \in K$ окажутся равносильными для любой трансляции T. Но последнее очевидно, так как из $a \equiv b$ (θ) следует $aT \equiv bT$ (θ), и поскольку K — смежный класс для θ, то каждое из условий $aT \in K$, $bT \in K$ влечет за собой другое

Для доказательства достаточности предположим, что существует пара элементов a, b, не сравнимых $\mathrm{mod}.\,K$ и таких, что утверждения $aT \in K$, $bT \in K$ для них равносильны при любой трансляции T. Обозначим через σ сумму сравнений $\mathrm{mod}.\,K$ и $\mathrm{mod}.\,\{a, b\}$. Конгруэнтность σ отлична от сравнений $\mathrm{mod}.\,K$, так как $a \not\equiv b$ $(\mathrm{mod}.\,K)$, $a \equiv b$ (σ). Покажем, что K — не только смежный класс $\mathrm{mod}.\,K$, но и смежный класс для σ. Пусть $u \in K$, $u \equiv v$ $(\mathrm{mod}.\,\sigma)$. Согласно определению суммы эквивалентностей, последнее означает, что в A найдутся элементы $x_1, \ldots, x_{2n}$, связанные соотношениями

$$u \equiv x_1\ (\mathrm{mod}.\,K), \quad x_1 \equiv x_2\ (\mathrm{mod}.\,\{a, b\}),$$

$$x_2 \equiv x_3\ (\mathrm{mod}.\,K), \ \ldots, \ x_{2n-1} \equiv x_{2n}\ (\mathrm{mod}.\,\{a, b\}), x_{2n} \equiv v\ (\mathrm{mod}.\,K).$$

Из первого соотношения следует $x_1 \in K$. Второе соотношение означает, что в A имеются элементы $y_1, \ldots, y_m$, для которых

$$x_1 \sim y_1, \ y_1 \sim y_2, \ \ldots, \ y_m \sim x_2\ (\mathrm{mod}.\,\{a, b\}).$$

Таким образом, для некоторой трансляции T имеем: $x_1 = aT$, $y_1 = bT$ или $x_1 = bT$, $y_1 = aT$. Поскольку $x_1 \in K$ и, по условию, утверждения $aT \in K$, $bT \in K$ равносильны, то $y_1 \in K$. Продвигаясь далее аналогичным образом вдоль цепочки $x_1, y_1, \ldots, y_m, x_2$, получим: $x_2 \in K$. Следовательно, из $x_1 \in K$, $x_1 \equiv x_2 \pmod{\{a, b\}}$ следует $x_2 \in K$; далее будет следовать $x_3 \in K$ и т. д. Через конечное число шагов получим требуемое утверждение $v \in K$.

Назовем некоторую конгруэнтность правильной, если она однозначно определяется любым своим смежным классом. Наконец, будем говорить, что алгебраическая система A — правильная, если все конгруэнтности на ней правильны. Соединяя теоремы 6 и 5, легко сформулировать необходимые и достаточные условия правильности системы. Однако эти условия слишком громоздки и желательно вместо них иметь хотя бы только необходимые или только достаточные, но более конкретные условия. Грубо это можно сделать, например, следующим образом.

При нулевой конгруэнтности, т. е. конгруэнтности совпадающей с тождеством, каждый смежный класс состоит из одного элемента. Поэтому, если какая-либо ненулевая конгруэнтность имеет одноэлементный смежный класс, то она не может быть правильной. Согласно теореме 7, система A допускает ненулевую конгруэнтность с одноэлементным смежным классом c только в том случае, когда существуют отличные от c элементы a, b, для которых при любой трансляции T утверждения $aT = c$ и $bT = c$ равносильны. Таким образом, *для правильности алгебраической системы A необходимо, чтобы для любой тройки элементов a, b, c из A существовала трансляция T, для которой $aT = c$, $bT \neq c$ или $bT = c$, $aT \neq c$, в частности, необходимо, чтобы полугруппа трансляций была транзитивной.*

Несколько усиливая требования, можно получить достаточный признак. Именно, *если для каждой тройки различных элементов a, b, c алгебраической системы A существуют трансляции S, T, для которых $aST = a$, $bST = b$ и или $aS = c$, или $bS = c$, то все конгруэнтности на A правильны.*

Действительно, пусть K — некоторый смежный класс и a, b — пара элементов, для которых условия $aT \in K$, $bT \in K$ равносильны для любой трансляции T. Согласно теореме 7, нужно показать лишь, что $a \equiv b \pmod{K}$. По условию, для произвольного элемента $c \in K$ найдутся трансляции S, T, для которых $aST = a$, $bST = b$ и $aS = c$ или $bS = c$. Но если $aS \in K$, то $bS \in K$, $aS \equiv bS \pmod{K}$, откуда $aST \equiv bST \pmod{K}$, т. е. $a \equiv b \pmod{K}$.

Указанное достаточное условие выполняется тривиально, если группа обратимых трансляций транзитивна, так как в этом случае можно взять $T = S^{-1}$.

В приведенных выше формулировках говорится просто о трансляциях. Легко проверить, что утверждения останутся справедливыми, если в необходимых условиях под трансляциями понимать произвольные общие трансляции, а в достаточных под трансляциями понимать элементарные трансляции.

Допустим теперь, что указанный достаточный признак выполняется на каждой системе некоторого примитивного класса. Рассматривая свободную систему S этого класса со счетным числом порождающих $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$ и применяя признак к элементам a, b, c, мы, как и выше, придем к выводу, что на системе S существуют две кватернарные производные операции $xyzt$, $x\tau y\tau z\tau t$, связанные тождествами

$$\begin{gathered} xxyz = z \quad x\tau y\tau z\tau x = y, \\ (xy\,xz)\tau y\tau x\tau z = x. \end{gathered} \tag{6}$$

Называя алгебраическую систему с двумя кватернарными операциями, связанными тождествами (6), бикватернарной, мы видим, что *все бикватернарные системы являются правильными системами*.

Легко обнаружить, что *на бикватернарных системах все конгруэнтности перестановочны*.

Для этого полагаем

$$\Psi(x, y, z) = (xyxx)\tau z\tau x\tau x.$$

Из первых двух тождеств системы (6) следует:

$$\Psi(x, x, z) = (xxxx)\tau z\tau x\tau x = z,$$

а из третьего тождества вытекает:

$$\Psi(x, z, z) = (xz\,xx)\tau z\tau x\tau x = x,$$

что и требовалось.

Изложенное показывает что между перестановочностью конгруэнтностей и правильностью систем имеется связь. Однако эти свойства, во всяком случае, не равносильны. Например, рассмотрим систему с тремя элементами a, b, c и одной тернарной операцией xyz, где $xyz = e$, если x, y, z различны, и $xyy = yxy = yyx = x$ — в остальных случаях. Разбиение $\{e\}$, $\{a, b\}$ дает конгруэнтность, имеющую такой же одноэлементный смежный класс $\{e\}$, как и конгруэнтность, совпадающая с равенством, и в то же время конгруэнтности на этой системе перестановочны.

§ 3. Топологические алгебраические системы

Как обычно (см. П. С. Александров [1]), под топологическим пространством будет пониматься множество элементов с выделенной совокупностью подмножеств, называемых открытыми и обладающих свойствами:

а) пустое подмножество и само множество открыты;

б) объединение любой совокупности и пересечение конечной совокупности открытых множеств суть открытые множества.

Топологическое пространство, в котором выполняется аксиома отделимости T_i ($i = 0, 1, 2$), будет называться топологическим T_i-пространством.

Частичная операция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на топологическом пространстве A, называется непрерывной, если для каждой системы значений аргументов $x_1, \ldots, x_n$, для которой $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет смысл, для каждой окрестности V точки y существуют такие окрестности $U_1, \ldots, U_n$ точек $x_1, \ldots, x_n$, что для всех $x_i' \in U_i$ выражение $f(x_1', \ldots, x_n')$ имеет смысл и $f(x_1', \ldots, x_n') \in V$. В частности, обычная (всюду определенная) операция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется непрерывной, если для любой окрестности V точки $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ существуют такие окрестности $U_1, \ldots, U_n$ точек $x_1, \ldots, x_n$, что $f(U_1, \ldots, U_n) \subset V$.

Частичная алгебраическая система, основное множество элементов которой является топологическим пространством, а основные операции непрерывны, называется частичной топологической системой. Частичная топологическая система со всюду определенными основными операциями называется топологической алгебраической системой.

Отображение одной топологической алгебраической системы на другую будет называться непрерывным изоморфизмом, если оно непрерывно и является изоморфизмом в алгебраическом смысле. Аналогично определяются непрерывные гомоморфизмы и другие сходные понятия. Примитивным классом топологических алгебраических систем называется совокупность топологических алгебраических систем, составляющих примитивный класс в алгебраическом смысле.

Так как непрерывная функция от непрерывной функции является непрерывной функцией, то все многочленные операции будут непрерывными. Следовательно, все производные системы, принадлежащие данной топологической системе A, можно также рассматривать как топологические системы, определенные на пространстве A. Трансляции топологической системы являются непрерывными отображениями A в A, а обратимые трансляции представляют собою взаимно однозначные и взаимно непрерывные отображения A на A. В частности, если группа обратимых трансляций топологической системы транзитивна, то пространство системы топологически однородно. Например, топологически однородно пространство всякой топологической битернарной системы.

Более сильное требование транзитивности группы элементарных обратимых трансляций приводит к более интересному топологическому следствию, хорошо известному для топологических групп.

Теорема 7. *Если топологическая система A принадлежит примитивному классу, все системы которого содержат производные системы, элементарные трансляции которых образуют транзитивные группы, то пространство системы A регулярно.*

Доказательство. Пусть e — произвольный элемент системы A. Согласно теореме 2, среди производных операций A найдутся операции умножения и деления, относительно которых A будет квазигруппой с правой единицей e. Нужно доказать, что каждая окрестность U элемента e содержит окрестность e, замыкание которой содержится в U. Так как квазигрупповые операции непрерывны и $ee = e$, $e / e = e$, то найдется такая окрестность единицы V, для которой $VV \subset U$, $V/V \subset U$. Пусть $p \in \overline{V}$. Тогда pV — окрестность точки p, и потому найдется элемент v, принадлежащий пересечению pV и V. Таким образом, для некоторого $w \in V$ имеем $pw = v$, откуда $p = v / w$, $p \in V / V \subset U$, т. е. $\overline{V} \subset U$.

Говорят, что алгебраическая система A порождается элементами некоторой совокупности P, если каждый элемент A может быть получен конечной цепочкой основных операций, исходя из элементов P. Элемент e алгебраической системы A будет называться главным если он сам по себе образует подсистему этой системы, т. е. если $f_i(e, \ldots, e) = e$ для каждой основной операции f_i системы A.

Теорема 8. *Если топологическая система A обладает главным элементом e и порождается элементами некоторой связной окрестности U элемента e, то пространство A связно.*

Доказательство. Пусть $A = F_1 \cup F_2$ — какое-либо разложение заданной системы на непересекающиеся замкнутые множества. Предполагая, что $e \in F_1$, докажем, что F_2 пусто. В самом деле, пусть $a \in F_2$ и $a = f(u_1, \ldots, u_n)$ — выражение a в виде полинома от элементов $u_1, \ldots, u_n$ окрестности U. Поскольку U связна, то связно и декартово произведение $V = U^{(n)} = U \times U \times \ldots \times U$, причем операция $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ дает непрерывное отображение V в пространство A. Прообраз множества F_i в V обозначим через V_i $(i = 1, 2)$. Так как V_1, V_2 без общих точек и замкнуты, а V связно, то одно из них должно быть пусто, вопреки тому, что V_1 содержит $(e, \ldots, e)$, а V_2 содержит $(u_1, \ldots, u_n)$.

Теорема 9. *Связная лупа G алгебраически порождается элементами любой окрестности единицы.*

Доказательство. Обозначим через H подлупу, порожденную элементами какой-либо окрестности единицы U. Покажем, что H одновременно открыта и замкнута. Тогда множество $G \dot{-} H$ будет замкнуто, а из разложения $G = H \cup G \dot{-} H$ и связности G будет следовать, что $G \dot{-} H$ пусто, т. е. что $G = H$.

Итак, пусть $a \in H$. Тогда aU — окрестность a, входящая в H, т. е. H открыта. Предположим теперь, что a — предельная точка для H. Тогда aU будет содержать хотя бы одну точку h из H, т. е. для некоторого $u \in U$ будет $h = au$, откуда $a = h / u \in H$.

Сравнивая доказанную теорему с теоремой 2, приходим к следствию:

Если связная топологическая система A принадлежит примитивному классу, совокупности элементарных трансляций систем которого являются транзитивными группами, то A порождается элементами любого открытого множества U из A.

Действительно, для произвольного элемента e из U найдутся производные операции, относительно которых A будет лупой. По теореме 9 система A будет порождаться элементами U.

§ 4. Гомоморфизмы топологических систем

Отношение $\theta(x_1, \ldots, x_n)$, определенное на топологическом пространстве, условимся называть **непрерывным**, если для каждой последовательности элементов $x_1, \ldots, x_n$, не удовлетворяющей отношению θ, существует такая последовательность открытых множеств U_i, $x_i \in U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что для всех x_i' $(x_i' \in U_i;\ i = 1, 2, \ldots, n)$ отношение θ $(x_1', \ldots, x_n')$ не выполняется.

Для каждой эквивалентности θ, заданной на множестве M, и каждого его подмножества N θ-**пополнением** N называется совокупность элементов, эквивалентных хотя бы одному элементу из N. Эквивалентность θ, заданная на топологическом пространстве, называется **полной**, если θ-пополнения открытых множеств открыты.

Пусть M — топологическое пространство и θ — полная эквивалентность на нем. Обозначим через M/θ совокупность классов эквивалентных элементов, на которые разбивается M относительно θ. Называя образы открытых множеств из M при естественном отображении $M \to M/\theta$ открытыми множествами в M/θ, мы обратим M/θ также в топологическое пространство, причем отображение $M \to M/\theta$ будет непрерывным и открытым. Обратно, если задано какое-либо открыто-непрерывное отображение топологического пространства M на произвольное топологическое пространство M_1, то, называя точки M, имеющие одинаковые образы в M_1, эквивалентными, получим полную эквивалентность на M.

Таким образом, если не интересоваться выполнимостью в фактор-пространствах аксиом отделимости, то можно брать фактор-пространства по произвольным полным эквивалентностям. Дело меняется, как известно, если необходимо, чтобы в фактор-пространстве имела место та или иная аксиома отделимости. Для дальнейшего достаточен следующий признак:

Если θ — полная и непрерывная эквивалентность на топологическом пространстве M, то фактор-пространство M/θ удовлетворяет аксиоме T_2.

Обратно, *если дано открытое непрерывное отображение топологического пространства M на топологическое пространство N, удовлетворяющее аксиоме T_2, то соответствующая эквивалентность θ на M полно-непрерывна и естественное отображение $M/\theta \leftrightarrow N$ является гомеоморфизмом.*

Для полноты приведем доказательство последнего утверждения. Пусть p, q — неэквивалентные точки из M. Их образы в N различны и потому могут быть разделены непересекающимися окрестностями U_1, V_1. Прообразы U, V этих окрестностей содержат соответственно точки p, q, открыты в M и никакая точка U не эквивалентна никакой точке V. Следовательно, эквивалентность θ непрерывна. Гомеоморфность M/θ и N вытекает из того, что открытые множества обоих пространств являются образами открытых множеств из M.

Пусть теперь A — топологическая алгебраическая система и θ — полная конгруэнтность на ней. Тогда, определяя обычным образом на A/θ основные операции системы A и внося в A/θ указанным образом топологию, получим снова топологическую алгебраическую систему, причем естественное отображение $A \to A/\theta$ будет открытым и непрерывным гомоморфным отображением. Из сказанного видно также, что если $A \to B$ есть открытое непрерывное гомоморфное отображение топологической алгебраической системы на систему с аксиомой T_2, то соответствующая эквивалентность θ на A будет полной непрерывной конгруэнтностью, причем естественное отображение $A/\theta \to B$ будет топологическим изоморфизмом.

В дальнейшем все топологические системы предполагаются с аксиомой T_2.

Теорема 10. *Если на всех системах примитивного класса конгруэнтности перестановочны, то на топологических системах этого класса все конгруэнтности — полные.*

Доказательство. Согласно теореме 4, в рассматриваемом классе существует многочлен $\Psi(x, y, z)$, удовлетворяющий соотношениям $\Psi(x, x, z) = z$, $\Psi(x, z, z) = x$. Пусть θ — произвольная конгруэнтность, U — какое-либо открытое множество и U^* — его θ-замыкание. Нужно показать, что U^* — открытое. Если это неверно, то в U^* найдется точка a^*, любая окрестность которой содержит точку, не входящую в U^*. По условию, в U найдется точка a, конгруэнтная a^*. Так как $a = \Psi(a^*, a^*, a)$ и многочлен $\Psi(x, a^*, a)$ является непрерывной функцией от x, то существует окрестность V^* точки a^*, для которой $U \supset \Psi(V^*, a^*, a)$. В силу выбора a^*, в окрестности V^* существует точка v, не входящая в U^*. Но тогда $\Psi(v, a^*, a) \in U$ и в то же время из $a \equiv a^*$ следует

$$\Psi(v, a^*, a) \equiv \Psi(v, a, a) = v,$$

т. е. точка v принадлежит U^* в противоречие с выбором v.

В топологических T_1-пространствах из непрерывности эквивалентности θ следует замкнутость всех смежных классов по θ. При некоторых условиях справедливо и обратное.

Теорема 11. *Если на всех системах примитивного класса конгруэнтности перестановочны, то на топологических системах этого класса те и только те конгруэнтности непрерывны, у которых смежные классы замкнуты.*

Доказательство. Пусть $\Psi(x, y, z)$ — многочлен, удовлетворяющий тождествам $\Psi(x, x, z) = z$, $\Psi(x, z, z) = z$. Если $x \equiv y$ (θ), то при любом a имеем: $\Psi(a, x, y) \equiv \Psi(a, x, x)$, т. е. при любом a имеет место сравнение $\Psi(a, x, y) \equiv a$. Обратно, если для данных x, y при любом a имеем $\Psi(a, x, y) \equiv a$, то, подставляя x вместо a, получим $y = \Psi(x, x, y) \equiv x$. Пусть теперь $x \not\equiv y$. Тогда при подходящем a будем иметь: $\Psi(a, x, y) \not\equiv a$, т. е. точка $\Psi(a, x, y) = w$ не входит в смежный класс, содержащий a. Поскольку этот класс замкнут, то с ним не будет пересекаться некоторая окрестность W точки w. Из непрерывности $\Psi(a, x, y)$ вытекает существование окрестностей X, Y точек x, y, для которых $\Psi(a, X, Y) \subset W$. Следовательно, для любых $x' \in X$, $y' \in Y$ имеем: $\Psi(a, x', y') \neq a$, т. е. $x' \neq y'$, что и требовалось.

Изложенное показывает, что при помощи конгруэнтностей можно рассматривать лишь открытые непрерывные гомоморфизмы. Что касается просто непрерывных гомоморфизмов, то для топологических групп хорошо известен случай, когда любой непрерывный гомоморфизм является открытым (см. [4], стр. 77). Не меняя сущности доказательства, легко убедиться в справедливости этого и для произвольных битернарных систем.

Теорема 12. *Пусть G и G_1 — две локально компактные топологические битернарные системы, удовлетворяющие второй аксиоме счетности. Всякое непрерывное гомоморфное отображение G на G_1 является открытым.*

Доказательство. Следуя доказательству из [4], покажем сначала, что образ W_1 в G_1 произвольной области W из G содержит область. Выбираем такую область V, чтобы замыкание ее $\overline{V}$ было компактно и содержалось в W. Трансляции вида $xT_{ab} = xab$, $xS_{ab} = x\delta a\delta b$ взаимно обратны и потому являются гомеоморфными отображениями G на себя. Множество областей вида VT_{ab} покрывает все пространство и, в силу второй аксиомы счетности, из этого покрытия можно выбрать счетное $VT_1, VT_2, \ldots$, где T_i — подходящие трансляции. Обозначая образ $\overline{VT_i}$ в G_1 через F_i, видим, что F_i образуют счетное покрытие пространства G_1 замкнутыми множествами. По известному предложению отсюда следует, что хотя бы одно из множеств F_i содержит область. Если это множество есть F_α, то трансляция T_α^{-1} переведет $\overline{VT_\alpha}$ в $\overline{V}$, а F_α — в F, и мы получим, что образ $\overline{V}$ и, тем более, образ W содержит область.

Пусть теперь U — произвольная область в G, U_1 — ее образ в G_1 и p_1 — произвольная точка из U_1. Остается доказать, что найдется окрестность p_1, содержащаяся в U_1. Обозначим через p точку из U, переходящую в p_1. Так как $ppp = p \in U$ и операция xyz непрерывна, то найдется такая окрестность V точки p, что $VVV \subset U$. По доказанному образ V в G_1 содержит некоторую область W_1. Пусть q_1 — одна из точек W_1 и q — точка из V, отображающаяся в q_1. Образ Vqp содержит область $W_1 q_1 p_1$, а так как $Vqp \subset VVV \subset U$, то $W_1 q_1 p_1 \subset U_1$. Но $W_1 q_1 p_1$ содержит точку $q_1 q_1 p_1 = p_1$, что и требовалось.

Всякий гомоморфизм основных алгебраических систем является в то же время гомоморфизмом и для соответствующих производных систем. Поэтому, сравнивая только что доказанную теорему с теоремой 3, приходим к следствию:

Если полугруппа производных трансляций каждой алгебраической системы данного примитивного класса содержит транзитивную группу, то всякое непрерывное гомоморфное отображение одной локально компактной системы этого класса со второй аксиомой счетности на другую, удовлетворяющую тем же требованиям, является открытым.

В частности, открытым является всякое непрерывное гомоморфное отображение одной локально компактной квазигруппы со второй аксиомой счетности на другую с теми же свойствами.

§ 5. Накрывающие гомоморфизмы

Открыто-непрерывное отображение топологического пространства A на топологическое пространство A' называется накрывающим, если для каждой точки x из A существует такая окрестность $U \ni x$, что данное отображение является гомеоморфизмом, если рассматривать его только между U и ее образом в A'. Полная и непрерывная эквивалентность θ на топологическом пространстве A называется дискретной, если для каждой точки x из A существует окрестность, не содержащая ни одной пары различных эквивалентных точек. Отображение одного топологического пространства в другое тогда и только тогда накрывающее, когда соответствующая эквивалентность дискретна.

Топологическое регулярное T_2-пространство со второй аксиомой счетности называется линейно связным, если любые две его точки могут быть соединены непрерывным путем. Пространство называется локально линейно односвязным, если для каждой окрестности U его произвольной точки x существует такая окрестность $V \ni x$, что любые два пути с общими началом и концом, целиком лежащие в V, могут быть непрерывно деформированы друг в друга внутри окрестности U.

Теорема 13. *Для каждой линейно связной локально линейно односвязной топологической системы A с выделенным главным элементом e существует односвязная гомоморфно накрывающая система $\tilde{A}$ с выделенным главным элементом, переходящим в e. Эта односвязная накрывающая система определяется однозначно с точностью до топологического изоморфизма и принадлежит к тому же примитивному классу, что и заданная система.*

Доказательство. Рассматриваем всевозможные пути в A, выходящие из e, и идентифицируем эквивалентные пути, имеющие данный конец. В совокупность путей вносится обычным образом топология. Тем самым совокупность классов эквивалентных путей делается топологическим пространством $\tilde{A}$. Ставя каждому пути из $\tilde{A}$ в соответствие его конец, получают накрывающее отображение односвязного пространства $\tilde{A}$ на заданное пространство A. Пусть $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ — одна из основных операций в A и $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ — пути в A, представляющие элементы $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ из $\tilde{A}$. Тогда $f_i(a_1(t), \ldots, a_n(t)) = a(t)$ будет также путем в A и будет, следовательно, представлять некоторый элемент $\tilde{a}$ из $\tilde{A}$. Полагая по определению $f_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$, мы превратим $\tilde{A}$ в алгебраическую систему. Поскольку непрерывные деформации путей $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ вызывают непрерывную деформацию пути $a(t)$, то результат операции $f_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ не зависит от выбора путей, представляющих элементы $\tilde{a}_1 \ldots, \tilde{a}_n$, и потому операции f_i в системе $\tilde{A}$ будут однозначными. Легко видеть, что они будут и непрерывны. Естественное отображение $\tilde{A}$ на A будет алгебраическим гомоморфизмом, так как концом пути $a(t)$ является элемент $f_i(a_1, \ldots, a_n)$. Покажем, что если некоторое тождество $F(x_1, \ldots, x_m) = H(x_1, \ldots, x_m)$, где F и H — полиномы от $x_1, \ldots, x_m$, имеет место в A, то оно имеет место и в $\tilde{A}$. Для этого берем в $\tilde{A}$ произвольные элементы $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m$ и выбираем представляющие их пути $a_1(t), \ldots, a_m(t)$ в A. Выражения $F(a_1(t), \ldots, a_m(t))$ и $H(a_1(t), \ldots, a_m(t))$ будут путями, представляющими $F(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$ и $H(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$ в A. Так как для каждого значения t в системе A имеем $F = H$, то пути $F(t)$ и $H(t)$ совпадают, т. е. $F(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) = H(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$.

Пусть теперь $A' \to A$ — накрывающее гомоморфное отображение некоторой линейно односвязной системы A' на данную систему A, при котором в главный элемент e системы A отображается главный элемент e' системы A'. Как известно, для каждого пути $a(t)$ в системе A, выходящего из e, существует в системе A' единственный путь $a'(t)$, образом которого в A является путь $a(t)$. Ставя в соответствие элементу $a'(t)$ тот элемент $\tilde{A}$, который представляется путем $a(t)$, получим взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение A' на $\tilde{A}$. Остается доказать, что это соответствие является алгебраическим изоморфизмом между A' и $\tilde{A}$. Пусть $a' = f_i(a_1', \ldots, a_n')$, где $a_1', \ldots, a_n'$ — произвольные элементы системы A'. Соединяя e' путями $a_1'(t), \ldots, a_n'(t)$ с указанными элементами, получим путь $a'(t) = f_i(a_1'(t), \ldots, a_n'(t))$, соединяющий e' с a'. Обозначим через $a(t)$, $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ соответственно образы элементов $a'(t), a_1'(t), \ldots, a_n'(t)$ в системе A. Так как рассматриваемое отображение гомоморфно, то $a(t) = f_i(a_1(t), \ldots, a_n(t))$. Но пути $a(t)$, $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ представляют в A элементы $\tilde{a}, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ системы $\tilde{A}$, отвечающие элементам $a', a_1', \ldots, a_n'$. Соотношение $a(t) = f_i(a_1(t), \ldots, a_n(t))$ означает что $\tilde{a} = f_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$. Следовательно, отображение A' на $\tilde{A}$ гомоморфно, а так как оно взаимно однозначно, то и изоморфно.

Множество точек топологического пространства называется **дискретным**, если каждая точка этого множества обладает окрестностью, не содержащей других точек множества.

В битернарных системах, а следовательно, и во всех системах, содержащих битернарные, для дискретности некоторой конгруэнтности θ необходимо и достаточно, чтобы был дискретным хотя бы один смежный класс, а потому и все смежные классы по θ.

Необходимость условия очевидным образом выполняется во всех системах, а не только в битернарных. Пусть, наоборот, все смежные классы по конгруэнтности θ на битернарной системе дискретны. Тогда для каждой точки a найдется окрестность U, не содержащая ни одной отличной от a и эквивалентной ей точки. Поскольку основная тернарная операция xyz непрерывна и $aaa = a$, то найдется такая окрестность V точки a, что $V \subset U$ и $VVa \subset U$. Пусть теперь x, y — эквивалентные точки, лежащие в V. Из $x \equiv y \ (\theta)$ вытекает $xya \equiv xxa = a$. Так как $xya \in U$, то по условию $xya = a$, откуда $x = y$.

В алгебраических системах с выделенным главным элементом e совокупность всех элементов, сравнимых с e по какой-либо конгруэнтности θ, называется нормальным делителем, отвечающим θ. Пусть система A имеет операцию умножения. Элемент a называется ассоциирующим с элементами A, если $ax \cdot y = a \cdot xy$, $xa \cdot y = x \cdot ay$, $xy \cdot a = x \cdot ya$ для всех x, y из A. Элемент a коммутирует с элементами A, если $ax = xa$ для $x \in A$. Коммутирующие и ассоциирующие с A элементы называются центральными.

Теорема 14. *Все дискретные нормальные делители связной лупы лежат в ее центре.*

Доказательство. Пусть θ — дискретная конгруэнтность на связной лупе G и N — соответствующий нормальный делитель. Для любых $x \in G$, $a \in N$ имеем:

$$a \equiv e, \quad e / x \cdot ax \equiv e, \quad e / x \cdot xa \equiv e \quad (\theta),$$

т. е. $e / x \cdot ax \in N$, $e / x \cdot xa \in N$. Соответствия $x \to e / x \cdot ax$, $x \to e / x \cdot xa$ представляют собою непрерывные отображения связного пространства G в дискретное множество N и потому отображают G на один элемент, откуда

$$e / x \cdot ax = e / e \cdot ae = a, \quad e / x \cdot xa = e / e \cdot ea = a$$

и, следовательно, $ax = xa$.

Аналогично, для любых x, y из G и любого $a \in N$ имеем:

$$e / (xy) \cdot (xa) y \equiv e, \quad e / (xy) \cdot x (ay) \equiv e \ (\theta).$$

Принимая во внимание связность G и непрерывность отображений

$$(x, y) \to e / (xy) \cdot (xa) y, \quad (x, y) \to e / xy \cdot x (ay),$$

снова заключаем, что эти отображения являются отображениями на одну точку, т. е. для всех x, y имеем:

$$e / (xy) \cdot (xa) y = a, \quad e / (xy) \cdot x (ay) = a,$$

откуда $(xa) y = x (ay)$.

Теорема 15. *Фундаментальная группа линейно связной топологической системы A, имеющей бинарную операцию с нейтральным элементом, коммутативна.*

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы Хопфа о гомотопических группах пространств с непрерывной операцией. Мы укажем здесь ее краткое непосредственное доказательство.

Пусть заданная операция есть сложение и 0 — нейтральный элемент, так что $0 + x = x + 0 = x$. Рассмотрим замкнутые пути $a(t)$, $b(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в A, выходящие из 0. Сумма $c(t) = a(t) + b(t)$ будет снова замкнутым путем в A, выходящим из 0. Произведением путей $a(t)$, $b(t)$ в фундаментальной группе называется путь, получающийся в результате прохождения сначала пути $a(t)$ и затем $b(t)$. Покажем, что $c(t) \sim ab \sim ba$. Для этого вводим функции x, y от параметров t, τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, полагая

$$x = 2t, \quad y = 0 \qquad (2t - \tau < 0),$$
$$x = (\tau + 2t - 2t\tau) / (2 - \tau), \quad y = (2t - \tau) / (2 - \tau) \qquad (2t - \tau \geqslant 0).$$

Отображение $(t, \tau) \to a(x) + b(y)$ является непрерывным отображением квадрата $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ в пространство A, причем для каждого фиксированного τ сумма $a(x) + b(y)$, рассматриваемая как функция от t, дает замкнутый путь, выходящий из 0. При $\tau = 0$ получаем путь $c(t)$, а при $\tau = 1$ имеем путь ab, т. е. $c \sim ab$. Рассматривая аналогичным образом отображение $(t, \tau) \to a(y) + b(x)$, получим, что $c \sim ba$.

Следствие. *Фундаментальные группы линейно связных систем, принадлежащих примитивным классам с перестановочными конгруэнтностями, являются абелевыми.*

Действительно, на таких системах существует многочлен $\Psi(x, y, z)$, удовлетворяющий тождествам $\Psi(x, z, z) = x$, $\Psi(x, x, z) = z$. Беря произвольный элемент e системы и вводя операцию умножения формулой $xy = \Psi(x, e, y)$, видим, что $ey = y$, $xe = x$, т. е. что e — нейтральный элемент для этой операции. В силу теоремы 15, отсюда следует коммутативность фундаментальной группы.

Последнее рассуждение показывает, что на системах примитивного класса с перестановочными конгруэнтностями для каждого элемента e существует производная бинарная операция, для которой e является нейтральным элементом. Обратное утверждение, как легко видеть, также справедливо, что дает еще одну характеристику примитивных классов с перестановочными конгруэнтностями.

(Поступило в редакцию 20/XI 1953 г.)

Литература

1. П. С. Александров, Комбинаторная топология, М. — Л., 1947.
2. Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, Москва, 1952.
3. А. И. Мальцев, Об одном классе алгебраических систем, Успехи матем. наук, т. **VIII**, вып. **1 (53)** (1953), 165—171.
4. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М. — Л., 1938.
5. Е. С. Ляпин, Нормальные комплексы ассоциативных систем, Изв. АН СССР, серия матем., т. **14**, № **2** (1950), 179—192.
6. T. Evans, On multiplicative systems defined by generators and relations, Proc. Cambridge Phil. Soc., **47** (1951), 637—649.
7. H. A. Thurston, Equivalences and mappings, Proc. London Math. Soc. (3), **2**, № **6** (1952), 175—182.