

Вопросы к коллоквиуму по курсу «Линейная алгебра и геометрия»

2-й семестр 2012/13 уч. г., лектор — профессор В. В. Филиппов

1. Векторные пространства. Простейшие следствия аксиом. Примеры. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов. Основные свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.
2. Базис. Координаты. Примеры. Переход к новому базису. Лемма о линейной зависимости системы из $n + 1$ вектора в пространстве \mathbb{R}^n . Размерность.
3. Подпространства. Их пересечения, объединения, суммы. Связь размерностей суммы и пересечения. Прямая сумма.
4. Линейная оболочка. Ранг системы векторов и размерность линейной оболочки. Сохранение ранга системы векторов при элементарных преобразованиях. Теорема Кронекера–Капелли.
5. Переход к новой системе координат и параметрические уравнения подпространства. Ориентация.
6. Линейные отображения. Изоморфизмы, эпиморфизмы, мономорфизмы. Изоморфность линейных пространств.
7. Матрица линейного отображения. Пространство линейных отображений. Изоморфность пространства линейных отображений и соответствующего пространства матриц.
8. Леммы о поведении линейной зависимости и линейной независимости системы векторов при линейном отображении. Связь ранга матрицы отображения и размерности образа. Связь размерностей образа и ядра. Ранг произведения матриц.
9. Линейные функционалы. Примеры. Пространство линейных функционалов. Его размерность. Второе сопряжённое пространство.
10. Связь линейных отображений и билинейных функций. Сопряжённость линейных пространств. Взаимные базисы.
11. Переход к новому взаимному базису.
12. Аннулятор. Нулевое подпространство. Связи между ними. Оценки размерностей. Пространство решений однородной линейной системы. Связь ранга системы с размерностью пространства решений. Представление произвольного подпространства в виде пространства решений однородной линейной системы.
13. Аффинное пространство. Аффинная система координат. Размерность. Примеры. Плоскости. Аффинные оболочки. Переход к новой аффинной системе координат и параметрические уравнения плоскостей.
14. Взаимное расположение плоскостей. Плоскости как пространства решений линейных систем. Условие параллельности вектора и плоскости.
15. Гиперплоскости. Положительное и отрицательное полупространства. Выпуклость. Выпуклая оболочка. Симплекс. Барцентрические координаты.
16. Тензорное произведение двух линейных пространств. Пространство билинейных функций как тензорное произведение сопряжённых пространств. Базис в тензорном произведении двух линейных пространств.
17. $L_1 \otimes L_2$ и $L_1^* \otimes L_2^*$ как сопряжённые пространства. Свёртка.
18. Билинейные функции и формы. Матрицы билинейных функций и линейных отображений и координаты тензоров.
19. Нулевые пространства билинейных функций и ядра линейных отображений.
20. Линейные операторы. Примеры. Связь операторов и матриц. Изменение матрицы оператора при переходе к новому базису. Обратимость оператора.
21. Инвариантные подпространства. Вид матрицы оператора, когда часть векторов базиса образует базис в инвариантном подпространстве. Характеристический многочлен. Вид характеристического многочлена, когда часть векторов базиса образует базис в инвариантном подпространстве.
22. Одномерные инвариантные подпространства и собственные векторы. Пространство собственных векторов, отвечающих собственному значению λ .
23. Характеристический многочлен и его инвариантность. Инвариантность ранга матрицы $A - \lambda E$. Корни характеристического многочлена и собственные значения. Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств.
24. Разложение характеристического многочлена, соответствующее разложению пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Критерий диагонализруемости матрицы оператора.