Задачи к лекции 9

В задачах к этой лекции A — произвольное индексное множество.

1. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства.

а) Покажите, что если $Y \subset \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ плотно в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, то проекция $\pi_\alpha(Y)$ множества Y на сомножитель X_α плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$.

б) Приведите пример произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и множества $Y \subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$, однако Y не плотно в X.

2. а) Приведите пример топологического произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и замкнутого множества $Y \subset X$, для которых проекции $\pi_\alpha(Y)$ не замкнуты в X_α.

б) Приведите пример топологического произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и незамкнутого множества $Y \subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ замкнута в X_α для каждого $\alpha \in A$.

3. Докажите, что топологическое произведение непустых T_1-пространств удовлетворяет первой аксиоме счётности (удовлетворяет второй аксиоме счётности, метризуемо) тогда и только тогда, когда все сомножители обладают тем же свойством и все, кроме не более чем счётного числа, одноточечны.

4. Топологическое свойство называется *счётно* (*конечно, κ-*) *мультипликативным*, если произведение любого счётного (конечного, мощности κ) семейства пространств с этим свойством тоже им обладает.

Докажите счётную мультипликативность сепарабельности.

5. Докажите, что канторово множество[1)] $C \subset \mathbb{R}$ гомеоморфно тихоновской степени $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ дискретного пространства $\{0,1\}$.

6. Докажите, что всякое T_0-пространство X, обладающее счётной базой из открыто-замкнутых множеств, гомеоморфно вкладывается в канторово множество[1)] $C \subset \mathbb{R}$ (и, следовательно, метризуемо).

7. Докажите, что любое счётное метризуемое пространство вкладывается в пространство $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел.

8. Докажите, что пространство $\mathbf{P}$ иррациональных чисел гомеоморфно топологическому произведению $\mathbb{N}^{\aleph_0}$.

9. Докажите, что топологическое произведение $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ не нормально.

10. Докажите, что если X — хаусдорфово пространство и $\mathscr{Y}$ — семейство его подпространств, то пространство $\bigcap\{Y : Y \in \mathscr{Y}\} \subset X$ с топологией, индуцированной из X, гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $\prod\{Y : Y \in \mathscr{Y}\}$.

11. Пусть κ — любой бесконечный кардинал. Докажите, что счётная степень метрического ежа $J(\kappa)$ колючести κ с тихоновской топологией универсальна для всех метризуемых пространств веса κ, т.е. любое метризуемое пространство веса κ гомеоморфно подпространству пространства $J(\kappa)^{\aleph_0}$.

[1)] *Канторово множество* — подмножество отрезка $[0,1]$, которое строится по индукции так: на первом шаге индуктивного построения имеется один отрезок $[0,1]$, и из него удаляется средняя треть без концов (интервал $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$), так что остаются два отрезка; на каждом следующем шаге из всех имеющихся на этом шаге отрезков удаляются средние трети без концов. Канторово множество получается после счётного числа шагов.