Задачи к лекции 8

1. а) Покажите, что если композиция $g \circ f$ непрерывных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ факторна, то отображение g факторно. Обязано ли отображение f быть факторным?

б) Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — факторное отображение, $g\colon Y \to Z$ — произвольное отображение и композиция $g \circ f$ непрерывна, то отображение g тоже непрерывно.

2. Верно ли, что если $f\colon X \to Y$ факторно и $Z \subset X$, то подотображение $Z \to f(Z)$ отображения f факторно? Что, если $Z = f^{-1}(S)$ для некоторого открытого множества $S \subset Y$? для некоторого замкнутого множества $S \subset Y$?

3. Пусть $f\colon X \to Y$ — факторное отображение и $\mathrm{id}\colon Z \to Z$ — тождественное отображение. Верно ли, что декартово произведение $f \times \mathrm{id}\colon X \times Z \to Y \times Z$ всегда факторно?

4. Приведите пример факторного, но не открытого и не замкнутого отображения.

5. Проективную плоскость $\mathbb{P}^2$ можно определить как множество всех проходящих через точку $(0, 0, 0)$ прямых в $\mathbb{R}^3$, а расстояние между двумя такими прямыми можно положить равным углу между ними. Докажите, что это пространство гомеоморфно квадрату, обе пары противоположных сторон которого склеены с перекручиванием, и диску, к которому вдоль границы приклеен лист Мёбиуса.