Задачи к лекции 6

1. Покажите, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам отделимости T_0 и T_3, регулярно. Верно ли, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_4, нормально?

2. Докажите, что любое пространство с топологией линейного порядка наследственно нормально (т.е. все его подпространства нормальны).

3. Пусть $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией, и пусть $W_0 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega\}$ — множество всех конечных ординалов вместе с первым бесконечным, тоже с порядковой топологией (т.е. сходящаяся последовательность вместе с её пределом ω). Пространство $W_1 \times W_0$ с топологией произведения называется *плоскостью Тихонова*. Докажите, что

а) пространство $W_1 \times W_0$ нормально;
б) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ не нормально;
в) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ не содержит несчётных замкнутых дискретных подпространств.

4. а) Покажите, что всякое регулярное пространство со счётной базой нормально. Всякое ли хаусдорфово пространство со счётной базой нормально?
б) Покажите, что всякое счётное регулярное пространство нормально. Всякое ли счётное хаусдорфово пространство нормально?

5. Пусть X — произвольное пространство, Z — регулярное пространство, Y — плотное подпространство X и $f\colon Y \to Z$ — непрерывное отображение. Докажите, что отображение f продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$ тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного отображения $Y \cup \{x\} \to Z$ для каждой точки $x \in X \setminus Y$.

6. а) Приведите пример двух разных функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сужения которых на всюду плотное в $\mathbb{R}$ множество $\mathbf{P}$ иррациональных чисел непрерывны и совпадают.
б) Приведите пример двух разных функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые в каждой точке всюду плотного в $\mathbb{R}$ множества $\mathbf{P}$ непрерывны и совпадают.

7. Докажите, что

а) $|X| \leqslant 2^{w(X)}$ для любого T_1-пространства X;
б) $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$ для любого хаусдорфова пространства X;
в) $w(X) \leqslant 2^{d(X)}$ для любого T_3-пространства X.

8. Множество A в топологическом пространстве X называется *функционально замкнутым* или *нуль-множеством*, если $A = f^{-1}(\{0\})$ для некоторой непрерывной функции. Множество $A \subset X$ *функционально открыто*, или является *конуль-множеством*, если $A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ для некоторой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$.

а) Докажите, что во вполне регулярном пространстве X точка x имеет тип G_δ (т.е. является пересечением не более чем счётного числа открытых множеств) тогда и только тогда, когда одноточечное множество $\{x\}$ функционально замкнуто.
б) Приведите пример вполне регулярного пространства, в котором не все точки имеют тип G_δ.

9. а) Докажите, что в нормальном пространстве X замкнутое множество F имеет тип G_δ (т.е. является пересечением не более чем счётного числа открытых множеств) тогда и только тогда, когда F функционально замкнуто (см. предыдущую задачу).
б) T_1-пространство, в котором все замкнутые множества функционально замкнуты, называется *совершенно нормальным*. Покажите, что пространство совершенно нормально тогда и только тогда, когда оно нормально и все замкнутые множества в нём имеют тип G_δ.
в) Докажите, что любое совершенно нормальное пространство наследственно совершенно нормально (т.е. все его подпространства совершено нормальны).
г) Приведите пример нормального не совершенно нормального пространства.
д) Покажите, что в ненормальном пространстве замкнутые G_δ-множества не обязаны быть функционально замкнутыми, даже если это пространство вполне регулярно.

10. Заметьте, что любое замкнутое подпространство нормального пространства нормально. Докажите, что топологическое пространство наследственно нормально (т.е. все его подпространства нормальны) тогда и только тогда, когда все его открытые подпространства нормальны.

11. а) Докажите, что всякое метризуемое пространство совершенно нормально (см. предыдущую задачу).
б) Выведите из пункта а), что множество A функционально открыто (замкнуто) в пространстве X тогда и только тогда, когда существуют непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ и открытое (замкнутое) множество $Y \subset \mathbb{R}$, для которых $A = f^{-1}(Y)$.

12. Покажите, что прямая Зоргенфрея S (это обычная прямая с топологией, базу которой образуют полуоткрытые справа интервалы) совершенно нормальна (однако её квадрат $S \times S$ с топологией произведения не нормален).