

Задачи к лекции 5

1. Покажите, что непрерывность отображения $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств равносильна существованию предбазы топологии пространства Y с тем свойством, что прообраз любого элемента этой предбазы открыт.
2. Отображение $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ метрических пространств называется *липшицевым*, если существует такое число L (константа Липшица отображения f), что $\rho(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$. Покажите, что всякое липшицево отображение метрических пространств непрерывно.
3. Приведите пример отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которое непрерывно ровно в одной точке.
4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *открытым* (*замкнутым*), если при этом отображении образ всякого открытого множества открыт (замкнут).
 - а) Заметьте, что отображение $f: X \rightarrow Y$ открыто тогда и только тогда, когда в пространстве X существует база, образ каждого элемента которой открыт в Y .
 - б) Покажите, что образ любой (не обязательно открытой) окрестности точки x топологического пространства X при открытом отображении $f: X \rightarrow Y$ является окрестностью точки $f(x)$ в пространстве Y .
5. Приведите пример топологических пространств X и Y и непрерывной сюръекции $f: X \rightarrow Y$, которая
 - а) не является ни открытым, ни замкнутым отображением;
 - б) является открытым, но не является замкнутым отображением;
 - в) является замкнутым, но не является открытым отображением;
 - г) является замкнутым и взаимно однозначным, но не открытым отображением;
 - д) является открытым и замкнутым отображением, но не является гомеоморфизмом.
6. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Покажите, что связность сохраняется непрерывными отображениями, т.е. непрерывный образ любого связного пространства связан.
7. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и непрерывно, причём обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ тоже непрерывно.
 - а) Покажите, что биекция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда она монотонна (т.е. либо всюду возрастает, либо всюду убывает). Верно ли это для произвольного линейно упорядоченного пространства с порядковой топологией?
 - б) Покажите, что всякое непрерывное взаимно однозначное отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на себя является гомеоморфизмом. Верно ли это для произвольного топологического пространства?
8. Покажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств
 - а) непрерывно и замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{f(A)}^Y = f(\overline{A}^X)$ для любого множества $A \subset X$;
 - б) непрерывно и открыто тогда и только тогда, когда $\overline{f^{-1}(B)}^X = f^{-1}(\overline{B}^Y)$ для любого $B \subset Y$.
9. Покажите, что метрика $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ на топологическом пространстве $(X, \mathcal{T})$ непрерывна относительно топологии произведения на $X \times X$ тогда и только тогда, когда порождаемая ею метрическая топология $\mathcal{T}_d$ слабее (нестрого) топологии $\mathcal{T}$. В частности, на метризуемом пространстве непрерывна всякая метрика, порождающая его топологию.

В задачах 10–12 используются следующие обозначения:

- $\mathbb{R}^n$ — n -мерное *евклидово пространство* с евклидовой топологией (порождённой обычной евклидовой метрикой);
- $D_r^n(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\} \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерный *открытый диск* (то же, что *шар*) радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$;
- $\overline{D}_r^n(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерный *замкнутый диск* (*шар*) радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$;
- $S_r^n(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : d_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — n -мерная *сфера* радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0$;
- $D^n = D_1^n(\mathbf{0})$, $\overline{D}^n = \overline{D}_1^n(\mathbf{0})$, $S^{n-1} = S_1^{n-1}(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$;
- $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ раз}} \subset \mathbb{R}^{2n}$ — n -мерный *тор*.

Подразумевается, что все перечисленные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ снабжены индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией.

10. Ниже перечислены наборы топологических пространств (их обозначения можно найти в конце вводной главы). Покажите, что пространства из каждого набора гомеоморфны друг другу, а пространства из разных наборов — нет:

- а) любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$, диск $\overline{D}^1$ и любой диск $\overline{D}_r^1(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$;

- б) любые полуоткрытые интервалы $[a, b)$ и $(a, b]$, где $a, b, \in \mathbb{R}$, $a < b$, и замкнутые лучи $(-\infty, c]$ и $[c, \infty)$, где $c \in \mathbb{R}$;
- в) любой открытый интервал (a, b) , где $a < b$, любые открытые лучи $(-\infty, c)$ и (c, ∞) , прямая $\mathbb{R}$, окружность без точки $S^1 \setminus \{s\}$, где $s \in S^1$, любая дуга $\smile AB \subset S^1$ без концов (где $A, B \in S^1$, $A \neq B$), диск D^1 и любой диск $D_r^1(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$;
- г) открытое полупространство $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$, сфера S^n без точки, n -мерный сферический сегмент без границы (т.е. пересечение сферы S^n с произвольным открытым полупространством при условии, что пересечения S^n с самим этим полупространством и с его дополнением непусты; сферический сегмент без границы можно представлять себе как усечённую сферу или как сферу, из которой вырезали кружок вместе с границей), пространство $\mathbb{R}^n$, диск D^n и любой диск $D_r^n(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для произвольного $n \geq 2$;
- д) замкнутый диск $\bar{D}^{2k}$, произведение обычных плоских дисков $\underbrace{\bar{D}^2 \times \dots \times \bar{D}^2}_{k \text{ раз}}$, $2k$ -мерный куб $[-1, 1]^{2k}$ и $2k$ -мерный сферический сегмент с границей для $k \geq 1$.
- 11.** Докажите, что тор T^2 гомеоморфен «бублику» — поверхности в $\mathbb{R}^3$, получаемой вращением окружности S^1 вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей её.
- 12.** а) Вложите $\bar{D}^2 \times S^1$, $\bar{D}^1 \times T^2$ и $\bar{D}^1 \times S^2$ в $\mathbb{R}^3$.
 б) Докажите, что тор T^n вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$ для любого натурального n .
- 13.** Вещественная прямая с топологией, порождённой базой $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, называется *прямой Зоргенфрея* и обычно обозначается S . Подпространство $[0, 1) \subset S$ прямой Зоргенфрея называется *стрелкой Зоргенфрея*.
 Докажите, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна стрелке Зоргенфрея.
- 14.** Придумайте два негомеоморфных пространства X и Y , для которых существуют непрерывные биекции $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$.
- 15.** Докажите, что для любых двух счётных всюду плотных подмножеств A и B вещественной прямой $\mathbb{R}$ существует гомеоморфизм $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию $f(A) = B$.