

Вопросы к экзамену

1. Метрическое пространство (определение и простейшие примеры). Топологическое пространство (определение и простейшие примеры). Система окрестностей точки в топологическом пространстве, связь топологии с системой окрестностей. База и предбаза топологии, локальная база, первая и вторая аксиомы счётности. Критерий того, что семейство подмножеств множества является базой некоторой топологии на этом множестве.
2. Топология метрического пространства. Доказательство того, что всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности. Примеры метрических пространств без второй аксиомы счётности. Ультramетрика. Пример ультramетрического пространства (не обязательно p -адические числа). Метризуемое топологическое пространство.
3. Примеры топологических пространств. Топология, порождённая линейным порядком. Сравнение топологий.
4. Типы точек в топологическом пространстве по отношению к подмножеству этого топологического пространства: точки прикосновения, предельные точки, точки накопления, изолированные и внутренние точки. Замечание: если X — топологическое пространство, $x \in X$ и все точки множества $Y = X \setminus \{x\}$ изолированы в X , то семейство $\{U \cap Y : U \text{ — окрестность точки } x\}$ есть фильтр на Y , и, наоборот, любой фильтр на Y является семейством проколотых окрестностей точки x в некоторой топологии на X , относительно которой все точки Y изолированы. Замыкание и внутренность множества. Оператор замыкания, оператор топологического замыкания. Задание топологии с помощью оператора замыкания. Оператор внутренности.
5. Аксиомы отделимости. Примеры, различающие классы T_0 -, T_1 -, T_2 -, T_3 - и T_4 -пространств. Хаусдорфовость метризуемых пространств.
6. Последовательность, подпоследовательность. Сходимость последовательности. Предел последовательности, точка накопления последовательности. Пространство Фреше–Урысона. Доказательство того, что всякое пространство с первой аксиомой счётности (и всякое метризуемое пространство) является пространством Фреше–Урысона. Пример пространства Фреше–Урысона без первой аксиомы счётности.
7. Направленное множество. Направленность, поднаправленность. Сходимость направленности. Предел направленности, предельная точка направленности. Доказательство того, что точка u в топологическом пространстве X является точкой накопления множества $Y \subset X$ тогда и только тогда, когда некоторая направленность в Y сходится к u .
8. Подпространство топологического пространства. Индуцированная топология. Примеры. База индуцированной топологии. Замыкание множества в подпространстве, его связь с замыканием этого множества в объёмлющем пространстве. Наследственные свойства топологических пространств (определение). Наследственность первой и второй аксиом счётности и аксиом отделимости T_0 – T_3 . Наследование нормальности замкнутыми подпространствами нормального пространства. Наследственность метризуемости.
9. Всюду плотное подмножество топологического пространства. Сепарабельность топологического пространства. Доказательство того, что всякое сепарабельное метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности. Сепарабельность любого пространства со второй аксиомой счётности. Наследование сепарабельности открытыми подпространствами сепарабельного пространства.
10. Непрерывные отображения метрических и топологических пространств. Непрерывность отображения в точке. Равносильные непрерывности свойства отображений топологических пространств. Непрерывность расстояния от точки до множества. Нормальность метризуемого пространства.
11. Лемма Урысона.
12. Теорема Титце–Урысона о продолжении непрерывных функций в $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$, определённых на нормальном пространстве.
13. Доказательство теоремы: если Y — всюду плотное подмножество топологического пространства X , Z — хаусдорфово пространство и $f, g : X \rightarrow Z$ — непрерывные отображения, совпадающие на Y , то f и g совпадают на X . Плоскость Немыцкого, её ненормальность.
14. Вполне регулярное, или тихоновское, топологическое пространство. Доказательство того, что плоскость Немыцкого вполне регулярна. Гомеоморфизмы, топологические свойства (определение). Гомеоморфное вложение (определение).
15. Покрытие топологического пространства, открытое покрытие, подпокрытие (определения). Компактное топологическое пространство, компакт (определение). Характеристика компактности в терминах централизованных семейств замкнутых множеств. Доказательство свойств компактных пространств: компактное подмножество любого хаусдорфова пространства замкнуто; любое замкнутое подмножество компактного пространства компактно; непрерывный образ любого компактного пространства компактен; любая непрерывная биекция из компакта в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом; любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена; любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет предельную точку.

16. Доказательство нормальности всякого компакта.

17. Теорема Бэра о категориях.

18. Произведение множеств. Координаты элементов произведения, проекции. Тихоновская топология, или топология произведения, на произведении топологических пространств. Топология поточечной сходимости на пространстве отображений. Каноническая база тихоновской топологии. Совпадение индуцированной топологии произведения подпространств с топологией произведения этих подпространств. Замкнутость произведения замкнутых подмножеств. Доказательство того, что произведение всюду плотных подмножеств топологических пространств всюду плотно в произведении этих пространств.

19. Доказательство того, что произведение пространств удовлетворяет какой-нибудь из аксиом отделимости T_0 – $T_{3\frac{1}{2}}$ тогда и только тогда, когда все сомножители удовлетворяют этой аксиоме. Доказательство того, что если тихоновское произведение пространств нормально, то и все сомножители нормальны. Доказательство того, что нормальность не мультипликативна и даже не конечно мультипликативна.

20-ТМ. Свойство Суслина топологических пространств. Доказательство того, что метризуемое пространство со свойством Суслина удовлетворяет второй аксиоме счетности. Проблема Суслина, прямая Суслина и дерево Суслина (без доказательств).

21-ТМ. Лемма о Δ -системе. Доказательство того, что если A — любое индексное множество и топологические пространства X_α , $\alpha \in A$, таковы, что для любого конечного $F \subset A$ произведение $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ обладает свойством Суслина, то и всё произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ обладает этим свойством.

22-ТМ. Аксиома Мартина. Доказательство того, что в предположении $\text{МА} + \neg\text{СН}$ любое произведение пространств со свойством Суслина обладает свойством Суслина. Доказательство того, что квадрат прямой Суслина не обладает свойством Суслина.

23. Критерий непрерывности отображения топологического пространства в тихоновское произведение. Декартово и диагональное произведение отображений. Семейство отображений, разделяющее точки. Семейство отображений, разделяющее точки и замкнутые множества. Теорема о том, что если семейство отображений разделяет точки, то диагональное отображение инъективно, и если семейство отображений разделяет точки и замкнутые множества, то диагональное отображение является гомеоморфным вложением.

24. Теорема о вложении тихоновского пространства в тихоновский куб. Метризациянная теорема Урысона (о метризуемости хаусдорфовых пространств со счётной базой).

25. Фильтры и ультрафильтры. Характеризация ультрафильтров. Сходимость ультрафильтров. Характеризация компактности в терминах сходимости ультрафильтров. Теорема Тихонова о произведении компактов.

26-УФ. Образ (ультра)фильтра при отображении множеств. Характеризация непрерывных отображений топологических пространств в терминах ультрафильтров.

27. Компактификация топологического пространства (определение и существование). Эквивалентные компактификации. Теорема о мощности компактификаций. Отношение порядка на множестве классов эквивалентных компактификаций, теорема о его антисимметричности. Теорема о существовании наибольшей (стоун-чеховской) компактификации для любого тихоновского пространства.

28. Определение александровской (одноточечной) компактификации, её минимальность. Теорема об александровской компактификации (её существование для любого локально компактного хаусдорфова пространства).

29. Стоун-чеховская компактификация βX тихоновского пространства X . Теорема о том, что каждое непрерывное отображение пространства X в компакт продолжается до непрерывного отображения βX в этот компакт.

30-УФ. Стоун-чеховская компактификация βX множества X с дискретной топологией. Её описание как пространства ультрафильтров на X .

31-УФ. Продолжение операции полугруппы S с дискретной топологией на βS . Существование идемпотента в полугруппе βS .

32. Определение локально компактных пространств и доказательство их свойств: всякое хаусдорфово локально компактное пространство вполне регулярно; характеристика локально компактных пространств как открытых подпространств компактных пространств; открытость всюду плотных локально компактных подпространств хаусдорфовых пространств.

33. Отношение вписанности покрытий. Локально конечные покрытия. Определение паракомпактного пространства. Определение консервативного семейства подмножеств топологического пространства. Доказательство консервативности всякого локально конечного семейства подмножеств топологического пространства. Доказательство

нормальности всякого хаусдорфова паракомпактного пространства. Наследование паракомпактности замкнутыми подпространствами.

34. Определение разбиения единицы на топологическом пространстве. Разбиение единицы, подчинённое покрытию. Локально конечное разбиение единицы. Доказательство того, что всякому открытому покрытию паракомпакта подчинено некоторое разбиение единицы. Теорема Стоуна о паракомпактности метризуемых пространств (без доказательства).

35. Определение финально компактных и линделёфовых пространств. Характеризация финальной компактности в терминах центрированных семейств замкнутых множеств. Сохранение финальной компактности непрерывными отображениями и наследование её замкнутыми подпространствами. Доказательство того, что финальная компактность не конечно мультипликативна. Доказательство паракомпактности каждого линделёфова пространства.

36. Счётно компактные и псевдокомпактные пространства. Равенство: счётная компактность + линделёфовость = компактность. Наследование счётной компактности замкнутыми подпространствами. Доказательство равносильности счётной компактности тому, что пересечение любого счётного центрированного семейства замкнутых множеств имеет непустое пересечение, а также тому, что каждое бесконечное множество в нём имеет точку накопления. Доказательство равносильности псевдокомпактности тому, что каждое локально конечное открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Доказательство псевдокомпактности счётно компактного пространства. Доказательство счётной компактности нормального псевдокомпактного пространства. Равенство: псевдокомпактность + линделёфовость = компактность.

37. Сумма топологических пространств. Открыто-замкнутость слагаемых. Критерий непрерывности отображения суммы. Совпадение топологии суммы подпространств с топологией, индуцированной из суммы объемлющих пространств. Критерии того, что сумма удовлетворяет аксиомам отделимости, локально компактна, паракомпактна, компактна, счётно компактна, финально компактна, удовлетворяет первой аксиоме счётности, удовлетворяет второй аксиоме счётности, сепарабельна. Примеры.

38. Факторпространство, фактортопология, естественное факторное отображение. Характеризация факторных отображений топологических пространств. Непрерывность факторных отображений. Открытые и замкнутые отображения (определение). Связь открытости и замкнутости отображений с факторностью. Биективные факторные отображения. Условие, при котором факторпространство является T_1 -пространством. Стягивание множества $F \subset X$ в точку. Условия, при которых X/F является T_1 -пространством, хаусдорфово, регулярно. Присоединение (приклеивание) пространства по отображению. Склеивание подпространств.

39. Связное топологическое пространство. Критерии связности. Мощность непустого неодноточечного связного вполне регулярного пространства. Сохранение связности непрерывными отображениями. Связность вещественной прямой. Связность объединения пересекающихся связных подпространств. Связность замыкания связного подпространства. Доказательство того, что если любые две точки пространства содержатся в связном подпространстве, то это пространство связно. Континуум (определение). Равносильность связности пространства X и связности его стоун-чеховской компактификации βX .

40. Компоненты (связности точек) топологического пространства. Квазикомпоненты. Совпадение компонент с квазикомпонентами для компактов. Вполне несвязные, нульмерные и сильно нульмерные топологические пространства (определение). Доказательство того, что каждое сильно нульмерное пространство нульмерно. Доказательство того, что любой вполне несвязный компакт сильно нульмерен.

41. Граница множества. Малая индуктивная размерность регулярного пространства. Теорема: если X — регулярное пространство и $Y \subset X$, то $\text{ind } Y \leq \text{ind } X$. Большая индуктивная размерность нормального пространства. Теорема: для любого нормального пространства X $\text{ind } X \leq \text{Ind } X$. Лебегова размерность. Доказательство того, что если X — T_1 -пространство и $\dim X \leq 0$, то X нормально и $\text{Ind } X \leq 0$. Формулировки (без доказательства): $\dim X \leq \text{Ind } X$ для любого нормального X ; теорема счётной суммы для размерности $\dim$; $\dim[0, 1]^n = \text{ind}[0, 1]^n = \text{Ind}[0, 1]^n = n$; $\dim \mathbb{R}^n = \text{ind } \mathbb{R}^n = \text{Ind } \mathbb{R}^n = n$; для любого сепарабельного метризуемого пространства X $\dim X = \text{ind } X = \text{Ind } X$; для любого метризуемого пространства X $\dim X = \text{Ind } X$; для любого нормального пространства X $\dim X \leq \text{Ind } X$ (и $\text{ind } X \leq \text{Ind } X$).