

Задачи к лекции 4

1. а) *Предельной точкой* последовательности называется точка, любая окрестность которой содержит бесконечно много членов последовательности (эти члены могут совпадать!).

Заметьте, что предельная точка последовательности точек топологического пространства X может не быть таковой для множества значений этой последовательности (если множество значений конечно), а предельная точка множества значений не обязана быть предельной точкой последовательности (если в X имеются незамкнутые одноточечные множества). Однако если все одноточечные множества в X замкнуты и все элементы последовательности различны, то предельные точки последовательности совпадают с предельными точками множества её значений.

б) Верно ли, что точка топологического пространства является предельной точкой последовательности в этом пространстве тогда и только тогда, когда к ней сходится некоторая подпоследовательность данной последовательности?

в) Направленность $g = (y_\beta)_{\beta \in B}$, где B — множество, направленное вверх отношением $\preccurlyeq$, называется *поднаправленностью* направленности $f = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где A — множество, направленное вверх отношением $\leq$, если существует такое отображение $\varphi: B \rightarrow A$, что $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$ для всех $\beta \in B$ (т.е. $g = f \circ \varphi$) и для каждого $\alpha_0 \in A$ существует $\beta_0 \in B$ с тем свойством, что $\alpha_0 \leq \varphi(\beta)$ при всех $\beta \succcurlyeq \beta_0$ (это означает, что множество $\varphi(B)$ не ограничено в A и направлено вверх сужением отношения $\leq$ на это множество).

Покажите, что каждая последовательность имеет поднаправленность, которая не является подпоследовательностью.

г) Покажите, что если последовательность сходится к некоторой точке, то и всякая подпоследовательность этой последовательности сходится к той же точке.

2. Пусть Y — счётное множество, $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на Y и $p \notin Y$. Положим $X = Y \cup \{p\}$ и снабдим множество X топологией, в которой все точки $y \in Y$ изолированы, а окрестности точки p — все элементы ультрафильтра $\mathcal{U}$. Докажите, что X с этой топологией является счётным недискретным топологическим пространством, в котором все сходящиеся последовательности тривиальны.

3. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Напомним, что Y — множество *типа* G_δ или G_δ -*множество* в X , если Y является пересечением счётного числа открытых в X множеств. Вместо «одноточечное множество типа G_δ » говорят «точка типа G_δ ».

Приведите пример топологического пространства, в котором нет нетривиальных сходящихся последовательностей, однако все точки имеют тип G_δ .

4. Покажите, что для топологического пространства X следующие условия равносильны:

- а) X дискретно;
- б) все точки пространства X изолированы;
- в) все подпространства пространства X дискретны;
- г) все подпространства пространства X замкнуты.

5. Пусть κ — произвольный бесконечный кардинал.

- а) Приведите пример недискретного топологического пространства, в котором все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны.
- б) Покажите, что в топологическом пространстве все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны тогда и только тогда, когда все подпространства мощности, не превосходящей κ , замкнуты.

6. Топологическое пространство X называется *пространством Фреше–Урысона*, если к любой точке прикосновения x любого множества $A \subset X$ сходится некоторая последовательность точек множества A (иными словами, если точка $x \notin A$ предельна для множества A тогда и только тогда, когда к x сходится некоторая последовательность точек множества A).

- а) Заметьте, что каждое пространство с первой аксиомой счётности является пространством Фреше–Урысона.
- б) Покажите, что счётный веер Фреше–Урысона является пространством Фреше–Урысона без первой аксиомы счётности.