

Задачи к лекции 3

1. Покажите, что если X — метризуемое топологическое пространство и d — любая метрика, порождающая топологию X , то точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда $d(x, A) = 0$, так что $\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$. Выведите отсюда, что замыкание $\overline{B_d(x, \varepsilon)}$ в пространстве X всякого открытого шара относительно любой метрики d , порождающей топологию X , содержится в замкнутом шаре $\overline{B_d(x, \varepsilon)}$ того же радиуса с тем же центром относительно той же метрики. Верно ли, что всегда $\overline{B_d(x, \varepsilon)} = B_d(x, \varepsilon)$?

2. Границей множества A в топологическом пространстве X называется множество $\bar{A} \setminus \text{Int } A$. Обозначение: $\text{Fr } A$ или $\text{Bd } A$.

Проверьте, что оператор Fr взятия границы множества в топологическом пространстве X обладает следующими свойствами:

- а) $\text{Int } A = A \setminus \text{Fr } A$;
- б) $\bar{A} = A \cup \text{Fr } A$;
- в) $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$;
- г) $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$;
- д) $\text{Fr}(X \setminus A) = \text{Fr } A$;
- е) $X = \text{Int } A \cup \text{Fr } A \cup \text{Int}(X \setminus A)$;
- ё) $\text{Fr } \bar{A} \subset \text{Fr } A$;
- ж) $\text{Fr } \text{Int } A \subset \text{Fr } A$;
- з) A открыто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A = \bar{A} \setminus A$;
- и) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A = A \setminus \text{Int } A$;
- к) A открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A = \emptyset$.

Верно ли, что если $A \subset B$, то $\text{Fr } A \subset \text{Fr } B$? В частности, верно ли, что $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr } A \cap \text{Fr } B$?

3. Покажите, что для топологического пространства X следующие условия равносильны:

- а) X дискретно;
- б) все точки пространства X изолированы;
- в) все подпространства пространства X дискретны;
- г) все подпространства пространства X замкнуты.

4. Пусть κ — произвольный бесконечный кардинал.

- а) Приведите пример недискретного топологического пространства, в котором все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны.
- б) Покажите, что в топологическом пространстве все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны тогда и только тогда, когда все подпространства мощности, не превосходящей κ , замкнуты.

5. Укажите подмножества A и B вещественной прямой с обычной топологией, для которых (а) $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \overline{A \cap B}$; (б) $\text{Int } A \cup \text{Int } B \neq \text{Int}(A \cup B)$. Может ли одно из этих множеств быть замкнутым? открытым?

6. Для каких множеств внутренность совпадает с замыканием? Опишите все такие подмножества прямой $\mathbb{R}$.

7. Вещественная прямая с топологией, порождённой базой $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, называется *прямой Зоргенфрея* и обычно обозначается S . Подпространство $[0, 1) \subset S$ прямой Зоргенфрея называется *стрелкой Зоргенфрея*, а топология прямой Зоргенфрея называется *топологией стрелки*. Докажите, что прямая (и стрелка) Зоргенфрея

- а) удовлетворяет первой аксиоме счётности;
- б) не удовлетворяет второй аксиоме счётности;
- в) наследственно сепарабельна, т.е. любое её подпространство сепарабельно;
- г) неметризуема.

8. Пусть $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией и $W_1 = W_1^0 \cup \{\omega_1\} = \{\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, тоже с порядковой топологией. Заметьте, что W_1^0 является открытым плотным подпространством пространства W_1 . Покажите, что W_1^0 — несепарабельное пространство с первой аксиомой счётности.

9. Говорят, что топологическое пространство обладает *свойством Суслина*, если в нём всякое семейство попарно непересекающихся открытых множеств не более чем счётно.

- а) Приведите пример несепарабельного пространства со свойством Суслина.
- б) Покажите, что свойство Суслина и сепарабельность наследуются открытыми подпространствами, т.е. всякое открытое подпространство сепарабельного пространства (пространства со свойством Суслина) тоже сепарабельно (обладает свойством Суслина).
- в) Покажите, что свойство Суслина наследуется плотными подпространствами, а сепарабельность не наследуется.
- г) Докажите, что всякое метризуемое пространство со свойством Суслина обладает счётной базой.

10. Число Суслина $c(X)$ топологического пространства X определяется как супремум мощностей семейств попарно непересекающихся открытых множеств в X .

Наследственное число Суслина $hc(X)$ топологического пространства X , которое также называется *спрэдом* пространства X и обозначается $s(X)$, определяется естественным образом:

$$hc(X) = s(X) = \sup\{c(Y) : Y \subset X\}.$$

Покажите, что $hc(X) = \sup\{|Y| : Y \text{ — дискретное подпространство пространства } X\}$.

11. Заметьте, что кардинальнозначные характеристики топологического пространства X , с которыми мы успели познакомиться, связаны неравенствами

$$\chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}, \quad c(X) \leq d(X) \leq w(X) \geq hc(X) \geq c(X), \quad d(X) \leq |X|.$$

Приведите примеры пространства X , для которого $\chi(X) < c(X)$, и пространства Y , для которого $\chi(Y) > hc(Y)$.