

Задачи к лекции 2

1. Проверьте, что определённые ниже функции d являются метриками на X :

- X — любое векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $d(x, y) = \|x - y\|$;
- X — любое векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$;
- $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — инъективная функция.

2. Каждая метрика d на множестве X порождает метрическую топологию $\mathcal{T}_d$ на X (её базой являются всевозможные шары относительно этой метрики). Две метрики называются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию.

- Покажите, что любая метрика d на любом множестве X эквивалентна метрике, ограниченной единицей, т.е. метрике $\tilde{d}$ с тем свойством, что $\tilde{d}(x, y) \leq 1$ для любых $x, y \in X$.
- Две метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X называются *липшицево эквивалентными*, если существуют такие положительные числа c и C , что $c \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C \cdot d_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Приведите пример эквивалентных, но не липшицево эквивалентных метрик.
- Покажите, что две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на векторном пространстве V эквивалентны (т.е. определяемые ими метрики $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ и $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ эквивалентны) тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа c и C , что $c \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1$ для любого $x \in V$.

3. а) Покажите, что функции $\rho_1, \rho_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определённые правилами $\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i \leq n} |x_i - y_i|$ и $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \leq n} |x_i - y_i|$ для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, являются метриками на $\mathbb{R}^n$. Эквивалентны ли эти метрики друг другу и евклидовой метрике $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i \leq n} (x_i - y_i)^2}$ на $\mathbb{R}^n$? Нарисуйте шары относительно этих метрик для случая $n = 2$.

б) Эквивалентны ли метрики на множестве числовых последовательностей $\{\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 < \infty\}$, порождённые нормами $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$?

в) Покажите, что формулы

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \quad \text{и} \quad d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt}$$

определяют неэквивалентные метрики на пространстве $C([0, 1])$ непрерывных функций на отрезке.

4. Пусть $\mathbb{P}^n$ — n -мерное проективное пространство (его точками служат все проходящие через $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+1 \text{ раз}}$ прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$). Проверьте, что величину угла между прямыми можно принять за расстояние между ними в $\mathbb{P}^n$, т.е. функция $d_n: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определённая правилом $d_n(l_1, l_2) = \widehat{(l_1, l_2)}$ для $l_1, l_2 \in \mathbb{P}^n$, является метрикой на $\mathbb{P}^n$.

5. Могут ли в метрическом пространстве существовать два таких несовпадающих шара разных радиусов, что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса?

6. Говорят, что метрика d на множестве X *неархимедова*, если она удовлетворяет сильному неравенству треугольника $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ для любых $x, y, z \in X$. Неархимедовы метрики называются также *ультраметриками*, а метрические пространства с неархимедовыми метриками называются *ультраметрическими пространствами*.

Дискретная метрика на множестве X определяется правилом $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$

Проверьте, что дискретная метрика неархимедова. Покажите, что в ультраметрическом пространстве

- любая точка любого шара является центром этого шара;
- если два шара пересекаются, то один из них целиком содержится в другом;
- всякий шар одновременно и открыт, и замкнут;
- все сферы (множества вида $\{x : d(x, x_0) = \varepsilon\}$) открыты;
- все треугольники равнобедренны.

Может ли шар меньшего радиуса содержать шар большего радиуса в ультраметрическом пространстве?

7. Пусть X — множество, d — метрика на нём, a — любое положительное число, $\mathbf{a}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, тождественно равная a , и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — не равная тождественно нулю функция со свойствами $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ и $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Проверьте, что $a \cdot d$, $\min\{d, \mathbf{a}\}$, $f \circ d$ и $\frac{d}{1+d}$ тоже метрики. Эквивалентны ли они друг другу и метрике d ?

8. Пусть X — множество и d_1 и d_2 — две метрики на нём. Какие из функций $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$, $d_1 + d_2$, $d_1 \cdot d_2$ и $\frac{d_1}{d_2}$ тоже являются метриками? (В последнем случае полагаем $\frac{d_1}{d_2}(x, x) = 0$ для $x \in X$.)

9. Топологическое пространство X называется *дискретным*, если его топология состоит из всех подмножеств множества X .

Покажите, что топологическое пространство дискретно тогда и только тогда, когда оно имеет базу, состоящую из одноточечных множеств.

10. Докажите, что если топологическое пространство обладает счётной базой, то любая его база содержит не более чем счётное подсемейство, являющееся базой. Верно ли аналогичное утверждение для предбаз?

11. Топологическое пространство *метризуемо*, если его топология порождается некоторой метрикой (эта метрика определена неоднозначно).

Приведите пример метризуемого пространства, топология которого не имеет счётной базы. Может ли такое пространство быть счётным?

12. Каждый линейный порядок на множестве X порождает топологию, база которой состоит из всех открытых интервалов относительно этого порядка.

Докажите, что евклидова топология на плоскости не порождается никаким линейным порядком.

13. Метризуема ли обычная евклидова плоскость с топологией, порождённой лексикографическим порядком?

14. *Колексикографический порядок* на плоскости и полуплоскости определяется подобно лексикографическому, только первая и вторая координаты меняются ролями: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, если либо $y_1 < y_2$, либо $y_1 = y_2$ и $x_1 \leq x_2$.

Сравните следующие топологии на верхней полуплоскости (вместе с граничной прямой):

- топология, индуцированная из евклидовой плоскости;
- топология, индуцированная из плоскости с топологией лексикографического порядка;
- топология, индуцированная из плоскости с топологией колексикографического порядка;
- топология, порождённая лексикографическим порядком на верхней полуплоскости;
- топология, порождённая колексикографическим порядком на верхней полуплоскости.

15. Опишите топологию, индуцированную на граничной прямой $y = 0$ из верхней полуплоскости с топологией, порождённой лексикографическим порядком на этой полуплоскости.

16. Покажите, что у топологии подпространства вещественной прямой (с обычной топологией), состоящего из всех иррациональных чисел, имеется счётная база, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Верно ли это для подпространства, состоящего из рациональных чисел?

17. Говорят, что топологическое пространство *удовлетворяет первой аксиоме счётности* или является пространством *с первой аксиомой счётности*, если в каждой точке этого пространства имеется счётная локальная база. (Говорят также, что топологическое пространство *удовлетворяет второй аксиоме счётности* или является пространством *со второй аксиомой счётности*, если у топологии этого пространства имеется счётная база.)

Приведите пример топологического пространства без первой аксиомы счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

18. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Говорят, что Y — множество *типа G_δ* или G_δ -*множество* в X , если Y является пересечением счётного числа открытых в X множеств. Вместо «одноточечное множество типа G_δ » говорят «точка типа G_δ ».

- Заметьте, что в метризуемом пространстве все замкнутые множества имеют тип G_δ .
- Является ли множество всех иррациональных чисел G_δ -подмножеством вещественной прямой с обычной топологией? Является ли таковым множество всех рациональных чисел?
- Заметьте, что в пространстве с первой аксиомой счётности все точки имеют тип G_δ . Верно ли, что в пространстве с первой аксиомой счётности все замкнутые множества имеют тип G_δ ?