

Задачи к лекции 1

1. Пусть κ и λ — кардиналы, X и Y — непересекающиеся множества, $|X| = \kappa$ и $|Y| = \lambda$. Сумма $\kappa + \lambda$ кардиналов κ и λ определяется как мощность множества $X \cup Y$, их произведение $\kappa \cdot \lambda$ — как мощность множества $X \times Y$, а λ -я степень κ^λ кардинала κ определяется как мощность множества $X^Y = \{f: Y \rightarrow X\}$. (Заметьте, что для каждого множества A существует ровно одно отображение $f: \emptyset \rightarrow A$ с пустой областью определения (это пустое множество), так что $\kappa^0 = 1$ для любого кардинала κ ; заметьте также, что степень 0^κ не определена для $\kappa \neq 0$.) Проверьте следующие свойства этих операций (ниже κ , λ и μ — кардиналы):

а) ассоциативность сложения и умножения:

$$(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu);$$

б) коммутативность сложения и умножения:

$$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa;$$

в) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu;$$

г) монотонность:

если $\kappa \leq \lambda$, то $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$, $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$ и $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$;

если $1 \leq \kappa$ и $\lambda \leq \mu$, то ¹⁾ $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$;

д) если κ бесконечен, то $\kappa \cdot \kappa = \kappa$;

е) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они отличны от нуля, то

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\};$$

ё) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$, $\kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$;

ж) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa \geq 2$ и $\lambda \geq 1$, то

$$\max\{\kappa, 2^\lambda\} \leq \kappa^\lambda \leq \max\{2^\kappa, 2^\lambda\};$$

в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda = \kappa^\lambda$ для любого $\kappa \leq 2^\lambda$, $\kappa \geq 2$.

2. Докажите теорему Кёнига: если A — произвольное множество и для каждого $\alpha \in A$ X_α и Y_α — множества, удовлетворяющие условию $|X_\alpha| < |Y_\alpha|$, то

$$\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| < \left| \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \right|.$$

Заметьте, что из этой теоремы немедленно вытекает теорема Кантора: $\kappa < 2^\kappa$ для любого кардинала κ .

3. Покажите, что если X — произвольное бесконечное множество, A — произвольное множество мощности $|A| \leq |X|$ и для каждого $\alpha \in A$ X_α — множество мощности $|X_\alpha| \leq |X|$, то $\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| \leq |X|$. Останется ли это утверждение верным, если всюду заменить знак « $\leq$ » на « $<$ »?

4. а) Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно множеству $[X]^{<\aleph_0}$ всех его конечных подмножеств.

б) Покажите, что для любого бесконечного множества X и любого кардинала $\kappa \leq |X|$ множество $[X]^\kappa$ всех подмножеств X мощности κ равномощно множеству X^κ .

в) Верно ли, что любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?

г) Верно ли, что в предположении справедливости континуум-гипотезы любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?

5. Пусть X — любое множество и $\mathcal{F}$ — любое семейство множеств. Объединение $\bigcup \mathcal{F}$ семейства $\mathcal{F}$ — это множество всех элементов всех множеств из этого семейства. Можно считать, что множества в семействе $\mathcal{F}$ индексированы элементами некоторого (произвольного) индексного множества A : $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$. В этом случае для объединения семейства $\mathcal{F}$ наряду с обозначением $\bigcup F$ используются обозначения $\bigcup \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$. Аналогичные обозначения используются для пересечения семейства $\mathcal{F}$ (оно состоит из элементов, принадлежащих всем множествам семейства $\mathcal{F}$ одновременно).

Докажите, что

$$X \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{X \cap Y : Y \in \mathcal{F}\} \quad \text{и} \quad X \cup \bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{X \cup Y : Y \in \mathcal{F}\},$$

т.е.

$$X \cap \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \cap F_\alpha) \quad \text{и} \quad X \cup \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \cup F_\alpha).$$

6. Докажите, что для любого множества X и любого семейства множеств $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ выполнены законы де Моргана:

$$X \setminus \bigcup \mathcal{F} = \bigcap \{X \setminus Y : Y \in \mathcal{F}\} \quad \text{и} \quad X \setminus \bigcap \mathcal{F} = \bigcup \{X \setminus Y : Y \in \mathcal{F}\},$$

т.е.

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha) \quad \text{и} \quad X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha).$$

¹⁾ Предупреждение: обратное неверно — существует модель ZFC, в которой $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

7. Проверьте, что для любых множеств $X_1 \subset X_2 \subset X$ и $Y_1 \subset Y_2 \subset Y$ и любого отображения $f: X \rightarrow Y$

$$\begin{aligned} f(X_1) \subset f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2); \\ f(X_2 \setminus X_1) \supset f(X_2) \setminus f(X_1) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_2 \setminus Y_1) = f^{-1}(Y_2) \setminus f^{-1}(Y_1); \\ f(X_1 \Delta X_2) \supset f(X_1) \Delta f(X_2) & \quad \text{и} \quad f^{-1}(Y_1 \Delta Y_2) = f^{-1}(Y_1) \Delta f^{-1}(Y_2); \\ f^{-1}(f(X_1)) \supset X_1 & \quad \text{и} \quad f(f^{-1}(Y_1)) = Y_1 \cap f(X). \end{aligned}$$

Как изменятся эти формулы для инъективных, сюръективных и биективных отображений?

8. Элемент x упорядоченного множества $(X, \leq)$ называется *максимальным* (*минимальным*), если всякий элемент $y \in X$, удовлетворяющий неравенству $x \leq y$ ($y \leq x$), совпадает с x . Элемент x упорядоченного множества $(X, \leq)$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если для всякого $y \in X$ выполнено неравенство $y \leq x$ ($x \leq y$).

- Всякий ли максимальный (минимальный) элемент в упорядоченном множестве является наибольшим (наименьшим)? Всякий ли наибольший элемент является максимальным?
- Может ли упорядоченное множество иметь несколько максимальных элементов? несколько наибольших элементов? не иметь ни максимальных, ни наибольших элементов?
- Верно ли, что если упорядоченное множество имеет единственный максимальный элемент, то этот элемент наибольший?