

Линейная алгебра и геометрия
Программа курса, 2026, версия от 15.05.2026

1. Векторные пространства. Подпространства. Линейная зависимость и линейные комбинации векторов. Ранг системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
2. Базис конечномерного пространства. Размерность конечномерного пространства.
3. Координаты векторов. Изоморфизм векторных пространств. Арифметическое векторное пространство.
4. Матрица перехода. Свойства матрицы перехода. Параметрические уравнения подпространства.
5. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула Грассмана.
6. Прямая сумма нескольких подпространств
7. Сопряжённое пространство. Взаимный базис. Преобразование координат в сопряжённом пространстве.
8. Естественный изоморфизм между V и V^{**} .
9. Аннулятор и нуль-пространство. Функционалы и подпространства.
10. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.
11. Ядро и образ линейного отображения.
12. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Алгебра линейных операторов.
13. Инвариантные подпространства. Разложение оператора в сумму операторов. Разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму.
14. Собственные векторы. Характеристический многочлен. Собственные подпространства.
15. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Диагонализируемые операторы.
16. Теорема Гамильтона–Кэли
17. Нильпотентные операторы. Существование жорданова базиса для нильпотентного оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.
18. Единственность жорданова базиса для нильпотентного оператора.
19. Разложение оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора.
20. Корневые векторы и подпространства.
21. Жорданова форма оператора
22. Комплексификация и о вещественных пространствах и линейных отображений.
23. Инвариантные двумерные подпространства вещественного оператора.
24. Билинейные функции. Корреляции и ядра. Матрица билинейной функции. Невырожденные билинейные функции.
25. Симметричные и кососимметричные билинейные функции. Теорема Лагранжа. Канонический и симплектический базис.
26. Квадратичные формы. Поляризация. Метод Лагранжа.
27. Метод Якоби.
28. Квадратичные формы над \mathbb{R} и над \mathbb{C} . Нормальная форма. Индексы инерции.
29. Положительно определённые билинейные функции. Критерий Сильвестра.
30. Полуторалинейные функции. Эрмитовы полуторалинейные функции. Эрмитовы квадратичные функции.
31. Евклидовы пространства. Ортогональная система координат. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Линейные функции на евклидовом пространстве.

32. Ортогональное проектирование. Расстояние от вектора до линейного подпространства. Геометрический смысл определителя.
33. Ортогональные матрицы. QR -разложение. Ортогональные операторы. Изоморфизм евклидовых пространств.
34. Линейные операторы и билинейные формы в евклидовых пространствах. Сопряжённые операторы.
35. Самосопряжённые операторы. Приведение квадратичной функции к главным осям.
36. Канонический вид ортогонального оператора
37. Положительно и неотрицательно определённые самосопряжённые линейные операторы. Полярное разложение оператора над \mathbb{R} .
38. Унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное проектирование и расстояние в унитарном пространстве. Унитарные матрицы. Изоморфизм унитарных пространств.
39. Линейные операторы в унитарных пространствах. Сопряжённые операторы в унитарном пространстве. Самосопряжённые операторы в унитарном пространстве. Приведение квадратичной функции к главным осям над \mathbb{C} .
40. Унитарные операторы. Комплексификация евклидова пространства. Полярное разложение над \mathbb{C} .
41. Аффинные пространства. Аффинная система координат. Бариецентрические координаты. Изоморфизм аффинных пространств.
42. Аффинные подпространства. Взаимное расположение плоскостей.
43. Аффинно-линейные функции. Дифференциал аффинно-линейной функции. Аффинные отображения. Дифференциал аффинного отображения.
44. Матрица аффинного отображения. Аффинные операторы. Матрица аффинного оператора.
45. Евклидовы аффинные пространства. Аффинные операторы в евклидовых пространствах.
46. Аффинно-квадратичные функции. Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду. Аффинно-квадратичные функции в аффинно-евклидовых пространствах. Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду в аффинно-евклидовых пространствах.
47. Квадрики. Аффинная и метрическая классификация квадрик.
48. Полилинейные функции. Сопряженное пространство к пространству полилинейных функций.
49. Тензорное произведение.
50. Сопряженное к тензорному произведению пространство. Базис и переход к новой системе координат в тензорных произведениях. Тензорное произведение евклидовых пространств.
51. Тензоры. Примеры. Пространство тензоров. Координаты тензора. Переход в новую систему координат. Арифметические операции над тензорами.
52. Свёртка тензоров. Примеры.
53. Тензоры в евклидовом пространстве. Опускание и поднятие индексов.
54. Симметрирование и альтернирование.
55. Тензорная алгебра. Симметрическая алгебра.
56. Алгебра Грассмана. Плюккерovy координаты.