Линейная алгебра и геометрия
Подробная программа курса, 2026, версия от 15.05.2026

Лекция 1. *Векторные пространства, линейная зависимость*

1. Векторные пространства. Подпространства. Линейная зависимость и линейные комбинации векторов. Ранг системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.

> **Лемма** (о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов)**.** *Если система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ линейно независима, а система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ линейно зависима (в частности, если $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n \rangle$), то вектор $\boldsymbol{x}$ единственным образом линейно выражается выражается через вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$:*
>
> $$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n.$$
>
> **Лемма** (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной)**.** *Если* $\operatorname{rank} X < \infty$*, то любая система линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в X системы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*
>
> **Лемма** (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной)**.** *Если* $\operatorname{rank} X < \infty$*, то любая система линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в X системы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*
>
> **Лемма** (основная, о линейной зависимости)**.** *Если векторное пространство V порождается n векторами, то всякие $m > n$ векторов пространства V линейно зависимы.*
>
> **Теорема** (о монотонности ранга)**.** *Пусть $X \subset V$, $Y \subset \langle X \rangle$ и* $\operatorname{rank} X < \infty$*. Тогда* $\operatorname{rank} Y \leq \operatorname{rank} X$*.*

2. Базис конечномерного пространства. Размерность конечномерного пространства.

> **Лемма** (о ранге конечномерного пространства)**.** *Векторное пространство V конечномерно если и только если* $\operatorname{rank} V < \infty$*.*
>
> **Теорема** (о дополнении до базиса)**.** *Пусть X — полная система векторов в конечномерном векторном пространстве V. Всякую линейно независимую систему векторов из X можно дополнить до базиса V.*
>
> **Следствие.** *Во всяком конечномерном векторного пространстве есть базис.*
>
> **Теорема.** *Все базисы конечномерного пространства V содержат одно и тоже число векторов.*
>
> **Теорема.** *Пусть V конечномерное пространство и $X \subset V$. Тогда $\langle X \rangle$ конечномерно и* $\dim \langle X \rangle = \operatorname{rank} X$*.*
>
> **Следствие.** *Если V конечномерное пространство, то* $\dim V = \operatorname{rank} V$*.*
>
> **Следствие.** *Если V — конечномерное векторное пространство и U — его собственное подпространство, то* $\dim U < \dim V$*.*

Лекция 2. *Координаты векторов, изоморфизмы линейных пространств, сумма и пересечение линейных подпространств*

3. Координаты векторов. Изоморфизм векторных пространств. Арифметическое векторное пространств.

Теорема. *Система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в конечномерном векторном пространстве V является базисом пространства V, если и только если каждый вектор $\boldsymbol{x} \in V$ единственным образом выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.*

Теорема. *Всякое векторное пространство V над полем K размерности n изоморфно арифметическому пространству K^n.*

Теорема. *Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеет одинаковую размерность.*

4. Матрица перехода. Свойства матрицы перехода. Параметрические уравнения подпространства.

5. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула Грассмана.

Теорема (о прямой сумме)**.** *Сумма подпространств U и W произвольного векторного пространства является прямой $\iff U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.*

Лемма. *Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ система линейно независимых векторов. Тогда $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.*

Теорема. *Для любых двух подпространств U и W конечномерного векторного пространства V над полем K справедлива* формула Грассмана

$$\boxed{\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}.$$

Лекция 3. *Прямая сумма нескольких подпространств. Сопряженное пространство*

6. Прямая сумма нескольких подпространств

Теорема (о прямой сумме)**.** *Для конечномерных подпространств $V_1, \ldots, V_n$ следующие условия равносильны:*

(1) *сумма $V_1 + \cdots + V_n$ прямая;*

(2) *если векторы $\boldsymbol{v}_i$, $i \leq n$, удовлетворяют условиям $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ для $i \leq n$ и $\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$;*

(3) *объединение любых базисов подпространств V_i, $i \leq n$, является базисом подпространства $V_1 + \cdots + V_n$;*

(4) $\dim V_1 + \cdots + V_n = \dim V_1 + \cdots + \dim V_n$.

7. Сопряжённое пространство. Взаимный базис. Преобразование координат в сопряжённом пространстве.

8. Естественный изоморфизм между V и V^{**}.

Теорема. *Для всякого конечномерного векторного пространства V отображение*

$$\delta \colon V \to V^{**}, \ \boldsymbol{v} \mapsto \delta_{\boldsymbol{v}},$$

является изоморфизмом.

Лекция 4. *Аннулятор и нуль-пространство. Линейные отображения.*

9. Аннулятор и нуль-пространство. Функционалы и подпространства.

Лемма (о двойственности аннулятора и нуль-пространства)**.** *Пусть* $U = V^*$ *и* $\delta\colon V \to U^* = V^{**}$ *канонический изоморфизм. Тогда*

$$\delta(Y_\circ) = Y^\circ,\ \delta(X)_\circ = X^\circ \text{ и } (Y^\circ)_\circ = (Y_\circ)^\circ.$$

Лемма (a)**.** *(1)* X° *линейное подпространство* V^* *и* $X^\circ = \langle X\rangle^\circ$.

(2) $Y_\circ$ *линейное подпространство* V *и* $Y_\circ = \langle Y\rangle_\circ$,

Лемма (b)**.** *Пусть* $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ *базис* V, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ *взаимный базис* V^* *и* $k \le n$. *Тогда* $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}^\circ = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\rangle$ *и* $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\rangle_\circ = \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\rangle$.

Теорема. *Пусть* $X \subset V$ *и* $Y \subset V^*$. *Тогда*

(1) $(X^\circ)_\circ = \langle X\rangle$ *и* $\operatorname{rank} X + \dim X^\circ = \dim V$;

(2) $(Y_\circ)^\circ = \langle Y\rangle$ *и* $\operatorname{rank} Y + \dim Y_\circ = \dim V$.

Теорема. *Пусть* V *— конечномерное векторное пространство над полем* K. *Тогда множество* $U \subset V$ *является подпространством пространства* $V \iff U$ *есть пересечение ядер* $\dim V - \operatorname{rank} U$ *линейных функционалов.*

10. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.

11. Ядро и образ линейного отображения.

Предложение. *Ядро* $\operatorname{Ker} f$ *любого линейного отображения* $f\colon V \to U$ *является подпространством пространства* V, *а образ* $\operatorname{Im} f$ *— подпространством пространства* U.

Предложение. *Линейное отображение* $f : V \to U$ *инъективно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

Предложение. *Если* $f\colon V \to U$ *— линейное отображение,* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ *и векторы* $f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ *линейно независимы (в пространстве* U*), то и векторы* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ *линейно независимы (в пространстве* V*).*

Лемма. *Если* V *— конечномерное векторное пространство над полем* K *с базисом* $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$, U *— векторное пространство над* K *и* $f\colon V \to U$ *— линейное отображение, то*

$$\operatorname{Im} f = \langle f(\boldsymbol{e}_1), \dots, f(\boldsymbol{e}_n)\rangle.$$

Лемма. *Пусть* V *и* U *— конечномерные векторные пространства с базисами* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *и* $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$, *и пусть* $f\colon V \to U$ *— линейное отображение с матрицей* A *относительно базисов* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{B}$. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A.$$

Теорема. *Для любого линейного отображения* $f\colon V \to U$ *конечномерного векторного пространства* V

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}.$$

Следствие. *Линейное отображение* $f : V \to U$ *сюръективно тогда и только тогда, когда* $\dim U = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$.

Лекция 5. *Операторы. Инвариантные подпространства. Собственные вектора и собственные подпространства. Характеристический многочлен. Диагонализируемые операторы.*

12. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Алгебра линейных операторов.

Теорема. *Пусть V — векторное пространство конечной размерности n.*
Квадратные матрицы A и B порядка n подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора $V \to V$ в некоторых базисах пространства V.

Теорема. *Для любого n-мерного векторного пространства V над полем K алгебры* $\operatorname{End} V$ *и* $M_n(K)$ *изоморфны.*

Следствие. *Для любого конечномерного векторного пространства V над полем K*

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2.$$

13. Инвариантные подпространства. Разложение оператора в сумму операторов. Разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму.

Предложение. *Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном векторном пространстве V существует аннулирующий многочлен.*

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, $f(x)$ — аннулирующий многочлен для $\mathcal{A}$ и $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ для взаимно простых многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму операторов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ таких, что $f_1(\mathcal{A}_1) = \Theta$ и $f_2(\mathcal{A}_2) = \Theta$. Кроме того,*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{A}_1 = \ker f_1(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_2(\mathcal{A}), \qquad \operatorname{Dom} \mathcal{A}_2 = \ker f_2(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}).$$

Теорема (о разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, $f(x)$ — аннулирующий многочлен для $\mathcal{A}$ и $f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)$, где многочлены $f_i(x)$ и $f_j(x)$ взаимно просты для различных i и j. Тогда $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_m$ таких, что $f_i(\mathcal{A}_i) = \Theta$ и*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{A}_i = \ker f_i(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}) f_2(\mathcal{A}) \dots f_{i-1}(\mathcal{A}) f_{i+1}(\mathcal{A}) \dots f_m(\mathcal{A})$$

для $i = 1, 2, \dots, m$.

14. Собственные векторы. Характеристический многочлен. Собственные подпространства.

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — произвольный базис конечномерного пространства V, и $\mathcal{A} \colon V \to V$ — линейный оператор с матрицей A в этом базисе. Число λ является собственным значением, отвечающим некоторому собственному вектору оператора $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда* $\det(A - \lambda E) = 0$.

Предложение. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Следствие. *Коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами линейного оператора.*

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ есть оператор в конечномерном пространстве V, U инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство и $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$. Тогда характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ делит характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$.*

Предложение. *Пусть V — векторное пространство над полем K, $\mathcal{A}$ — линейный оператор и λ — собственное значение $\mathcal{A}$. Тогда собственное подпространство V_λ является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$.*

Следствие. *Сумма собственных подпространств любого линейного оператора является прямой суммой.*

15. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Диагонализируемые операторы.

Предложение. *Геометрическая кратность собственного значения оператора не превосходит алгебраической кратности.*

Предложение (о операторе с диагональной матрицей)**.** *Пусть матрица $A = (a_{ij})$ оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ диагональна, $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $N_j = \{i : a_{ii} = \lambda_j\}$ и $k_j = |N_j|$ для $j = 1, \ldots, m$. Тогда*

(1) *базис $\boldsymbol{E}$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$;*

(2) $\bigcup_{j=1}^{m} N_j = \{1, \ldots, n\}$;

(3) $V_{\lambda_j} = \langle\{\boldsymbol{e}_i : i \in N_j\}\rangle$ *для* $j = 1, \ldots, m$;

(4) *V является прямой суммой собственных подпространств;*

(5)
$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{j=1}^{m}(\lambda_j - t)^{k_j}$$

(6) *для $j = 1, \ldots, m$, геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения λ_j совпадают.*

Теорема. *Для оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном пространстве V следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{A}$ диагонализируем;*

(2) *в пространстве V имеется базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$;*

(3) *V является прямой суммой собственных подпространств;*

(4) *характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители и для каждого собственного значения геометрическая и алгебраическая кратность совпадают.*

Лекция 6. *Теорема Гамильтона–Кэли. Нильпотентный оператор. Существование жордановой формы для нильпотентный оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.*

16. Теорема Гамильтона–Кэли

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{x} \in V$ и $\langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \ldots\rangle = V$. Тогда для $\mathcal{A}$ выполняется теорема Гамильтона–Кэли, то есть $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \Theta$.*

Теорема. *Теорема Гамильтона–Кэли Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном векторном пространстве V характеристический многочлен является аннулирующим.*

17. Нильпотентные операторы. Существование жорданова базис для нильпотентного оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.

Теорема. *Для любого нильпотентного оператора в конечномерном пространстве существует жорданов базис.*

Теорема (о характеристическом многочлене нильпотентного оператора)**.** *Оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном пространстве V является нильпотентным если и только если $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n$.*

Лекция 7. *Единственность жордановой формы нильпотентного оператора. Корневые подпространства. Жорданова форма оператора.*

18. Единственность жорданова базис для нильпотентного оператора.

$$\boxed{\text{число клеток размера } k = \operatorname{rank} A^{k-1} - 2\operatorname{rank} A^{k} + \operatorname{rank} A^{k+1}}.$$

Вывод: Жорданова форма матрицы нильпотентного оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток на диагонали.

19. Разложение оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора.

Теорема (о разложении оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечномерном пространстве V. Тогда*

(1) *оператор $\mathcal{A}$ в раскладывается в прямую сумму нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ и невырожденного оператора $\mathcal{S}$;*

(2) $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \{\boldsymbol{x} \in V : \mathcal{A}^i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *для некоторого* $i\}$*;*

(3) *если оператор $\mathcal{A}$ вырожденный, то $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$, $m = \dim\operatorname{Dom}\mathcal{N}$ равно алгебраической кратности* 0 *и* $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$.

20. Корневые векторы и подпространства.

Предложение (о нулевом корневом подпространстве вырожденного оператора)**.** *Если $\mathcal{A}$ вырожденный оператор, то $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$, $V^0 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$, где m есть алгебраическая кратность 0 и $\dim V^0 = m$.*

Теорема (о корневом подпространстве)**.** *Для любого собственного значения λ корневое подпространство V^λ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Размерность $m = \dim V^\lambda$ равна алгебраической кратности собственного значения λ и $V^\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$. Для $\mathcal{K} = \mathcal{A}|_{V^\lambda}$, $\chi_{\mathcal{K}}(t) = (\lambda - t)^m$.*

Теорема (о разложении на корневые подпространства)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечномерном пространстве V. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *пространство V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств;*

(2) *характерестический многочлен раскладывается на линейные множители;*

(3) *если $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, k_i есть алгебраическая кратность собственного значения λ_i для $i = 1, \ldots, m$, то*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2}\ldots(\lambda_m - \lambda)^{k_m} \quad \text{и}$$
$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m}.$$

21. Жорданова форма оператора

Теорема. *Если матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ приводится к жордановой форме, то эта форма определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на диагонали. А именно, для любого $\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$ и любого натурального k*

$$\boxed{\text{число клеток } J_k(\lambda) = \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k-1} - 2\operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k} + \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k+1}}$$

(ранг оператора $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^0$ полагается равным нулю).

Лекция 8. *Комплексификация и овеществление пространств и линейных отображений. Инвариантные двухмерные подпространства у вещественного оператора.*

22. Комплексификация и овеществление пространств и линейных отображений.

Теорема. *Любой базис $\boldsymbol{E}$ пространства V является одновременно и базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$.*

Следствие. *Размерность комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ любого векторного пространства V над $\mathbb{R}$ равна размерности пространства V.*

Теорема. *Если $\boldsymbol{E}$ — базис векторного пространства V над полем $\mathbb{C}$, то $\boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E}$ — базис $V_{\mathbb{R}}$.*

Следствие. *Если V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\dim V = n$, то $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$.*

Теорема. *Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{C}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей $A = B + iC$ относительно этих базисов. Тогда матрица f как отображения $V_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$ относительно базисов $\boldsymbol{E}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, i\boldsymbol{b}_1, \ldots, i\boldsymbol{b}_m\}$ равна $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.*

Теорема. *Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{R}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей A относительно этих базисов. Тогда матрица A также является матрицей отображения $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}$ в тех же базисах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$.*

23. Инвариантные двухмерные подпространства вещественного оператора.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечно мерном вещественном пространстве V, $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ есть комплексный корень ($b \neq 0$) характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$) есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ. Тогда*

- *$U = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ является двухмерным инвариантным подпространством V;*
- *для $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$, $\operatorname{Sp} \mathcal{B}|_{\mathbb{C}} = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, вектор $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ и $\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\bar{\lambda}$;*
- *матрица*
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
является матрицей оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.

Следствие. *У оператора в конечномерном вещественном пространстве есть либо одномерное либо двухмерное инвариантное подпространство.*

Лекция 9. *Билинейные функции*

24. Билинейные функции. Корреляции и ядра. Матрица билинейной функции. Невырожденые билинейные функции.

Предложение. *Пусть b — билинейная функция на векторном пространстве V и $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$.*

1. *Левое ортогональное дополнение ${}^{\perp}U$ подпространства U — это прообраз при левой корреляции*

$b_{лев}\colon V \to V^*$ *аннулятора*

$$U^0 = \operatorname{Ann} U = \{\boldsymbol{f} \in V^* : (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in U\}$$

подпространства U *(относительно естественного спаривания* $c(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$*).*

2. $U^\perp = b_{пр}^{-1}(U^0)$.

$$\boxed{B' = C^T B C}.$$

Теорема. *Следующие свойства билинейной функции* b *на* n*-мерном векторном пространстве* V *равносильны:*

1. *функция* b *невырождена, т.е.* $\operatorname{Ker}_{лев} b = \operatorname{Ker}_{пр} b = \{\boldsymbol{0}\}$;
2. *матрица Грама функции* b *в некотором базисе невырождена;*
3. *матрица Грама функции* b *в любом базисе невырождена;*
4. *левая корреляция* $b_{лев}\colon V \to V^*$ *— изоморфизм;*
5. *правая корреляция* $b_{пр}\colon V \to V^*$ *— изоморфизм;*
6. *для любого* $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ *существует* $\boldsymbol{u} \in V$ *такой, что* $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \neq 0$;
7. *для любого* $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ *существует* $\boldsymbol{u} \in V$ *такой, что* $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$;
8. *для любой линейной функции* $f\colon V \to K$ *существует* $\boldsymbol{v} \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$;
9. *для любой линейной функции* $f\colon V \to K$ *существует* $\boldsymbol{v} \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$.

При выполнении этих условий вектор $\boldsymbol{v}$ *в 8 и 9 определён однозначно.*

Предложение. *Если билинейная функция* b *на конечномерном пространстве* V *невырождена, то для всякого подпространства* $U \subset V$ *выполняются равенства*

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = {}^\perp(U^\perp).$$

25. Симметричные и кососимметричные билинейные функции. Теорема Лагранжа. Канонический и симплектический базис.

Предложение. *Билинейная функция* b *на* V *кососимметрична* $\iff$ $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$.

Предложение. *Множества* $\mathscr{B}_{сим}(V)$ *и* $\mathscr{B}_{кос}(V)$ *всех симметричных и всех кососимметричных билинейных функций на* V *являются линейными подпространствами векторного пространства* $\mathscr{B}(V)$*. Более того,* $\mathscr{B}(V) = \mathscr{B}_{сим}(V) \oplus \mathscr{B}_{кос}(V)$.

Предложение. *Если* b *— (косо)симметричная билинейная функция и* U *— подпространство пространства* V *с тем свойством, что* $\operatorname{Ker} b \oplus U = V$*, то ограничение функции* b *на* U *невырождено.*

Теорема (Лагранжа)**.** *Для симметричной билинейной функции* b *на конечномерном векторном пространстве* V *над любым полем характеристики* $\neq 2$ *существует базис пространства* V*, в котором матрица* b *диагональна.*

Теорема. *Для любой кососимметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует симплектический базис.*

Лекция 10. *Квадратичные функции. Полуторалинейные функции. Евклидовы пространства.*

26. Квадратичные формы. Поляризация. Метод Лагранжа.

27. Метод Якоби.

Теорема (формула Якоби)**.** *Пусть $b\colon V \times V \to K$ — симметричная билинейная функция на n-мерном векторном пространстве над любым полем K, B — её матрица в некотором базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — угловые миноры матрицы B. Положим $\Delta_0 = 1$.*

Если все Δ_i, $i \leq n$, отличны от нуля, то существует базис $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ векторного пространства V, в котором квадратичная функция q, ассоциированная с b, имеет вид

$$q(y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \dots + y_n\tilde{\boldsymbol{e}}_n) = \tfrac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \tfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2,$$

причём матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$ верхне-унитреугольна (верхнетреугольна и все диагональные элементы равны 1).

28. Квадратичные формы над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. Нормальная форма. Индексы инерции.

Предложение. *Для любой квадратичной формы q на n-мерном векторном пространстве над полем вещественных чисел существует базис, в котором*

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$$

для некоторых k и l, удовлетворяющих условию $r = k + l \leq n$. При этом число r является инвариантом квадратичной функции q; более того, оно совпадает с рангом q.

Теорема (закон инерции)**.** *Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами квадратичной функции (т.е. не зависят от выбора базиса).*

Теорема (теорема Якоби)**.** *Если все угловые миноры Δ_i матрицы Q квадратичной формы $q\colon V \to \mathbb{R}$ в некотором базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ пространства V не равны нулю, то отрицательный индекс инерции формы q равен числу тех $i \leq n$, для которых $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.*

29. Положительно определённые билинейные функции. Критерий Сильвестра.

Теорема (критерий Сильвестра)**.** *Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — любой базис в нём. Симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ положительно определена $\iff$ все угловые миноры Δ_i её матрицы B в базисе $\boldsymbol{E}$ положительны.*

30. Полуторалинейные функции. Эрмитовы полуторалинейные функции. Эрмитовы квадратичные функции.

Предложение. *Всякая эрмитова полуторалинейная функция b однозначно определяется своей эрмитовой квадратичной функцией q.*

Теорема. *В n-мерном векторном пространстве V над $\mathbb{C}$ для всякой эрмитовой полуторалинейной функции b существует базис $\boldsymbol{E}$, в котором функция b и соответствующая ей эрмитова квадратичная функция q имеют* нормальный вид

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_k\overline{y}_k - x_{k+1}\overline{y}_{k+1} - \ldots - x_{k+\ell}\overline{y}_{k+\ell}, \quad q(\boldsymbol{x}) = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_{k+\ell}|^2$$

(*здесь* x_i *и* y_i — *координаты векторов* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *в* $\boldsymbol{E}$).

Теорема (закон инерции). *Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами эрмитовой квадратичной формы (т.е. не зависят от выбора базиса).*

Теорема (формула Якоби). *Пусть* $b : V \times V \to \mathbb{C}$ — *эрмитова полуторалинейная функция на* n*-мерном пространстве* V *над* $\mathbb{C}$, B — *её матрица в некотором базисе* $\boldsymbol{E}$ *и* $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — *угловые миноры* B. *Положим* $\Delta_0 = 1$.
Если все Δ_i, $i \le n$, *отличны от нуля, то существует базис* $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ *пространства* V, *в котором квадратичная функция* q, *ассоциированная с* b, *имеет вид*

$$q(y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \dots + y_n\tilde{\boldsymbol{e}}_n) = \tfrac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \tfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2,$$

причём матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ *к* $\tilde{\boldsymbol{E}}$ *верхне-унитреугольна.*

Теорема (критерий Сильвестра). *Пусть* V — *конечномерное векторное пространство над* $\mathbb{C}$ *и* $\boldsymbol{E}$ — *любой базис в нём. Эрмитова полуторалинейная функция на* V *положительно определена* $\iff$ *все угловые миноры её матрицы в базисе* $\boldsymbol{E}$ *положительны.*

31. Евклидовы пространства. Ортогональная система координат. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Линейные функции на евклидовом пространстве.

Лемма (Неравенство Коши–Буняковского). *Для любых векторов* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *евклидова пространства*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \le (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *пропорциональны.*

Лемма. *Неравенство треугольника Для любых векторов* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *евклидова пространства*

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Теорема. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ *евклидова пространства* V

$$\det G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) \ge 0,$$

причём $\det G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = 0 \iff$ *векторы* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ *линейно зависимы.*

Предложение. *Пусть* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — *произвольный базис евклидова пространства* V, $G = (g_{ij}) = G(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ *и* $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{e}_i$ — *любые векторы в* V. *Тогда*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{ij} = (x_1, \dots, x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Предложение. *Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Предложение. *Базис* $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *евклидова пространства ортонормирован тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

1. $G(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = E$;

2. *для любых* $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ *и* $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n$ (*или для любых* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *и* $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$)

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \qquad (\text{\textit{или}} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y});$$

3. *координаты любого вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *вычисляются по формуле* $x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$ *для* $i \le n$, *т.е.*

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \dots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Теорема. *Во всяком евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Более того, ортонормированный базис любого подпространства евклидова пространства можно дополнить до ортонормированного базиса всего пространства.*

Для каждого линейного функционала $f : V \to \mathbb{R}$ *на евклидовом пространстве* V *найдётся вектор* $\boldsymbol{v}_f \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$.

Соответствие $\mathscr{C} : \boldsymbol{v} \mapsto f_{\boldsymbol{v}}$ *— изоморфизм* $V \to V^*$, *и если* $\boldsymbol{E}$ *— любой ортонормированный базис в* V *и* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ *— взаимный с ним базис в* V^*, *то относительно базисов* $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\mathcal{E}}$ *этот изоморфизм имеет матрицу* E.

Лекция 11. *Евклидовы и унитарные пространства.*

32. Ортогональное проектирование. Расстояние от вектора до линейного подпространства. Геометрический смысл определителя.

Теорема. 1. *Расстояние от вектора* $\boldsymbol{x}$ *евклидова пространства* V *до подпространства* U *равно* $|\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|$, *причём единственным ближайшим к* $\boldsymbol{x}$ *вектором подпространства* U *является* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$.

2. *Угол между ненулевым вектором* $\boldsymbol{x}$ *и ненулевым подпространством* U *равен углу между* $\boldsymbol{x}$ *и* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$ (*если* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$) *или* $\frac{\pi}{2}$ (*если* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$).

Теорема. $\operatorname{vol} P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)^2 = \det G(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$.

$$\det G(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = (\det A)^2.$$

33. Ортогональные матрицы. QR-разложение. Ортогональные операторы. Изоморфизм евклидовых пространств.

Теорема (о QR-разложении)**.** *Всякая невырожденная матрица* A *может быть представлена в виде произведения* QR, *где* Q *— ортогональная, а* R *— верхнетреугольная матрица, причем диагональные элементы матрицы* R *положительны.*

Теорема. *Линейный оператор* $\mathcal{A} \colon V \to V$ *в евклидовом пространстве* V *является ортогональным* $\iff$ *его матрица в некотором ортонормированном базисе ортогональна* $\iff$ *его матрица в произвольном ортонормированном базисе ортогональна.*

Следствие. *Линейный оператор в евклидовом пространстве ортогонален* $\iff$ *он переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис* $\iff$ *он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Теорема. *Линейный оператор ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов. В частности, ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.*

Следствие. *Собственные значения ортогонального линейного оператора равны* ± 1.

34. Линейные операторы и билинейные формы в евклидовых пространствах. Сопряжённые операторы.

Теорема. *1. Матрица любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ в любом ортонормированном базисе совпадает с матрицей билинейной функции $\beta(\mathcal{A})$ в том же базисе.*

2. Отображение $\beta\colon \mathscr{L}(V) \to \mathscr{B}(V)$ — изоморфизм.

Теорема. *Для каждого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ сопряжённый оператор $\mathcal{A}^*$ существует и единствен, причём в любом ортонормированном базисе его матрица равна транспонированной матрице самого оператора $\mathcal{A}$.*

Лекция 12. *Ортогональные и самосопряжённые операторы. Эрмитовы пространства.*

35. Самосопряжённые операторы. Приведение квадратичной функции к главным осям.

Теорема. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V самосопряжен $\iff$ его матрица в некотором ортонормированном базисе симметрична $\iff$ его матрица в произвольном ортонормированном базисе симметрична.*

Предложение. *Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ — самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве V и U — подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ тоже инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

Теорема. *Для любого самосопряжённого линейного оператора $\mathcal{A}$ в n-мерном евклидовом пространстве V найдётся ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна.*

Следствие. *Для оператора $\mathcal{A}$ следующие условия равносильны:*

1. *оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён;*
2. *существует ортонормированный базис, в котором матрица $\mathcal{A}$ диагональна;*
3. *если A — матрица $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе, то существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D, для которых $A = T^{-1}DT$.*

Теорема. *1. Сумма самосопряженных линейных операторов и произведение самосопряженного оператора на вещественное число являются самосопряженными операторами.*

2. Композиция двух самосопряженных операторов является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.

Теорема. *Пусть V — n-мерное евклидово пространство и $b : V \times V \to \mathbb{R}$ — симметричная билинейная функция. Тогда в V существует ортонормированный базис $\boldsymbol{E}$, в котором квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{R}$, соответствующая b, записывается в виде суммы квадратов с коэффициентами:*

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и x_i — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.
Пусть B есть матрица билинейной формы в некотором ортонормированном базисе. Тогда $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ есть корни (без учета кратности) характеристического многочлена $\chi_{_B}(\lambda)$ матрицы B.

36. Канонический вид ортогонального оператора

Предложение. *Собственные значения ортогонального линейного оператора равны ± 1.*

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве V и U — подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ тоже инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

Теорема. *Оператор в евклидовом пространстве ортогонален тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица имеет блочно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{matrix} & & & & & & & & & 0\\ & \begin{matrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{matrix} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \begin{matrix}\cos\alpha_k & -\sin\alpha_k\\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k\end{matrix} & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторых $k \le n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Блоки (-1) и/или (1) могут отсутствовать.

Теорема. *Ортогональные операторы в евклидовом пространстве V образуют подгруппу группы* $\mathrm{GL}(n)$.

37. Положительно и неотрицательно определённые самосопряженные линейные операторы. Полярное разложение оператора над $\mathbb{R}$.

Лемма. *Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве положительно (неотрицательно) определён тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).*

Лемма. *Для всякого положительно (неотрицательно) определённого самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве существует единственный положительно (неотрицательно) определённый самосопряжённый оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ — квадратный корень из $\mathcal{A}$.*

Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в евклидовом пространстве и $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{B}\boldsymbol{x}, \mathcal{B}\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Тогда существует ортогональный оператор $\mathcal{O}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{B}$.*

Теорема (о полярном разложении над $\mathbb{R}$)**.** *Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве существуют* полярные разложения *$\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{S}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{O}$, где $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ — неотрицательно определённые самосопряжённые операторы и $\mathcal{O}$ — ортогональный оператор. Если $\mathcal{A}$ невырожден, то $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ определены однозначно.*

38. Унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное проектирование и расстояние в унитарном пространстве. Унитарные матрицы. Изоморфизм унитарных пространств.

Лемма (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца)**.** *Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ унитарного пространства $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \le (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пропорциональны.*

Следствие (неравенство треугольника)**.**

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Лемма (Теорема Пифагора)**.** *Если $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, то $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2$.*

Предложение. *Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Предложение. *Базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ унитарного пространства ортонормирован тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

1. *для любых* $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ *и* $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\overline{y}_1 + \dots + x_n\overline{y}_n$;
2. *координаты любого вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *вычисляются по формуле* $x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$ *для* $i \le n$, *т.е.* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \dots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n$.

Теорема. *Во всяком конечномерном унитарном пространстве имеется ортонормированный базис. Более того, ортонормированный базис любого его подпространства можно дополнить до ортонормированного базиса всего пространства.*

Теорема. *Расстояние от вектора* $\boldsymbol{x}$ *конечномерного унитарного пространства* V *до подпространства* U *равно* $|\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|$, *причём единственным ближайшим к* $\boldsymbol{x}$ *вектором подпространства* U *является* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$.

Теорема. *Любые два* n*-мерных унитарных пространства изоморфны.*

39. Линейные операторы в унитарных пространствах. Сопряжённые операторы в унитарном пространстве. Самосопряжённые операторы в унитарном пространстве. Приведение квадратичной функции к главным осям над $\mathbb{C}$.

Теорема. 1. *Матрица любого линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *в любом ортонормированном базисе совпадает с транспонированной матрицей полуторалинейной функции* $\alpha(\mathcal{A})$ *в том же базисе.*

2. *Отображение* α *из пространства* $\mathscr{L}(V)$ *линейных операторов в* V *в пространство* $\mathscr{B}(V)$ *полуторалинейных функций на* V *— изоморфизм.*

Теорема. *Для каждого линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *с матрицей* A *в некотором (любом) ортонормированном базисе сопряжённый оператор* $\mathcal{A}^*$ *существует и единствен, его матрица в том же базисе есть* эрмитово сопряжённая *к* A *матрица* $\overline{A}^T$.

Теорема. *Линейный оператор* $\mathcal{A}$ *в унитарном пространстве* V *самосопряжён* $\iff$ *его матрица в некотором ортонормированном базисе эрмитова* $\iff$ *его матрица в произвольном ортонормированном базисе эрмитова.*

Теорема. *Для любого самосопряжённого линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в конечномерном унитарном пространстве* V *найдётся ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна и вещественна.*

Следствие. *Для оператора* $\mathcal{A}$ *в конечномерном унитарном пространстве следующие условия равносильны:*

1. *оператор* $\mathcal{A}$ *самосопряжён;*
2. *существует ортонормированный базис, в котором матрица* $\mathcal{A}$ *диагональна и вещественна;*
3. *если* A *— матрица* $\mathcal{A}$ *в любом ортонормированном базисе, то существуют унитарная матрица* T *и вещественная диагональная матрица* D, *для которых* $A = T^{-1}DT$.

Теорема. 1. *Сумма самосопряжённых линейных операторов в унитарном пространстве и произведение самосопряжённого оператора на вещественное число являются самосопряжёнными операторами.*

2. *Композиция двух самосопряжённых операторов в унитарном пространстве является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.*

Теорема. *Пусть* V *—* n*-мерное унитарное пространство и* $b : V \times V \to \mathbb{C}$ *— эрмитова полуторалинейная функция. Тогда в* V *существует ортонормированный базис* $\boldsymbol{E}$, *в котором* *квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{C}$, соответствующая b, записывается в виде суммы квадратов с вещественными коэффициентами:*

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и x_i — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

40. Унитарные операторы. Комплексификация евклидова пространства. Полярное разложение над $\mathbb{C}$.

Теорема. *Линейный оператор $\mathcal{A} : V \to V$ в конечномерном унитарном пространстве V является унитарным $\iff$ его матрица в некотором ортонормированном базисе унитарна $\iff$ его матрица в произвольном ортонормированном базисе унитарна.*

Следствие. *Линейный оператор в конечномерном унитарном пространстве унитарен $\iff$ он переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис $\iff$ он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Теорема. *Линейный оператор в унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.*

Следствие. *Все собственные значения унитарного линейного оператора по модулю равны* 1.

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — унитарный линейный оператор в унитарном пространстве V и U — подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ тоже инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

Теорема. *Линейный оператор в конечномерном унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица диагональна, причём все её диагональные элементы по модулю равны 1.*

Лемма. *Самосопряжённый оператор в конечномерном унитарном пространстве положительно (неотрицательно) определён тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).*

Лемма. *Для всякого положительно (неотрицательно) определённого самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном унитарном пространстве существует единственный положительно (неотрицательно) определённый самосопряжённый оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ — квадратный корень из $\mathcal{A}$.*

Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в конечномерном унитарном пространстве и $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{B}\boldsymbol{x}, \mathcal{B}\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Тогда существует унитарный оператор $\mathcal{U}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{U} \circ \mathcal{B}$.*

Теорема (о полярном разложении над $\mathbb{C}$)**.** *Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном унитарном пространстве существуют* полярные разложения *$\mathcal{A} = \mathcal{U} \circ \mathcal{S}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{U}$, где $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ — неотрицательно определённые самосопряжённые операторы и $\mathcal{U}$ — ортогональный оператор. Если $\mathcal{A}$ невырожден, то $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ определены однозначно.*

Лекция 13. *Аффинные пространства, I*

41. Аффинные пространства. Аффинная система координат. Барицентрические координаты. Изоморфизм аффинных пространств.

Теорема. *Пусть $\mathbb{A}$ — n-мерное аффинное пространство и $X_0, \dots, X_k \in \mathbb{A}$. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *точки $X_0, \dots, X_k \in \mathbb{A}$ аффинно независимы;*

2. *ранг матрицы, составленной из их координат относительно некоторого (любого) репера с началом координат X_0, равен k;*

3. *ранг матрицы, составленной из их барицентрических координат относительно некоторых (любых) $n+1$ аффинно независимых точек равен $k+1$.*

Теорема. *Два конечномерных аффинных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

Предложение. *Точки $A_0, \ldots, A_k \in \mathbb{A}$ аффинно независимы $\iff$ они не содержатся ни в какой плоскости размерности $< k$.*

Теорема. 1. *Через любые $k+1$ точек аффинного пространства проходит плоскость размерности $\leq k$.*

2. *Если эти точки аффинно независимы, то через них проходит единственная плоскость размерности k.*

Предложение. *Пусть $S \subset \mathbb{A}$ и $M \subset S$ аффинно независимо. Множество M является максимальным аффинно независимым множеством в $S \iff S \subset \operatorname{Aff} M$.*

Лекция 14. *Аффинные пространства, II*

42. Аффинные подпространства. Взаимное расположение плоскостей.

Теорема (геометрическая характеризация аффинных подпространств)**.** *Пусть $K \neq \mathbb{F}_2$. Непустое множество $S \subset \mathbb{A}$ является плоскостью $\iff$ вместе с любыми двумя различными точками оно содержит проходящую через них прямую.*

Теорема. *Пусть $\pi = A + U$ и $\rho = B + W$ — две плоскости. Тогда*

$$\operatorname{Aff}(\pi \cup \rho) = A + \langle \{\overrightarrow{AB}\} \cup (U + W) \rangle.$$

Пусть $\mathbb{A}$ конечномерно. Если $\pi \cap \rho \neq \varnothing$, то справедлива формула Грассмана

$$\dim \operatorname{Aff}(\pi \cup \rho) = \dim \pi + \dim \rho - \dim(\pi \cap \rho).$$

Если $\pi \cap \rho = \varnothing$, то

$$\dim \operatorname{Aff}(\pi \cup \rho) = \dim \pi + \dim \rho + 1 - \dim(U \cap W).$$

43. Аффинно-линейные функции. Дифференциал аффинно-линейной функции. Аффинные отображения. Дифференциал аффинного отображения.

Предложение. *Барицентрические координаты относительно любых аффинно независимых точек в n-мерном аффинном пространстве — аффинно-линейные функции.*

Предложение. *Ядро $\operatorname{Ker} f$ аффинно-линейной функции $f \colon \mathbb{A} \to K$ с дифференциалом $df \colon V \to K$ либо пусто, либо является плоскостью и равно $A + \operatorname{Ker} df$, где A — произвольная точка, удовлетворяющая условию $f(A) = 0$.*

Теорема. *Пусть $\mathbb{A}$ — аффинное пространство размерности n. Тогда*

1. *Множество точек из $\mathbb{A}$, координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений ранга r, образуют $(n-r)$-мерную плоскость $\pi \subset \mathbb{A}$.*

2. *Произвольная k-мерная плоскость в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ состоит из всех точек, координаты которых относительно произвольного репера составляют множество решений некоторой системы линейных уравнений ранга $n-k$.*

Теорема. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— аффинные пространства над векторными пространствами* V *и* W*. Отображение* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *аффинно* $\iff$ *существуют точка* $O \in \mathbb{A}$ *и линейное отображение* $\varphi\colon V \to W$ *такие, что* $f(O + \boldsymbol{v}) = f(O) + \varphi(\boldsymbol{v})$ *для любого* $\boldsymbol{v} \in V$*. При этом* $\varphi = df$*.*

Предложение. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— аффинные пространства над векторными пространствами* V *и* W *и* $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *— отображение. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *отображение* f *— изоморфизм аффинных пространств;*
2. *отображение* f *аффинно и биективно;*
3. *отображение* f *аффинно и его дифференциал* $df : V \to W$ *биективен, т.е. является изоморфизмом векторных пространств* V *и* W*.*

Теорема. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— аффинные пространства над векторными пространствами* V *и* W*. Отображение* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *аффинно* $\iff$ *для любой барицентрической линейной комбинации* $\sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_i X_i$ *любых точек* $X_0, \ldots, X_k \in \mathbb{A}$ $f\Big(\sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_i X_i\Big) = \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_i f(X_i)$*.*

Следствие. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— аффинные пространства над векторными пространствами* V *и* W *и* $\dim \mathbb{A} = n$*. тогда для любых аффинно независимых точек* $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$ *и любых точек* $B_0, B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{B}$ *существует единственное аффинное отображение* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *с тем свойством, что* $f(A_i) = B_i$ *для* $i = 0, 1, \ldots, n$*.*

44. Матрица аффинного отображения. Аффинные операторы. Матрица аффинного оператора.

Для аффинных отображений:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_m \end{pmatrix}}, \quad \text{или} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \text{или} \quad \boxed{\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + o'_1, \\ \quad \ldots \\ x'_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + o'_m \end{cases}}.$$

$$\boxed{\widehat{\tilde{A}} = \widehat{T}_B^{-1} \widehat{A}\ \widehat{T}_A} \qquad \text{и} \qquad \boxed{\tilde{A} = T_B^{-1} A\ T_A}$$

Для аффинных операторов:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_n \end{pmatrix}}, \quad \text{или} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \text{или} \quad \boxed{\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + o'_1, \\ \quad \ldots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + o'_n \end{cases}}.$$

$$\boxed{\widehat{\tilde{A}} = \widehat{T}^{-1} \widehat{A}\ \widehat{T}} \qquad \text{и} \qquad \boxed{\tilde{A} = T^{-1} A\ T}$$

Предложение. 1. *Любой сдвиг является аффинным оператором с тождественным дифференциалом.*

2. *Любой аффинный оператор с тождественным дифференциалом — сдвиг.*
3. *Множество* $\mathcal{T}(\mathbb{A})$ *всех сдвигов аффинного пространства* $\mathbb{A}$ *является подгруппой группы* $\mathrm{GA}(\mathbb{A})$*, изоморфная аддитивной группе векторного пространства* V*.*

Теорема. *Пусть* $A \in \mathbb{A}$*. Тогда каждое аффинное преобразование* $f \in \mathrm{GA}(\mathbb{A})$ *однозначно представляется в виде композиций*

$$f = t_{\boldsymbol{v}} \circ g_A \qquad \text{и} \qquad f = g_A \circ t_{\boldsymbol{w}},$$

где $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ *и* $g_A \in \mathrm{G}_A$*. Таким образом,* $\mathrm{GA}(\mathbb{A}) = \mathrm{G}_A\ \mathrm{T}(\mathbb{A}) = \mathrm{T}(\mathbb{A})\ \mathrm{G}_A$*.*

45. Евклидовы аффинные пространства. Аффинные операторы в евклидовых пространствах.

Теорема. *Любые аффинно-евклидовы пространства $\mathbb{A}$ (над евклидовым пространством V) и $\tilde{\mathbb{A}}$ (над $\tilde{V}$) одинаковой размерности изоморфны.*

Теорема. *Для любых двух плоскостей $\pi = A + U$ и $\tau = B + W$ расстояние $\rho(\pi, \tau)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ в V относительно подпространства $U + W$.*

Теорема. *Отображение $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ — движение $\iff$ f — аффинное отображение с ортогональным дифференциалом.*

Теорема. *Для любого движения $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ найдётся вектор $\boldsymbol{u} \in V$ такой, что $df(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ и $f = t_{\boldsymbol{u}} \circ \Phi$, где Φ — движение с неподвижной точкой.*

Следствие.

1. *Если $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ — движение и df не имеет собственных векторов с собственным значением 1, то f имеет неподвижную точку.*
2. *Если $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ — движение и df имеет собственный вектор $\boldsymbol{u}$ с собственным значением 1, то прямая $f(O) + \langle \boldsymbol{u} \rangle$ состоит из неподвижных точек отображения $t_{-\boldsymbol{u}} \circ f$.*

46. Аффинно-квадратичные функции. Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду. Аффинно-квадратичные функции в аффинно-евклидовых пространствах. Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду в аффинно-евклидовых пространствах.

Теорема. *Для любой аффинно-квадратичной функции $Q : \mathbb{A} \to K$, не являющейся аффинно-линейной, существует репер $(O, \boldsymbol{E})$, в котором Q имеет вид*

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + a_0, \qquad r \leq n, \tag{$*$}$$

или

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2x_{r+1}, \qquad r < n, \tag{$**$}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$.

Теорема. *Для любой аффинно-квадратичной функции $Q : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, не являющейся аффинно-линейной, существует прямоугольная система координат $(O, \boldsymbol{E})$, в которой Q имеет вид*

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + a_0, \qquad r \leq n, \tag{$*$}$$

или

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2\lambda_{r+1} x_{r+1}, \qquad r < n, \tag{$**$}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\lambda_{r+1} > 0$. Этот вид определён однозначно с точностью до нумерации переменных.

47. Квадрики. Аффинная и метрическая классификация квадрик.

Предложение. *Любая прямая либо целиком лежит на квадрике, либо пересекается с ней в не более чем двух точках.*

Предложение. *Если O — вершина квадрики $\Gamma(Q)$ и $A \in \Gamma(Q)$, $A \neq O$, то вся прямая, проходящая через точки O и A, содержится в квадрике $\Gamma(Q)$.*

Предложение. *Любая квадрика содержит точку, не являющуюся ее вершиной.*

Теорема. *Если K — бесконечное поле характеристики $\neq 2$ и Q_1 и Q_2 — две аффинно-квадратичные функции $\mathbb{A} \to K$, для которых $\Gamma(Q_1)$ и $\Gamma(Q_2)$ — квадрики и $\Gamma(Q_1) = \Gamma(Q_2)$, то эти функции пропорциональны.*

Следствие. *В аффинном пространстве над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$ центр любой квадрики $\Gamma(Q)$ является также и центром аффинно-квадратичной функции Q.*

Теорема. *В n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$ уравнение любой квадрики выбором системы координат приводится к одному из видов*

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 0, \qquad r \leq n,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 1, \qquad r \leq n,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 2x_{r+1}, \qquad r < n,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$.
В случае $K = \mathbb{C}$ ($K = \mathbb{R}$) уравнение квадрики можно привести к виду, в котором $\lambda_i = 1$ для всех $i \leq r$ ($\lambda_i = \pm 1$ для всех $i \leq r$), причём этот вид определён однозначно.

Теорема. *В n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$ уравнение любой квадрики выбором системы координат приводится к одному из видов*

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 0, \qquad r \leq n,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 1, \qquad r \leq n,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 2x_{r+1}, \qquad r < n,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$.
В случае $K = \mathbb{C}$ ($K = \mathbb{R}$) уравнение квадрики можно привести к виду, в котором $\lambda_i = 1$ для всех $i \leq r$ ($\lambda_i = \pm 1$ для всех $i \leq r$), причём этот вид определён однозначно.

Теорема. *В аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$ две аффинно-квадратичные функции $Q_1 : \mathbb{A} \to K$ и $Q_2 : \mathbb{A} \to K$ задают аффинно эквивалентные квадрики тогда и только тогда, когда выражения для этих функций относительно некоторых реперов $(O, \boldsymbol{E})$ и $(O', \boldsymbol{E}')$ совпадают с точностью до ненулевого скалярного множителя.*

Следствие. *В n-мерном вещественном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ любая квадрика аффинно эквивалентна ровно одной из квадрик*

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = 1, \qquad k \geq 0,\ l > 0,\ k + l \leq n,$$

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = 0, \qquad 0 \leq l \leq k, k + l \leq n,$$

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = 2x_{k+l+1}, \qquad 0 \leq l \leq k, k + l \leq n.$$

Теорема. *В n-мерном аффинно-евклидовом пространстве уравнение любой квадрики выбором прямоугольной системы координат приводится к одному из видов*

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 1, \qquad r \leq n,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 0, \qquad r \leq n,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 2x_{r+1}, \qquad r < n,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$.
Для первого вида числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ определены однозначно с точностью до перестановки. Для второго вида числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ определены однозначно с точностью до перестановки и одновременного умножения на ненулевое число. Для третьего вида числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ определены однозначно с точностью до перестановки и одновременного умножения на -1.

Теорема. *Если в аффинно-евклидовом пространстве $\mathbb{A}$ две аффинно-квадратичные функции $Q_1 : \mathbb{A} \to K$ и $Q_2 : \mathbb{A} \to K$ задают квадрики, то эти квадрики метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда выражения для функций Q_1 и Q_2 относительно некоторых ортонормированных реперов $(O, \boldsymbol{E})$ и $(O', \boldsymbol{E}')$ совпадают с точностью до ненулевого скалярного множителя.*

Лекция 15. *Полилинейные функции*

48. Полилинейные функции. Сопряженное пространство к пространству полилинейных функций.

Теорема (о базисе полилинейных функций)**.** *Система полилинейных функций*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m} \quad \text{где } j_i = 1, \dots, n_i \text{ и } i = 1, \dots, m$$

является базисом $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$. Для $\varphi \in \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$,

$$\varphi = \sum_{j_i = 1, \dots, n_i \text{ для } i = 1, \dots, m} b_{j_1 \dots j_m} \boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}, \quad \text{где } b_{j_1 \dots j_m} = \varphi(\boldsymbol{e}_{1j_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{mj_m}).$$

Теорема. *Система полилинейных функций*

$$\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m} \quad \text{где } j_i = 1, \dots, n_i \text{ и } i = 1, \dots, m$$

является базисом $\mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$. Для $\psi \in \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$,

$$\psi = \sum_{j_i = 1, \dots, n_i \text{ для } i = 1, \dots, m} d_{j_1 \dots j_m} \boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m}, \quad \text{где } d_{j_1 \dots j_m} = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}).$$

Лемма. *Отображение δ полилинейно.*

Теорема (о каноническом изоморфизме $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^*$ и $\mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$)**.** *Отображение*

$$\Psi \colon \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^* \to \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*), \quad \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \circ \delta$$

является изоморфизмом, где

$$\delta \colon V_1^* \times \dots V_m^* \to \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m), \quad (\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_m) \mapsto \boldsymbol{l}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{l}_m.$$

Лекция 16. *Тензорное произведение*

49. Тензорное произведение.

Предложение. *Пусть U векторное пространство и $\theta : V_1 \times \dots \times V_m \to U$ полилинейное отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1. *для любой полилинейной функции $\varphi : V_1 \times \dots \times V_m \to K$ существует единственный функционал $\boldsymbol{l} \colon U \to K$, для которого $\boldsymbol{l} \circ \theta = \varphi$;*
2. *$\langle \theta(V_1 \times \dots \times V_m) \rangle = U$ и для любой полилинейной функции $\varphi : V_1 \times \dots \times V_m \to K$ существует функционал $\boldsymbol{l} \colon U \to K$, для которого $\boldsymbol{l} \circ \theta = \varphi$.*

Следствие. *Пара (θ, U) является тензорным произведением пространств $V_1, \dots, V_n$ если и только если $\langle \theta(V_1 \times \dots \times V_m) \rangle = U$ и для любого полилинейного отображения $\Phi : V_1 \times \dots \times V_m \to V$ существует линейное отображение $\mathcal{A} \colon U \to V$, для которого $\mathcal{A} \circ \theta = \Phi$.*

Теорема (о характеризация тензорного произведения)**.** *Пара (θ, U) является тензорным произведением пространств $V_1, \dots, V_n$ если и только если для любой полилинейной функции $\varphi : V_1 \times \dots \times V_m \to$*

K существует единственное линейное отображение $\boldsymbol{l}\colon U \to K$, для которого $\boldsymbol{l}\circ\theta = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_m \arrow[rr, "\forall\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & & K \\ U \arrow[urr, "\exists!\boldsymbol{l}"'] & & \end{tikzcd}$$

Лемма. *Пусть $f, g\colon X \to V$. Тогда $f = g$ если и только если $\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ f = \boldsymbol{\varepsilon}_i \circ g$ для всех $i = 1, \dots, n$.*

Теорема (о каноническом изоморфизме $\mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)^*$ и $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$)**.** *Отображение*

$$\widetilde{\Psi}\colon \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)^* \to \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m), \quad \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}\circ\tilde{\delta}$$

является изоморфизмом, где

$$\tilde{\delta}\colon V_1 \times \dots V_m \to \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*), \quad (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) \mapsto \boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_m.$$

Отображение $\tilde{\delta}$ полилинейно и $\langle\tilde{\delta}(V_1 \times \dots \times V_m)\rangle = \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$.

Следствие. *Для любой полилинейной функции $\varphi : V_1 \times \dots \times V_m \to K$ существует единственная линейная функция $\boldsymbol{l}\colon \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*) \to K$, для которого $\boldsymbol{l}\circ\tilde{\delta} = \varphi$.*

Теорема (о существовании тензорного произведения)**.** *Пара $(\tilde{\delta}, \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*))$ является тензорным произведением для $V_1, \dots, V_m$.*

50. Сопряженное к тензорному произведению пространство. Базис и переход к новой системе координат в тензорных произведениях. Тензорное произведение эвклидовых пространств.

$$\boxed{(V_1 \otimes \dots \otimes V_m)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_m^*.}$$

$$\boxed{\varphi(\psi) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \boldsymbol{l}_{1i}(\boldsymbol{x}_{1j}) \dots \boldsymbol{l}_{mi}(\boldsymbol{x}_{mj}),}$$

$$\boxed{b'_{j_1' \dots j_m'} = \sum_{j_i = 1, \dots, n_i \text{ для } i = 1, \dots, m} c_{1 j_1 j_1'} \dots c_{m j_m j_m'} b_{j_1 \dots j_m}.}$$

$$\boxed{d_{j_1 \dots j_n} = \sum_{j_i' = 1, \dots, n_i \text{ для } i = 1, \dots, m} c_{1 j_1 j_1'} \dots c_{m j_m j_m'} d'_{j_1' \dots j_m'}.}$$

$$\boxed{(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} (\boldsymbol{y}_{1i}, \boldsymbol{x}_{1j}) \dots (\boldsymbol{y}_{mi}, \boldsymbol{x}_{mj}).}$$

Лекция 17. *Тензоры*

51. Тензоры. Примеры. Пространство тензоров. Координаты тензора. Переход в новую систему координат. Арифметические операции над тензорами.

Координаты тензора

$$\boldsymbol{t} = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q},$$

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{j_q}).$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q) &= \boldsymbol{t}(x^{1i_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,x^{2i_2}\boldsymbol{e}_{i_2};f_{1j_1}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1},\dots,f_{qj_q}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_q})\\ &= \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_p};\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1},\dots,\boldsymbol{\varepsilon}^{j_q})x^{1j_1}\dots x^{2j_2}f_{1i_1}\dots f_{qi_q}\\ &= t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}x^{1i_1}\dots x^{2i_2}f_{1j_1}\dots f_{qj_q}.\end{aligned}$$

Переход в новую систему координат

$$\tilde{t}^{m_1\dots m_q}_{k_1\dots k_p} = \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{k_1},\dots,\tilde{\boldsymbol{e}}_{k_p};\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m_1},\dots,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m_q}) = \boldsymbol{t}(c^{i_1}_{k_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,c^{i_p}_{k_p}\boldsymbol{e}_{i_p};s^{m_1}_{j_1}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1},\dots,s^{m_q}_{j_q}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_q}) =$$

$$= c^{i_1}_{k_1}\cdot\ldots\cdot c^{i_p}_{k_p}\cdot s^{m_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot s^{m_q}_{j_q}\cdot t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}. \tag{$*$}$$

Арифметические операции над тензорами

$$(\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{t}')(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{x}_{p+1},\dots,\boldsymbol{x}_{p+p'};\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q,\boldsymbol{f}^{q+1},\dots,\boldsymbol{f}^{q+q'}) =$$

$$= \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q)\cdot\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{x}_{p+1},\dots,\boldsymbol{x}_{p+p'};\boldsymbol{f}^{q+1},\dots,\boldsymbol{f}^{q+q'}).$$

Лекция 19. *Свёртка*

52. Свёртка тензоров. Примеры.

$$\bar{\boldsymbol{t}} = t^{j_1\dots j_{\beta-1}kj_{\beta+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{\alpha-1}ki_{\alpha+1}\dots i_p}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_{\alpha-1}}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_{\alpha+1}}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_{\beta-1}}\otimes\boldsymbol{e}_{j_{\beta+1}}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q}.$$

Предложение. *Для* $\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_{p-1}\in V$ *и* $\boldsymbol{g}^1,\dots,\boldsymbol{g}^{q-1}\in V^*$,

$$\bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_{p-1};\boldsymbol{g}^1,\dots,\boldsymbol{g}^{q-1}) =$$
$$= \boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_{\alpha-1},\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{y}_\alpha,\dots,\boldsymbol{y}_{p-1};\boldsymbol{g}^1,\dots,\boldsymbol{g}^{\beta-1},\boldsymbol{\varepsilon}^k,\boldsymbol{g}^\beta,\dots,\boldsymbol{g}^{q-1}).$$

Лекция 20. *Тензоры в евклидовом пространстве. Опускание и поднятие индексов.*

53. Тензоры в евклидовом пространстве. Опускание и поднятие индексов.

$$\boxed{{t'}_{k_1\dots k_pk_{p+1}\dots k_{p+q}} = g_{i_1k_{p+1}}\cdot\ldots\cdot g_{i_qk_{p+q}}\cdot t^{i_1\dots i_q}_{k_1\dots k_p}}.$$
$$\boxed{t'^{k_1\dots k_pk_{p+1}\dots k_{p+1}} = g^{k_1i_1}\cdot\ldots\cdot g^{k_pi_p}\cdot t^{k_{p+1}\dots k_{p+q}}_{i_1\dots i_p}}$$

$$\boxed{{t'}^{m_1\dots m_{\beta-1}m_{\beta+1}\dots m_q}_{k_1\dots k_{\alpha-1}m'_\beta k_\alpha\dots k_p} = g_{m'_\beta m_\beta}t^{m_1\dots m_q}_{k_1\dots k_p}.}$$

$$\boxed{{t'}^{m_1\dots m_{\beta-1}k'_\alpha m_\beta\dots m_q}_{k_1\dots k_{\alpha-1}k_{\alpha+1}\dots k_p} = g^{k'_\alpha k_\alpha}t^{m_1\dots m_q}_{k_1\dots k_p}.}$$

Лекция 21. *Симметрирование и альтернирование.*

54. Симметрирование и альтернирование.

Предложение. 1 $\operatorname{Im}\operatorname{Sym} = ST_p(V)$, 2 $\operatorname{Sym}^2 = \operatorname{Sym}$.

Предложение. $\dim ST_p(V) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$ *(число сочетаний с повторениями из* n *по* p*).*

Предложение. *1.* $\operatorname{Im}\operatorname{Alt} = \bigwedge T_p(V)$,

2. $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt}$,

3. $\operatorname{Alt} \vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn} \pi \operatorname{Alt} \boldsymbol{t}$ *для всех* $\pi \in S_p$ *и* $\boldsymbol{t} \in T_p^0(V)$.

Предложение. $\dim \bigwedge T_p(V) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *(число сочетаний из* n *по* p*).*

Предложение. *Операции* Sym *и* Alt *ассоциативны и дистрибутивны.*

Предложение. ① $\operatorname{Im} \operatorname{Sym} = ST_p(V)$, ② $\operatorname{Sym}^2 = \operatorname{Sym}$.

Предложение. $\dim ST_p(V) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$ *(число сочетаний с повторениями из* n *по* p*).*

Лекция 22. *Тензорная алгебра. Симметрическая алгебра. Алгебра Грассмана. Плюккеровы координаты*

55. Тензорная алгебра. Симметрическая алгебра.

Универсальное свойство тензорной алгебры пространства V
Симметрическая степень существует:
Определение симметрической степени не зависит от выбора базиса $\boldsymbol{E}$
Симметрическая степень единственна
Универсальное свойство симметрической степени
Универсальное свойство симметрической алгебры

Предложение. *Для каждого* $q \in \mathcal{N}$ *отображение* $\mu\colon \bigwedge^q(V) \to \bigwedge T^q(V)$, *определённое правилом* $(\boldsymbol{x}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{x}_q) \mapsto \operatorname{Alt}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_q)$, *является изоморфизмом.*

Предложение. *Если* K *— поле характеристики* 0, *то для каждого* $q \in \mathcal{N}$ *отображение*

$$\mu\colon S^q(V) \to ST^q(V), \qquad (\boldsymbol{x}_1 \vee \cdots \vee \boldsymbol{x}_q) \mapsto \operatorname{Sym}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_q),$$

является изоморфизмом.

56. Алгебра Грассмана. Плюккеровы координаты.

Универсальное свойство внешней степени.
Универсальное свойство алгебры Грассмана

Предложение. *Для каждого* $q \in \mathcal{N}$ *отображение* $\mu\colon \bigwedge^q(V) \to \bigwedge T^q(V)$, *определённое правилом* $(\boldsymbol{x}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{x}_q) \mapsto \operatorname{Alt}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_q)$, *является изоморфизмом.*

Теорема. 1. *Система векторов* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ *в пространстве* V *линейно зависима* $\iff$ $\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$.

2. *Если системы векторов* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ *и* $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_p\}$ *в* V *линейно независимы, то* $\langle\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}\rangle = \langle\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_p\}\rangle \iff$ p-*векторы* $\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_p$ *и* $\boldsymbol{w}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}_p$ *пропорциональны.*