

Программа спецкурса «Топологические группы (на англ. языке)»
(предварительная версия от 18 мая)

1. Топологическая группа, групповая топология. Простейшие свойства топологических групп (однородность, аксиомы отделимости).
2. Подгруппы и факторгруппы топологических групп.
3. Критерий того, что семейство подмножеств группы является базой окрестностей единицы в некоторой групповой топологии. Свойства базы окрестностей единицы.
4. Топологизируемость групп. Счётный и несчётный примеры нетопологизируемых групп.
5. Пересечение окрестностей единицы в топологической группе. Представление замыкания множества в топологической группе как пересечения произведений этого множества и окрестностей единицы.
6. Произведения открытых и замкнутых подмножеств топологической группы. Замкнутость произведения замкнутого и компактного подмножеств.
7. Произведения связных подмножеств топологической группы. Компонента связности единицы в топологической группе.
8. Теорема ван Данцига о вполне несвязной локально компактной топологической группе. Следствие: топология компактной вполне несвязной топологической группы порождается открытыми нормальными подгруппами.
9. Теорема Эллиса: если G — группа с компактной хаусдорфовой топологией \mathcal{T} , относительно которой умножение раздельно непрерывно, то \mathcal{T} является групповой топологией.
10. Полунормы на группах. Построение непрерывной полунормы по последовательности окрестностей единицы. Следствия: всякая топологическая группа удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$ и всякая топологическая группа с первой аксиомой счётности метризуема.
11. Топологические векторные пространства. Теорема: всякое конечномерное векторное пространство топологически изоморфно евклидову пространству. Следствие: всякое конечномерное подпространство топологического векторного пространства замкнуто.
12. Теорема: всякое локально компактное векторное пространство конечномерно.
13. Пространство однопараметрических подгрупп локально компактной топологической группы без малых подгрупп. Экспоненциальное отображение. Схема доказательства того, что всякая локально компактная топологическая группа без малых подгрупп локально гомеоморфна евклидову пространству.
14. Свободная топологическая группа, её существование.
15. Операция Мальцева. Непрерывная операция Мальцева, порождённая групповыми операциями на топологической группе.
16. Свойство Суслина. Теорема: всякое σ -компактное топологическое пространство, допускающее непрерывную операцию Мальцева, обладает свойством Суслина. Следствие: всякая σ -компактная топологическая группа обладает свойством Суслина.
17. Теорема Эллиса–Нумакуры о существовании идемпотента в полугруппе, допускающей компактную хаусдорфову топологию, относительно которой полугрупповая операция непрерывна хотя бы по одному аргументу.
18. H -пространство. Коммутативность его фундаментальной группы.