

**Программа спецкурса «Топологические группы»**  
(предварительная версия от 18 мая)

1. Топологическая группа, групповая топология. Простейшие свойства топологических групп (однородность, аксиомы отделимости).
2. Подгруппы и факторгруппы топологических групп.
3. Критерий того, что семейство подмножеств группы является базой окрестностей единицы в некоторой групповой топологии. Свойства базы окрестностей единицы.
4. Топологизируемость топологических групп. Счётный и несчётный примеры нетопологизируемых групп.
5. Пересечение окрестностей единицы в топологической группе. Представление замыкания множества в топологической группе как пересечения произведений этого множества и окрестностей единицы.
6. Произведения открытых и замкнутых подмножеств топологической группы. Замкнутость произведения замкнутого и компактного подмножеств.
7. Произведения связных подмножеств топологической группы. Компонента связности единицы в топологической группе.
8. Теорема ван Даницга о вполне несвязной локально компактной топологической группе. Следствие: топология компактной вполне несвязной топологической группы порождается открытыми нормальными подгруппами.
9. Теорема Эллиса: если  $G$  — группа с компактной хаусдорфовой топологией  $\mathcal{T}$ , относительно которой умножение раздельно непрерывно, то  $\mathcal{T}$  является групповой топологией.
10. Полунормы на группах. Построение непрерывной полунормы по последовательности окрестностей единицы. Следствия: всякая топологическая группа удовлетворяет аксиоме отделимости  $T_{3\frac{1}{2}}$  и всякая топологическая группа с первой аксиомой счётности метризуема.
11. Свободная топологическая группа, её существование.
12. Теорема: для всякого тихоновского пространства  $X$  и всякого натурального  $n$  множество  $F_n(X)$  всех слов длины  $\leq n$  замкнуто в свободной топологической группе  $F(X)$ .
13. Свободная топологическая группа компактного пространства. Теорема: если  $K$  — хаусдорфов компакт, то топология свободной топологической группы  $F(K)$  является топологией индуктивного предела относительно разложения  $F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$ , где  $F_n(X)$  — множество всех слов длины  $\leq n$  (т.е. множество  $U \subset F(X)$  открыто в  $F(X)$  тогда и только тогда, когда  $U \cap F_n(X)$  открыто в  $F_n(X)$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ).
14. Свойство Суслина. Теорема: всякая  $\sigma$ -компактная топологическая группа обладает свойством Суслина.
15. Теорема Эллиса–Нумакуры о существовании идемпотента в полугруппе, допускающей компактную хаусдорфову топологию, относительно которой полугрупповая операция непрерывна хотя бы по одному аргументу.
16. Фильтры и ультрафильтры. Главные и неглавные ультрафильтры. Основное свойство ультрафильтра. Топологическое пространство  $\beta X$  ультрафильтров на множестве  $X$ , его топологические свойства (компактность, существование непрерывных продолжений отображений  $X$  в хаусдорфовы компакты).
17. Полугруппа ультрафильтров на полугруппе  $S$ . Теорема Хиндмана.
18. Теорема Арнаутова о том, что ни в каком бесконечном кольце ноль не алгебраически изолирован, т.е. дополнение до нуля нельзя представить как объединение конечного числа множеств корней многочленов.