Линейная алгебра и геометрия

Лекция 24. Квантовые компьютеры.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Механическая система описывается с помощью двух множеств, $\mathcal{L}$ — множество состояний системы, $\mathcal{A}$ — множество наблюдаемых параметров системы и отображения

$$\mathcal{A} \times \mathcal{L} \to \mathbb{R}, \quad (f, \omega) \mapsto \langle f | \omega \rangle,$$

где $\langle f|\omega\rangle$ значение наблюдаемой f на состотоянии ω. При эволюции системы (изменение) величина значение наблюдаемой $\langle f|\omega\rangle$ меняется со временем — $\langle f(t)|\omega(t)\rangle$.

Есть два подхода: (1) наблюдаемая не меняется, состояние меняется; (2) наблюдаемая меняется, состояние не меняется.

Квантовая механика

В квантовой механике наблюдаемые и состояния описываются с помощью пространства состояний $\mathcal{V}$ — (как правило бесконечномерного) эрмитового пространства.

Состояния системы $\mathcal{A}$ — положительные самосопряженные операторы M на $\mathcal{V}$ с $\operatorname{tr} M = 1$.

Наблюдаемые $\mathcal{A}$ — самосопряженные операторы на $\mathcal{V}$.

Для ненулевого $\psi \in \mathcal{V}$ определено чистое состояние P_ψ — ортогональный проектор на направление ψ.

Значение наблюдаемой (точнее, среднее значение вычисление A в M) —

$$\langle M | A \rangle = \operatorname{tr} MA.$$

Значение наблюдаемой на чистом состояние P_ψ ($\|\psi\} = 1$) —

$$\langle M | P_\psi \rangle = (M\psi, \psi).$$

Замечание

Состояния $\mathcal{L}$ образуют выпуклое компактное подмножество и чистые состояния — крайние точки $\mathcal{L}$. Пространство чистых состояний является проективным пространством.

Значение вычисление A в M

Вычисление A в M — это некоторое случайная величина ξ. Рассмотрим случай, когда $M = P_\psi$, $\|\psi\| = 1$.
Пусть e_i есть ортонормированный базис самосопряженного оператора A и $Ae_i = A_i e_i$, где A_i есть собственное значение e_i. Тогда

$$\psi = \sum_i x_i e_i, \;\; x_i = (\psi, e_i), \;\; \sum_i x_i^2 = 1.$$

Случайная величина ξ принимает значения из спектра $\{A_1, A_2, \dots\}$ оператора A, вероятность принятия значения A_i равна x_i^2.

Динамика квантовой механики

Динамика в квантовой механики описывается с помощью специальной наблюдаемой H — гамильтаниан или полная энергия или оператором Шредингера.

Обозначим

$$\{H, A\}_\hbar = \frac{i}{\hbar}[H, A] = \frac{i}{\hbar}(HA - AH)$$

— квантовая скобка Пуассона и

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

— оператор эволюции. Оператор эволюции $U(t)$ является унитарным оператором.

Картина Гейзенберга

Наблюдаемая M не меняется со временем, а состояние $A(t)$ зависит от времени, $A(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d\,A(t)}{dt} = \{H, A(t)\}_{\hbar}.$$

Решение:

$$A(t) = U(t)^{-1} A U(t).$$

Картина Шредингера

Наблюдаемая $M(t)$ зависит от времени, а состояние A не меняется со временем, $M(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d\,M(t)}{dt} = -\{H, M(t)\}_{\hbar}.$$

Решение:

$$M(t) = U(t)MU(t)^{-1}.$$

Рассмотрим зависимость от времени чистых состояний в картине Шредингера, для $M = P_{\psi}$. Тогда $M(t) = P_{\psi(t)}$, где

$$\psi(t) = U(t)\psi.$$

Функция $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{d\,\psi(t)}{dt} = H\psi(t).$$

Стационарные состояния

Состояния, которые не зависят от времени, называются стационарными. Чистое стационарное состояние P_ψ характеризуется тем, что вектор $\psi(t) = U(t)\psi$ коллинеарен состоянию $\psi = \psi(0)$, то есть ψ собственный вектор $U(t)$ для всех t. Это эквивалентно тому, что ψ есть собственный вектор H.

Пусть E собственное значение H и $E\psi = H\psi$. Уравнение Шредингера принимает вид:

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = E\psi(t).$$

Его решения:

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi.$$

Число $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ является комплексным числом, равным по модулю единицей.

Пусть E_j собственные значения и φ_j — собственные вектора H длины один,

$$H\varphi_j = E_j\varphi_j.$$

Если

$$\psi = \sum_j c_j\varphi_j, \quad c_j = (\psi, \varphi_j),$$

то

$$\psi(t) = \sum_j e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} c_j\varphi_j.$$

Это формула разложение решения уравнения Шредингера по стационарным состояниям.

Квантовый вентиль

Пусть в квантовой системе пространство состояний $\mathcal{V}$ конечномерно и H оператор полной энергии. Пусть $\tau > 0$ и $S = U(\tau)$. Унитарный оператор

$$S : V \to V, \ \psi \mapsto \psi(\tau)$$

действует на пространстве состояний, называется квантовым вентилем.

Кубит

Кубит — это квантовая система, в которой пространство состояний двухмерно.

Если есть есть несколько квантовых систем, то пространство состояний объединения этих систем является тензорным произведением пространств состояний. Соответственно, пространство состояний системы, состоящей из n кубитов имеет размерность 2^n.