Линейная алгебра и геометрия

Лекция 23. Специальная теория относительности.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Координаты

Координатами на множестве X будем называть соответствие между X и (некоторым подмножеством) $\mathbb{R}^n$. Далее будем систему координат, систему отсчета на множестве X будем отождествлять с координатами (как соответствием) на X.

Движущая система отсчета это координаты на $\mathbb{R} \times X$.

Точки $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times X$ называются событиями.

Если $\varphi \colon \mathbb{R} \to X$ есть движение некоторой точки (тела) в X (φ может быть определено не на всей прямой времени $\mathbb{R}$), то график

$$\varphi = \{(t, \varphi(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

называется мировой линией точки.

Инерциальные системы отсчёта (ИСО)

Инерциальные системы отсчёта (ИСО) — это движущая системы отсчёта, в которых любой объект сохраняет состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.

Движущая система отсчета является ИСО если и только если мировая линия тела, на которое не действуют другие тела, является прямой линией.

Замечание

Почти наверняка можно доказать, переход от одной ИСО к другой ИСО в $\mathbb{R}^n$ является аффинным преобразованием $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Далее мы будем считать, что ИСО в $\mathbb{R}^n$ это аффинные координаты в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

В разных физиках не все афинные координаты на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ являются ИСО, нужны некоторые дополнительные ограничения.

ИСО в ньютоновской механике

Пусть (t, x_1, x_2, x_3) и (q, y_1, y_2, y_3) два события в $\mathbb{R}^3$ (в некоторой ИСО). Пусть (t', x_1', x_2', x_3') и (q', y_1', y_2', y_3') координаты этих событий в другой ИСО. Тогда $t - q = t' - q'$ и

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \sqrt{(x_1' - y_1')^2 + (x_2' - y_2')^2 + (x_3' - y_3')^2}.$$

Из этого вытекает, что переход от одной ИСО к другой осуществляется с помощью формул

$$\begin{pmatrix} t' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ b_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ b_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^0 \\ x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix},$$

где матрица $C = (c_i j)$ ортогональна.

ИСО в специальной теории относительности (СТО)

Постулат СТО: если тело в одной ИСО движется со скорость света c, то и в другой ИСО также движется со скоростью света.

Пусть

$$\varphi(t) = t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

равномерное движение тела со скоростью тела: $c = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Этому движению соответствует мировая линия:

$$\tilde{\varphi}(t) = t\begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть задан переход от одной ИСО к другой:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{01} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{20} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^0 \\ x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix},$$

Мировая линия в новой системе координат:

$$\tilde{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{01} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{20} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} t^0 \\ x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0' \\ z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{01} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{20} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1'/u_0' \\ u_2'/u_0' \\ u_3'/u_0' \end{pmatrix}.$$

Тогда $\boldsymbol{v}'$ — скорость тела в новой системе координат. Из постулата СТО вытекает $\|\boldsymbol{v}'\| = c$, то есть интервал

$$s(\boldsymbol{v}') = c^2 u_0'^2 - u_1'^2 - u_2'^2 - u_3'^2 = 0$$

равен нулю. Пусть $C = (c_{ij})$.

Получаем: *если* $s(\boldsymbol{u}) = 0$, *то* $s(C\boldsymbol{u}) = 0$.

Отсюда выводится, что для некоторой константы α, $s(C\boldsymbol{u}) = \alpha s(\boldsymbol{u})$ для всех $\boldsymbol{u} \in V$, где V касательное пространство к аффинному пространству $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

В физике считают $\alpha = 1$, так что

$$\boxed{s(C\boldsymbol{u}) = s(\boldsymbol{u}) \text{ для всех } \boldsymbol{u} \in V.}$$

Такие преобразования C называются преобразования Лоренца.