

Линейная алгебра и геометрия

Лекция 22. Тензорная алгебра. Симметрическая алгебра. Алгебра
Грассмана. Плюккерovy координаты.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Дальше всегда предполагается, что V — n -мерное векторное пространство над полем K , хотя почти все конструкции и утверждения без изменений переносятся на бесконечномерные пространства. Предположение конечномерности действительно нужно только в тех местах, где упоминаются сопряжённые пространства.

Прямая сумма векторных пространств

Определение

Прямой суммой конечного числа векторных пространств V_1, \dots, V_k называется векторное пространство $V_1 \oplus \dots \oplus V_k = V_1 \times \dots \times V_k$, составленное из всех последовательностей $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$, где $\mathbf{x}_i \in V_i$, с покомпонентными операциями $\lambda(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = (\lambda\mathbf{x}_1, \dots, \lambda\mathbf{x}_k)$ и $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) + (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k)$.

Прямой суммой $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ бесконечного числа векторных пространств V_1, V_2, \dots называется векторное пространство, составленное из всех последовательностей $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{0}_{k+1}, \mathbf{0}_{k+2}, \dots)$, где $k \in \mathcal{N}$, $\mathbf{x}_i \in V_i$ и $\mathbf{0}_j$ — нули пространств V_j , с покомпонентными операциями.

Каждое пространство V_i изоморфно подпространству прямой суммы $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$, состоящему из всех наборов $(\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{0}_{i+1}, \mathbf{0}_{i+2}, \dots)$, где $\mathbf{x} \in V_i$. Если в пространствах V_i зафиксированы базисы \mathbf{E}_i , то базис пространства $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ составляют всевозможные наборы $(\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{e}, \mathbf{0}_{i+1}, \mathbf{0}_{i+2}, \dots)$, где $i \in \mathcal{N}$ и $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_i$.

Определение

Алгебра A с умножением $*$ называется **градуированной алгеброй**, если как векторное пространство она является прямой суммой своих подпространств: $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$, причём $A_i * A_j \subset A_{i+j}$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}$.

В этом определении некоторые прямые слагаемые A_i могут быть тривиальными. Вместо \mathbb{Z} можно рассматривать \mathcal{N} или любую другую полугруппу.

Положим $T(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q(V)$, где $T^0(V) = K$ и $T^q(V) = T_0^q(V) = V^{\otimes q}$ для $q \in \mathcal{N}$. Элементы $T(V)$ записывают не в виде последовательностей, а в виде сумм

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_l + \cdots + \mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_m$$

— между этими формами записи имеется взаимно однозначное соответствие.

Для любых неотрицательных целых p и q и любых $\mathbf{t} \in T^p(V)$, $\mathbf{s} \in T^q(V)$ определено тензорное произведение $\mathbf{t} \otimes \mathbf{s}$ (см. подраздел «Арифметические операции над тензорами» в начале раздела о тензорах). Операция тензорного умножения билинейна, и для разложимых элементов пространств $T^p(V)$ и $T^q(V)$ она определяется правилом

$$(\mathbf{x}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_p) \otimes (\mathbf{y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{y}_q) = \mathbf{x}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_p \otimes \mathbf{y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{y}_q$$

(а на остальные элементы продолжается по билинейности).

Таким образом, на всей прямой сумме $T(V)$ определена билинейная операция умножения \otimes (между элементами), т.е. $T(V)$ — алгебра. В ней есть единица — это $1 \in K = T^0(V)$. Поскольку для любых $\mathbf{t} \in T^p(V)$ и $\mathbf{s} \in T^q(V)$ имеем $\mathbf{t} \otimes \mathbf{s} \in T^{p+q}(V)$, $T(V)$ является градуированной алгеброй с единицей. Она называется **тензорной алгеброй** пространства V .

Если в V зафиксирован базис $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, то базис векторного пространства $T(V)$ составляют всевозможные элементы вида $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k}$, где $k \in \mathcal{N}$ и $i_j \leq n$.

Точно так же определяется градуированная алгебра с единицей $T_*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_p(V)$, где $T_p(V) = T_p^0(V) = (V^*)^{\otimes p} = T^p(V^*)$. Она является и называется **алгеброй полилинейных функций** на V .

Универсальное свойство тензорной алгебры

Имеем $V \subset_{\text{lin}} T(V)$. Пусть $i: V \hookrightarrow T(V)$ — тождественное вложение.

Универсальное свойство тензорной алгебры пространства V

V — подпространство пространства $T(V)$ и любое линейное отображение $f: V \rightarrow A$ в любую алгебру A над полем K единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебр $\bar{f}: T(V) \rightarrow A$ (отображение $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ из алгебры A_1 с умножением $*_1$ в алгебру A_2 с умножением $*_2$ называется **гомоморфизмом алгебр**, если оно линейно и $\varphi(a *_1 b) = \varphi(a) *_2 \varphi(b)$ для любых $a, b \in A_1$):

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & T(V) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

Действительно, в любой алгебре A с произведением $*$ выполнены определяющие **соотношения** ①–④ тензорного произведения (с заменой \otimes на $*$). Полагая $\bar{f}: \mathbf{x}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_k \mapsto f(\mathbf{x}_1) * \cdots * f(\mathbf{x}_k)$ для $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in V$ и продолжая \bar{f} на $T(V)$ по линейности, мы получим корректно определенный гомоморфизм алгебр.

Замечание

Для каждого векторного пространства V алгебра с универсальным свойством единственна (с точностью до изоморфизма): если $T'(V)$ — другая обладающая этим свойством алгебра с умножением $*$, то вложение $i: V \rightarrow T(V)$ должно продолжаться единственным образом до гомоморфизма алгебр $\bar{i}: T'(V) \rightarrow T(V)$. Поскольку \bar{i} — гомоморфизм, для любых $k \in \mathcal{N}$ и $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in V$ должно выполняться условие $\bar{i}(\mathbf{x}_1 * \dots * \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_k$. Из единственности \bar{i} следует, что V порождает алгебру $T'(V)$ (если $\mathbf{t} \in T'(V)$ не представляется в виде линейной комбинации произведений элементов V , то \bar{i} может отображать этот элемент куда угодно). Наконец, поскольку элементы вида $\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_k$ образуют базис пространства $T(V)$ и \bar{i} линейно, заключаем, что \bar{i} — изоморфизм векторных пространств, а значит, и алгебр.

Замечание

Из универсального свойства следует, что любое линейное отображение векторных пространств $V \rightarrow W$ продолжается единственным образом до гомоморфизма алгебр $T(V) \rightarrow T(W)$.

Алгебраические объекты с подобными универсальными свойствами называются *свободными*. В частности, $T(V)$ — *свободная алгебра* векторного пространства V .

Определение

Пусть V — векторное пространство над K с базисом $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Векторное пространство \mathcal{S} вместе с симметричным полилинейным отображением

$$\vee: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ раз}} \rightarrow T$$

с тем свойством, что $\{\vee(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$ — базис в \mathcal{S} , называется **k -й симметрической степенью** пространства V и обозначается $\mathcal{S}^k(V)$. Образ $\vee(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ произвольного набора векторов $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in V \times \dots \times V$ обозначается $\mathbf{x}_1 \vee \dots \vee \mathbf{x}_k$.

Симметрическая степень существует: достаточно взять векторное пространство \mathcal{S} с базисом $\{\mathbf{t}_{i_1, \dots, i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$ и определить полилинейное отображение $\vee: V_1, \dots, V_k \rightarrow \mathcal{S}$, задав его на наборах базисных векторов формулой $\vee(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}) = \mathbf{t}_{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_k}$, где $\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_k$ — числа j_1, \dots, j_k , упорядоченные по неубыванию (и продолжив по полилинейности).

Определение симметрической степени не зависит от выбора базиса \mathbf{E}

Действительно, если $\mathbf{E}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ — любой другой базис пространства V , то система векторов $\{\mathbf{e}'_{i_1} \vee \dots \vee \mathbf{e}'_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$ полна в силу полилинейности отображения \vee , и число элементов в этой системе совпадает с числом элементов в базисе $\{\vee(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$. Значит, она является базисом.

Симметрическая степень единственна

Для любой другой k -й симметрической степени $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\vee})$ пространства V существует (единственный) изоморфизм $\varphi: \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$, удовлетворяющий условию $\varphi(\mathbf{x}_1 \tilde{\vee} \mathbf{x}_2 \tilde{\vee} \dots \tilde{\vee} \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 \vee \dots \vee \mathbf{x}_k$ для любых $\mathbf{x}_i \in V$: на базисе он определён правилом $\varphi(\mathbf{e}_{i_1} \tilde{\vee} \dots \tilde{\vee} \mathbf{e}_{i_k}) = (\mathbf{e}_{i_1} \vee \dots \vee \mathbf{e}_{i_k})$.

Упражнение

Распространите определение симметрической степени на пространства произвольной размерности.

Универсальное свойство симметрической степени

Отображение $\vee: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ раз}} \rightarrow S^k(V)$, $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \mapsto \mathbf{x}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{x}_k$,

полилинейно и симметрично, и для любого векторного пространства U над K и любого симметричного полилинейного отображения $\varphi: V \times \cdots \times V \rightarrow U$ существует единственное линейное отображение $\ell: S^k(V) \rightarrow U$ со свойством $\varphi = \ell \circ \vee$, т.е. $\varphi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \ell(\mathbf{x}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{x}_k)$ для любых $\mathbf{x}_i \in V_i$:

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdots \times V & & \\ \downarrow \vee & \searrow \varphi & \\ S^k(V) & \xrightarrow{\ell_\varphi} & K \end{array}$$

Универсальное свойство характеризует симметрическую степень: любое другое пространство с этим свойством совпадает с $S^k(V)$ с точностью до сохраняющего операцию \vee изоморфизма.

Симметрическая степень $S^k(V)$ является факторпространством тензорного произведения $V^{\otimes k}$ по подпространству, порождённому всеми элементами вида

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\pi(k)}, \quad \text{где } \pi \in S_k \text{ (перестановка)}.$$

Симметрическая алгебра

Положим $S(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} S^q(V)$. Элементы $S(V)$ записывают не в виде бесконечных последовательностей с нулями, а в виде сумм

$$\mathbf{v}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{w}_l + \cdots + \mathbf{u}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{u}_m.$$

Элементы вида $\mathbf{v}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_k$ называются **разложимыми**.

Для любых неотрицательных целых p и q определим билинейную операцию $\vee: S^p(V) \times S^q(V) \rightarrow S^{p+q}(V)$, задав её на разложимых элементах правилом

$$(\mathbf{v}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_p) \vee (\mathbf{w}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{w}_q) = \mathbf{v}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_p \vee \mathbf{w}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{w}_q$$

и продолжив на все прочие элементы по билинейности. Тем самым мы задали билинейную операцию \vee на пространстве $S(V)$. Она превращает пространство $S(V)$ в градуированную коммутативную алгебру с единицей, которая называется **симметрической алгеброй** пространства V .

Так же определяется градуированная коммутативная алгебра

$S_*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S_p(V)$, где $S_p(V) = S^p(V^*)$, симметричных полилинейных функций на V .

Универсальное свойство симметрической алгебры

V — подпространство пространства $S(V)$ и любое линейное отображение $f: V \rightarrow A$ в любую коммутативную алгебру A над полем K единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебр $\bar{f}: T(V) \rightarrow A$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & S(V) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

(здесь i — тождественное вложение).

Другими словами, $S(V)$ — *свободная коммутативная алгебра* векторного пространства V .

Единственность алгебры с указанным универсальным свойством для каждого векторного пространства V доказывается аналогично некоммутативному случаю.

Замечание

Конструкция симметрической алгебры (вместе с универсальным свойством) без изменений переносится на пространства произвольной размерности.

Если пространство V имеет базис $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, то

$\{\mathbf{e}_{i_1} \vee \dots \vee \mathbf{e}_{i_p} : p \in \mathcal{N}, 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n\}$ — базис пространства $S(V)$.

Соответствие

$$\mathbf{e}_{i_1} \vee \dots \vee \mathbf{e}_{i_p} \mapsto t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n,$$

— изоморфизм между $S(V)$ и алгеброй многочленов $K[t_1, \dots, t_n]$.

Вспомнив, что каждый элемент $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ взаимного базиса на V^* ставит в соответствие каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ его i -ю координату x^i и отождествляя каждый $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ с переменной x^i , мы тем самым отождествляем $S(V^*)$ с $K[x^1, \dots, x^n]$. Каждый элемент $\lambda_1 \boldsymbol{\varepsilon}^{i_{11}} \vee \dots \vee \boldsymbol{\varepsilon}^{i_{1m_1}} + \dots + \lambda_k \boldsymbol{\varepsilon}^{i_{1k}} \vee \dots \vee \boldsymbol{\varepsilon}^{i_{1m_k}}$ отождествляется с многочленом $\lambda_1 x^{i_{11}} \cdot \dots \cdot x^{i_{1m_1}} + \dots + \lambda_k x^{i_{1k}} \cdot \dots \cdot x^{i_{1m_k}}$.

Если K — поле характеристики 0, то каждое пространство $S^q(V)$ можно отождествить с подпространством $ST^q(V)$ симметричных тензоров в $T^q(V)$.

Предложение

Если K — поле характеристики 0, то для каждого $q \in \mathcal{N}$ отображение

$$\mu: S^q(V) \rightarrow ST^q(V), \quad (\mathbf{x}_1 \vee \dots \vee \mathbf{x}_q) \mapsto \text{Sym}(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_q),$$

является изоморфизмом. ↑

Каждой симметричной полилинейной функции $\mathbf{s} \in ST_p(V)$ поставим в соответствие однородный многочлен $\rho_{\mathbf{s}}(x^1, \dots, x^n) \in S_p(V)$:

$$\rho_{\mathbf{s}}(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{s}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) \quad \text{для вектора } \mathbf{x} \in V \text{ с координатами } x^1, \dots, x^n.$$

Предложение

Если K — поле характеристики 0, то отображение

$$ST_p(V) \rightarrow S_p(V), \quad \mathbf{s} \mapsto \rho_{\mathbf{s}},$$

является изоморфизмом векторных пространств, обратным отображению $\mu: S_p(V) \rightarrow ST_p(V)$.

Доказательство. Для любой симметричной полилинейной функции вида

$$\mathbf{s} = \text{Sym}(\mathbf{f}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{f}^p) = \mu(\mathbf{f}^1 \vee \dots \vee \mathbf{f}^p), \quad \text{где } \mathbf{f}^i \in V^*, \mathbf{f}^i = f_j^i \boldsymbol{\epsilon}^j,$$

имеем

$$\rho_{\mathbf{s}}(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{f}^1(\mathbf{x}) \cdot \dots \cdot \mathbf{f}^p(\mathbf{x}) = (f_j^1 x^j) \cdot \dots \cdot (f_i^p x^i).$$

В $S_p(V) \subset S(V^*)$ этот многочлен отождествляется с элементом $(f_j^1 \boldsymbol{\epsilon}^j) \vee \dots \vee (f_i^p \boldsymbol{\epsilon}^i) = \mathbf{f}^1 \vee \dots \vee \mathbf{f}^p = \mu^{-1}(\mathbf{s})$. □

Симметричная полилинейная функция \mathbf{s} называется **поляризацией** однородного многочлена $\rho_{\mathbf{s}}$.

Умножение в алгебре симметричных полилинейных функций $ST_*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} ST_p(V)$, соответствующее умножению в алгебре $S_*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S_p(V)$,

определяется формулой

$$(\mathbf{t} \vee \mathbf{s})(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+m}) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{\pi \in S_{k+m}} \mathbf{t}(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(k)}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}_{\pi(k+1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(k+m)})$$

для $\mathbf{t} \in ST_k(V)$ и $\mathbf{s} \in ST_m(V)$. Произведение $\mathbf{t} \vee \mathbf{s}$ называется **симметрическим произведением** функций \mathbf{t} и \mathbf{s} .

Упражнение

Проверьте, что симметрическое произведение p линейных функций $\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^p \in V^*$ задаётся формулой

$$(\mathbf{f}^1 \vee \dots \vee \mathbf{f}^p)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \frac{1}{p!} \text{per}(\mathbf{f}^i(\mathbf{x}_j)),$$

где $\text{per } A$ — **перманент** квадратной матрицы A , который определяется аналогично определителю с той разницей, что все слагаемые берутся со знаком плюс независимо от чётности перестановки.

Для полей ненулевой характеристики эти формулы не имеют смысла.

Определение

Пусть V — векторное пространство над K с базисом $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Векторное пространство Λ вместе с кососимметричным полилинейным отображением

$$\wedge: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ раз}} \rightarrow \Lambda$$

с тем свойством, что $\{\wedge(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ — базис в Λ , называется **k -й внешней степенью** пространства V и обозначается $\Lambda^k(V)$. Образ $\wedge(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ произвольного набора векторов $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in V \times \dots \times V$ обозначается $\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k$.

Внешняя степень существует, не зависит от базиса и единственна по тем же причинам, что и симметрическая степень. Для $k > n$ внешняя степень $\Lambda^k(V)$ тривиальна.

Упражнение

Распространите определение внешней степени на пространства произвольной размерности.

Универсальное свойство внешней степени

Отображение $\wedge: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ раз}} \rightarrow \Lambda^k(V)$, $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \mapsto \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k$,

полилинейно и кососимметрично, и для любого векторного пространства U над K и любого симметричного полилинейного отображения $\varphi: V \times \dots \times V \rightarrow U$ существует единственное линейное отображение $\ell: \Lambda^k(V) \rightarrow U$ со свойством $\varphi = \ell \circ \wedge$, т.е. $\varphi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \ell(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k)$ для любых $\mathbf{x}_i \in V_i$:

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & & \\ \wedge \downarrow & \searrow \varphi & \\ S^k(V) & \xrightarrow{\ell_\varphi} & K \end{array}$$

Универсальное свойство характеризует внешнюю степень: любое другое пространство с этим свойством совпадает с $\Lambda^k(V)$ с точностью до сохраняющего операцию \wedge изоморфизма.

Внешняя степень $\Lambda^k(V)$ является факторпространством тензорного произведения $V^{\otimes k}$ по подпространству, порождённому всеми элементами вида

$$\dots \otimes \mathbf{v} \otimes \dots \otimes \mathbf{v} \otimes \dots \quad (\text{хотя бы два сомножителя совпадают}).$$

Положим $\Lambda(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \Lambda^q(V)$. Элементы $\Lambda(V)$ записывают не в виде бесконечных последовательностей с нулями, а в виде сумм

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_l + \dots + \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_m.$$

Элементы вида $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k$ называются **поливекторами**, или **k -векторами**.

Для любых неотрицательных целых p и q определим билинейную операцию $\wedge: \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \rightarrow \Lambda^{p+q}(V)$, задав её на поливекторах правилом

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p) \wedge (\mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_q) = \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p \wedge \mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_q$$

и продолжив на все прочие элементы по билинейности. Тем самым мы задали билинейную операцию \wedge на пространстве $\Lambda(V)$. Она превращает пространство $\Lambda(V)$ в градуированную алгебру с единицей, которая называется **алгеброй Грассмана**, или **внешней алгеброй**, пространства V . Вместо коммутативности в ней имеет место градуированная антикоммутативность

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (-1)^{pq} \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \quad \text{для } \mathbf{u} \in \Lambda^p(V) \text{ и } \mathbf{v} \in \Lambda^q(V).$$

Градуированные алгебры с этим свойством называются **суперкоммутативными**.

Так же определяется градуированная внешняя алгебра $\Lambda_*(V) = \bigoplus \Lambda_p(V)$, где $\Lambda_p(V) = \Lambda^p(V^*)$, кососимметричных полилинейных функций на V .

Универсальное свойство алгебры Грассмана

V — подпространство пространства $\Lambda(V)$ и любое линейное отображение $f: V \rightarrow A$ в любую алгебру с единицей A над полем K с умножением $*$, обладающее свойством $f(\mathbf{v}) * f(\mathbf{v}) = 0$, единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебр с единицей $\bar{f}: \Lambda(V) \rightarrow A$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xhookrightarrow{i} & \Lambda(V) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

(здесь i — тождественное вложение).

Как и в случаях тензорной и симметрической алгебр, алгебра с указанным универсальным свойством для каждого векторного пространства V единственна.

Если $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис V , то $\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ — базис пространства $\Lambda^p(V)$ и $\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} : p \in \mathcal{N}, 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ — базис пространства $\Lambda(V)$. Следовательно,

$$\dim \Lambda^p(V) = \frac{n!}{p!} (n-p)! \quad \text{и} \quad \dim \Lambda(V) = 2^n.$$

Таким образом, алгебра Грассмана конечномерного пространства конечномерна.

Пусть K — поле характеристики 0.

Предложение

Для каждого $q \in \mathcal{N}$ отображение $\mu: \Lambda^q(V) \rightarrow \Lambda T^q(V)$, определённое правилом $(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_q) \mapsto \text{Alt}(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_q)$, является изоморфизмом.

Умножение в алгебре симметричных полилинейных функций $ST_*(V) = \bigoplus ST_p(V)$, соответствующее умножению в алгебре $S_*(V) = \bigoplus S_p(V)$, определяется формулой

$$(\mathbf{t} \wedge \mathbf{s})(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+m}) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{\pi \in S_{k+m}} \mathbf{t}(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(k)}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}_{\pi(k+1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(k+m)}).$$

Произведение $\mathbf{t} \wedge \mathbf{s}$ называется **внешним произведением** функций \mathbf{t} и \mathbf{s} .

Упражнение

Покажите, что для $\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^p \in V^*$ $(\mathbf{f}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{f}^p)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \frac{1}{p!} \det(\mathbf{f}^i(\mathbf{x}_j))$.

Плюккеровы координаты

Пусть теперь K — поле характеристики $\neq 2$.

Теорема

- 1 Система векторов $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ в пространстве V линейно зависима $\iff \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$.
- 2 Если системы векторов $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ и $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$ в V линейно независимы, то $\langle \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} \rangle = \langle \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\} \rangle \iff p$ -векторы $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$ и $\mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_p$ пропорциональны.

Доказательство. 1: Предположим, что $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ линейно зависимы. Пусть для определённости $\mathbf{v}_p = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{p-1} \mathbf{v}_{p-1}$. Тогда

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{p-1} \wedge \mathbf{v}_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{p-1} \wedge \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Если система $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ линейно независима, то её можно продолжить до базиса. Тогда p -вектор $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$ станет одним из базисных. Значит, он не может быть нулевым.

Если $\langle \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \} \rangle = \langle \{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p \} \rangle$, то векторы $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$ линейно выражаются через векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. Значит, p -вектор $\mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_p$ линейно выражается через p -векторы вида $\mathbf{v}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{i_p}$. Имеем

$$\mathbf{v}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{i_p} = \begin{cases} \pm \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p, & \text{если } i_1, \dots, i_p \text{ различны,} \\ \mathbf{0} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, p -вектор $\mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_p$ пропорционален p -вектору $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$.

Если $\langle \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \} \rangle \neq \langle \{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p \} \rangle$, то в пространстве V существует базис $\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \}$ такой, что

$$\langle \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \} \rangle = \langle \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \} \rangle \quad \text{и} \quad \langle \{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p \} \rangle = \langle \{ \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_{d+p} \} \rangle,$$

где $1 \leq d \leq p$. По доказанному p -вектор $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$ пропорционален p -вектору $\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_p$ и $\mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_p$ пропорционален p -вектору $\mathbf{e}_{d+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{d+p}$. Однако p -векторы $\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_p$ и $\mathbf{e}_{d+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{d+p}$ базисные и потому не пропорциональны. □

Плюккеровы координаты подпространств

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис пространства V и $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ — базис его подпространства U . Подпространству U соответствует p -вектор $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$, причём по теореме соответствие между подпространствами размерности p и классами пропорциональных p -векторов взаимно однозначно.

Найдём координаты p -вектора $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$ в базисе $\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ пространства $\Lambda^p(V)$.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $p \times n$, образованная записанными по строкам координатами векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, \dots, p.$$

Имеем

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p = \sum_{i_1, \dots, i_p \leq n} a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{pi_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}.$$

Если среди индексов i_1, \dots, i_p есть одинаковые, то $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} = \mathbf{0}$. Если нет, то множители в p -векторе $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$ можно переставить в порядке возрастания.

При этом сам p -вектор умножится на $(-1)^s$, где s — число инверсий в последовательности i_1, \dots, i_p . Значит,

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} M_{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p},$$

где $M_{i_1 \dots i_p}$ — минор порядка p матрицы A , образованный столбцами i_1, \dots, i_p .

По теореме числа $M_{i_1 \dots i_p}$ однозначно определяют подпространство U . Они называются **плюккеровыми координатами** подпространства U (соответствующими базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$). Поскольку p -векторы определяют одно и то же подпространство \iff они пропорциональны, плюккеровы координаты определены с точностью до пропорциональности.

Плюккеровы координаты не могут быть произвольными наборами чисел, так как они соответствуют p -векторам, которые составляют лишь часть пространства $\Lambda^p(V)$. Числа $\mu_{i_1 \dots i_p}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, являются плюккеровыми координатами некоторого p -мерного подпространства \iff существует матрица размера $p \times n$, для которой эти числа являются минорами максимального порядка.

Упражнение

Докажите, что числа $\mu_{i_1 \dots i_p}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, являются плюккеровыми координатами некоторого p -мерного подпространства \iff они удовлетворяют **соотношениям Плюккера**

$$\sum_{r=1}^{p+1} (-1)^k \mu_{i_1 \dots i_{p-1} j_k} \cdot \mu_{j_1 \dots \check{j}_k \dots j_{p+1}} = 0 \quad \text{для любых } i_1, \dots, i_{p-1}, j_1, \dots, j_{p+1} \leq n$$

(знак $\check{}$ обозначает пропуск индекса).