Линейная алгебра и геометрия

Лекция 21. Симметрирование и альтернирование.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Симметрирование и альтернирование

Будем рассматривать только тензоры типа $(p,0)$ (и $(0,q)$ — по аналогии) и поле характеристики 0.

Пусть $\boldsymbol{t}$ — произвольный тензор типа $(p,0)$ и $\pi \in S_p$ — подстановка. Положим

$$\boldsymbol{t}_\pi(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\pi(1)},\ldots,\boldsymbol{x}_{\pi(p)}).$$

Получили отображение

$$\vartheta_\pi\colon T_p^0(V) \to T_p^0(V), \qquad \boldsymbol{t} \mapsto \boldsymbol{t}_\pi.$$

Это невырожденный линейный оператор на $T_p^0(V)$. Имеем $\vartheta_\pi \circ \vartheta_\sigma = \vartheta_{\pi\sigma}$, так что $\pi \mapsto \vartheta_\pi$ — действие группы S_p на $T_p^0(V)$.

Определение

Тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(p,0)$ называется симметричным (или симметрическим), если $\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}$ для всех $\pi \in S_p$.

Множество симметричных тензоров в пространстве $T_p^0(V)$ образует подпространство. Обозначим его $ST_p(V)$.

Если $\boldsymbol{t}$ — симметричный тензор типа $(p, 0)$, то его координаты в любом базисе *симметричны*, т.е. не меняются при любой перестановке индексов: $t_{i_1 \dots i_p} = t_{\pi(i_1) \dots \pi(i_p)}$ для всех $\pi \in S_p$.

Замечание

Тензор симметричен $\iff$ его координаты в некотором (любом) базисе симметричны.

Определение

Симметрирование (или симметризация) тензоров из $T_p^0(V)$ — это линейный оператор Sym на $T_p^0(V)$, определённый правилом

$$\mathsf{Sym}\colon \boldsymbol{t} \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \vartheta_\pi(\boldsymbol{t}).$$

Другими словами, $\mathsf{Sym}\, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\pi(1)}, \dots, \boldsymbol{x}_{\pi(p)})$. Координаты в любом базисе вычисляются по тому же правилу: $(\mathsf{Sym}\, t)_{i_1 \dots i_p} = \dfrac{1}{p!} \displaystyle\sum_{\pi \in S_p} t_{\pi(1) \dots \pi(p)}$.

Предложение

1. $\operatorname{Im}\mathsf{Sym} = ST_p(V)$, 2. $\mathsf{Sym}^2 = \mathsf{Sym}$.

Доказательство. Для $\sigma \in S_p$ и $\boldsymbol{t} \in T_p^0(V)$ имеем

$$\vartheta_\sigma(\mathsf{Sym}\,\boldsymbol{t}) = \vartheta_\sigma\Big(\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\vartheta_\pi(\boldsymbol{t})\Big) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\vartheta_{\sigma\pi}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}\vartheta_\tau(\boldsymbol{t}) = \mathsf{Sym}\,\boldsymbol{t}.$$

Для любого $\boldsymbol{t} \in ST_p(V)$ имеем $\mathsf{Sym}\,\boldsymbol{t} = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$. □

Предложение

$\dim ST_p(V) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$ *(число сочетаний с повторениями из n по p).*

Доказательство. Базис в $ST_p(V)$ составляют элементы $\mathsf{Sym}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_{i_p})$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n$, поскольку система всех таких элементов полна (так как она состоит из образов элементов базиса в $T_p^0(V)$) и линейно независима — это доказывается с помощью леммы о линейной независимости точно так же, как линейная независимость всех элементов вида $\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_{i_p}$ в $T_p^0(V)$. □

Определение

Тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(p,0)$ называется кососимметричным (кососимметрическим, антисимметричным, знакопеременным), если при перестановке любых двух аргументов функция $\boldsymbol{t}$ меняет знак: $\boldsymbol{t}(\dots,\boldsymbol{v},\dots,\boldsymbol{u},\dots) = -\boldsymbol{t}(\dots,\boldsymbol{u},\dots,\boldsymbol{v},\dots)$.

Равносильное условие: $\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn}\pi\,\boldsymbol{t}$ для всех $\pi \in S_p$.

Поскольку поле K имеет характеристику $0 \neq 2$, тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(p,0)$ кососимметричен $\iff$ значение $\boldsymbol{t}$ в наборе аргументов, среди которых есть хотя бы два совпадающих, равно нулю: $\boldsymbol{t}(\dots,\boldsymbol{v},\dots,\boldsymbol{v},\dots) = 0$.

Множество кососимметричных тензоров в пространстве $T_p^0(V)$ образует подпространство. Обозначим его $\bigwedge T_p(V)$.

Если $\boldsymbol{t}$ — кососимметричный тензор типа $(p,0)$, то при перестановке индексов его координаты в любом базисе умножаются на ±1 (в зависимости от знака перестановки): $t_{i_1\dots i_p} = \operatorname{sgn}\pi\cdot t_{\pi(i_1)\dots\pi(i_p)}$ для всех $\pi \in S_p$. Всякая координата с двумя одинаковыми индексами равна нулю.

Замечание

Тензор $\boldsymbol{t}$ кососимметричен $\iff$ его координаты в некотором (любом) базисе подчиняются правилу $t_{i_1\dots i_p} = \operatorname{sgn}\pi\cdot t_{\pi(i_1)\dots\pi(i_p)}$ для всех $\pi \in S_p$.

Определение

Альтернирование тензоров из $T_p^0(V)$ — это линейный оператор Alt на $T_p^0(V)$, определённый правилом

$$\mathsf{Alt}\colon \boldsymbol{t} \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \, \vartheta_\pi(\boldsymbol{t}).$$

Другими словами, $\mathsf{Alt}\, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\pi(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\pi(p)})$.
Координаты в любом базисе вычисляются по тому же правилу:

$$(\mathsf{Alt}\, t)_{i_1 \ldots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \, t_{\pi(1) \ldots \pi(p)}.$$

Предложение

1. $\operatorname{Im} \operatorname{Alt} = \bigwedge T_p(V)$,
2. $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt}$,
3. $\operatorname{Alt} \vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn} \pi \operatorname{Alt} \boldsymbol{t}$ *для всех* $\pi \in S_p$ *и* $\boldsymbol{t} \in T_p^0(V)$.

Доказательство. 1 и 2: Для $\sigma \in S_p$ и $\boldsymbol{t} \in T_p^0(V)$ имеем

$$\vartheta_\sigma(\operatorname{Alt} \boldsymbol{t}) = \vartheta_\sigma\Bigl(\frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \vartheta_\pi(\boldsymbol{t})\Bigr) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \vartheta_\sigma(\vartheta_\pi(\boldsymbol{t})) =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} (\operatorname{sgn} \sigma)^2 \operatorname{sgn} \pi \vartheta_{\sigma\pi}(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn} \sigma \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \pi \vartheta_{\sigma\pi}(\boldsymbol{t}) =$$
$$= \operatorname{sgn} \sigma \frac{1}{p!}\sum_{\tau \in S_p} \operatorname{sgn} \tau \vartheta_\tau(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{Alt} \boldsymbol{t}.$$

Для любого $\boldsymbol{t} \in \bigwedge T_p(V)$ имеем $\operatorname{Alt} \boldsymbol{t} = \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} (\operatorname{sgn} \pi)^2 \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$.

3:
$$\operatorname{Alt} \vartheta_\sigma(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \vartheta_\pi(\vartheta_\sigma(\boldsymbol{t})) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi (\operatorname{sgn} \sigma)^2 \vartheta_\pi(\vartheta_\sigma(\boldsymbol{t})) =$$
$$= \operatorname{sgn} \sigma \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \sigma \vartheta_\pi(\vartheta_\sigma(\boldsymbol{t})) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau \in S_p} \operatorname{sgn} \tau \vartheta_\tau(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{Alt} \boldsymbol{t}.$$

□

Предложение

$\dim \bigwedge T_p(V) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *(число сочетаний из n по p).*

Доказательство. Базис в $\bigwedge T_p(V)$ составляют элементы $\mathrm{Alt}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{i_p})$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$. □

Замечание

Операции симметрирования и альтернирования являются проектированиями пространства $T_p^0(V)$ на подпространства $ST_p(V)$ и $\bigwedge T_p(V)$ соответственно.

Упражнения

1. Докажите, что $T_2(V) = ST_2(V) \oplus \bigwedge T_2(V)$.
2. Покажите, что для $p > 2$ $T_p(V) \neq ST_p(V) + \bigwedge T_p(V)$.

Предложение

Операции Sym *и* Alt *ассоциативны и дистрибутивны.*

Лемма

Для любых тензоров $\boldsymbol{f} \in T^0_k(V)$ *и* $\boldsymbol{g} \in T^0_m(V)$

1. $\operatorname{Sym}((\operatorname{Sym}\boldsymbol{f})\otimes\boldsymbol{g}) = \operatorname{Sym}(\boldsymbol{f}\otimes(\operatorname{Sym}\boldsymbol{g})) = \operatorname{Sym}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g})$,
2. $\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt}\boldsymbol{f})\otimes\boldsymbol{g}) = \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f}\otimes(\operatorname{Alt}\boldsymbol{g})) = \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g})$.

Доказательство. Докажем первую половину 2 (остальное аналогично). По определению $\operatorname{Alt}\boldsymbol{f} = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sgn}\pi\,\vartheta_\pi(\boldsymbol{f})$. Линейность альтернирования $\Longrightarrow$

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt}\boldsymbol{f})\otimes\boldsymbol{g}) = \tfrac{1}{k!}\textstyle\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{Alt}(\vartheta_\pi(\boldsymbol{f})\otimes\boldsymbol{g}).$$

Пусть $\pi\in S_k$. Положим $\tilde\pi(i) = \pi(i)$ для $i \leqslant k$, $\tilde\pi(i) = i$ для $k < i \leqslant k+m$. Имеем $\vartheta_\pi(\boldsymbol{f})\otimes\boldsymbol{g} = \vartheta_{\tilde\pi}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g})$. Получаем

$$\operatorname{Alt}(\vartheta_\pi(\boldsymbol{f})\otimes\boldsymbol{g}) = \operatorname{Alt}(\vartheta_{\tilde\pi}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g})) = \operatorname{sgn}\tilde\pi\operatorname{Alt}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}) \qquad \Longrightarrow$$

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt}\boldsymbol{f})\otimes\boldsymbol{g}) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sgn}\pi\cdot\operatorname{sgn}\tilde\pi\operatorname{Alt}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{Alt}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}) = \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}). \quad \square$$

* * *

Для тензоров типа $(0,q)$ теория совершенно аналогична.