

Линейная алгебра и геометрия

Лекция 20. Тензоры в евклидовом пространстве. Опускание и поднятие индексов.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Тензоры в евклидовом пространстве

Опускание и поднятие индексов

Если V — евклидово пространство, то между V и V^* имеется канонический изоморфизм $\varphi: V \rightarrow V^*$, действующий по правилу $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{f}_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}, \mathbf{x})$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Обратный изоморфизм φ^{-1} действует по правилу $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{v}_{\mathbf{f}}$, где $(\mathbf{v}_{\mathbf{f}}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Пусть

$$\mathbf{t}: \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз}} \rightarrow K$$

— полилинейная функция (тензор типа (p, q)). Заменим ковекторы $\mathbf{f} \in V^*$ соответствующими векторами $\mathbf{v}_{\mathbf{f}} \in V$. Получим полилинейную функцию

$$\mathbf{t}': \underbrace{V \times \dots \times V}_{p+q \text{ раз}} \rightarrow K,$$

зависящую от $p+q$ векторов.

Пусть $t_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q} = \mathbf{t}(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{m_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_q})$ — координаты тензора \mathbf{t} и $t'_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_{p+q}} = \mathbf{t}'(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}, \mathbf{e}_{k_{p+1}}, \dots, \mathbf{e}_{k_{p+q}})$ — координаты тензора \mathbf{t}' . Если базис \mathbf{E} ортонормированный, то $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^i} = \mathbf{e}_i$, поэтому в этом случае

$$t'_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_{p+q}} = t_{k_1 \dots k_p}^{k_{p+1} \dots k_{p+q}}.$$

В случае произвольного базиса скалярное произведение определяется формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n) G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где G — матрица Грама скалярного произведения: $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Скалярное произведение — тензор типа $(2, 0)$, который называется **метрическим тензором**, и g_{ij} — его компоненты.

Поскольку канонический изоморфизм $\varphi: V \rightarrow V^*$ определяется правилом $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{f}_\mathbf{v}$, $\mathbf{f}_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}, \mathbf{x})$, имеем $\varphi(\mathbf{e}_i)(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = g_{ij}x^j$. Значит, координаты функционала $\varphi(\mathbf{e}_i)$ во взаимном базисе суть g_{i1}, \dots, g_{in} , т.е. $G = G^T$ — матрица изоморфизма φ , а G^{-1} — матрица обратного изоморфизма φ^{-1} :

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = g_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}^j \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i = g_{ij}\varphi^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}^j) = g_{ij}\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^j}.$$

Таким образом, скалярное произведение на сопряжённом пространстве, относительно которого φ — изоморфизм евклидовых пространств (т.е. $(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, имеет матрицу G^{-1} :

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\varphi^{-1}(\mathbf{f}), \varphi^{-1}(\mathbf{g})) = (f_1, \dots, f_n)(G^{-1})^T G G^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_n)G^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

так что координаты g^{ij} соответствующего метрического тензора равны координатам матрицы G^{-1} .

Отождествляя векторы \mathbf{v}_f с ковекторами \mathbf{f} , подставим вместо последних q векторов \mathbf{e}_i их выражения $\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{v}_{\epsilon^j}$ и заменим \mathbf{v}_{ϵ^j} на $\boldsymbol{\epsilon}^j = \varphi(\mathbf{v}_{\epsilon^j})$:

$$\begin{aligned} t'_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_{p+q}} &= t'(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}, \mathbf{e}_{k_{p+1}}, \dots, \mathbf{e}_{k_{p+q}}) = \\ &= t(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}; g_{k_{p+1} i_1} \boldsymbol{\epsilon}^{i_1}, \dots, g_{k_{p+q} i_q} \boldsymbol{\epsilon}^{i_q}) = g_{k_{p+1} i_1} \dots g_{k_{p+q} i_q} \cdot t_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}. \end{aligned}$$

Правило $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{t}'$ определяет изоморфизм

$$T_p^q \cong T_{p+q}, \quad \text{т.е.} \quad \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_q \cong \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{p+q},$$

при котором каждому тензору с координатами $t_{k_1 \dots k_p}^{k_{p+1} \dots k_{p+q}}$ соответствует тензор с

координатами $t'_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_{p+q}} = g_{i_1 k_{p+1}} \dots g_{i_q k_{p+q}} \cdot t_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$. Он называется

опусканием индексов.

Аналогично определяется операция **поднятия индексов** $T_p^q \rightarrow T^{p+q}$.

Координаты меняются по формуле $t'^{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_{p+q}} = g^{k_1 i_1} \dots g^{k_p i_p} \cdot t_{i_1 \dots i_p}^{k_{p+1} \dots k_{p+q}}$,

где $g^{ij} = (\boldsymbol{\epsilon}^i, \boldsymbol{\epsilon}^j)$ — компоненты матрицы G^{-1} .

Поднимать и опускать индексы можно не все, а некоторую часть, например, только один индекс. Заменяя один из сомножителей в $(V^*)^q$ на V , мы сомножитель V перемещаем в произведение V^p , часто на последнее место, но не обязательно.

Опускание одного индекса определяется контравариантным индексом β , который опускается в α -ый ковариантный индекс. Положим

$$\begin{aligned} \Phi: V^{p+1} \times (V^*)^{q-1} &\rightarrow V^p \times (V^*)^q, \\ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\alpha-1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_\alpha, \dots, \mathbf{x}^p, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\beta-1}, \mathbf{f}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{f}_q) \\ &\mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\beta-1}, \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{f}_q). \end{aligned}$$

После опускания контравариантного β -го индекса в ковариантный α -ый индекс тензора \mathbf{t} типа (p, q) получаем тензор $\mathbf{t}' = \mathbf{t} \circ \Phi$ типа $(p+1, q-1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\alpha-1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_\alpha, \dots, \mathbf{x}_p; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\beta-1}, \mathbf{f}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{f}_q) = \\ = \mathbf{t}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\beta-1}, \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{f}_q). \end{aligned}$$

Координаты меняются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 t'_{k_1 \dots k_{\alpha-1} m'_\beta k_\alpha \dots k_p}^{m_1 \dots m_{\beta-1} m_{\beta+1} \dots m_q} &= \\
 &= \mathbf{t}'(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_{\alpha-1}}, \mathbf{e}_{m'_\beta}, \mathbf{e}_{k_\alpha}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{m_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_{\beta-1}}, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_{\beta+1}}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_q}) \\
 &= \mathbf{t}(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_{\alpha-1}}, \mathbf{e}_{k_\alpha}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{m_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_{\beta-1}}, \varphi(\mathbf{e}_{m'_\beta}), \boldsymbol{\varepsilon}^{m_{\beta+1}}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_q}) \\
 &= \mathbf{t}(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{m_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_{\beta-1}}, g_{m'_\beta m_\beta} \boldsymbol{\varepsilon}^{m_\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_{\beta+1}}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_q}) \\
 &= g_{m'_\beta m_\beta} \mathbf{t}(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{m_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_q}).
 \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$t'_{k_1 \dots k_{\alpha-1} m'_\beta k_\alpha \dots k_p}^{m_1 \dots m_{\beta-1} m_{\beta+1} \dots m_q} = g_{m'_\beta m_\beta} t_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q}.$$

Аналогично получаем поднятие одного α -ого ковариантного индекса в β -ый контравариантный индекс:

$$t'_{k_1 \dots k_{\alpha-1} k_{\alpha+1} \dots k_p}^{m_1 \dots m_{\beta-1} k'_\alpha m_\beta \dots m_q} = g^{k'_\alpha k_\alpha} t_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q}.$$