Линейная алгебра и геометрия

Лекция 17. Тензоры.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Тензоры

Всюду ниже V — n-мерное векторное пространство над полем K, а p и q — неотрицательные целые числа.

Определение

Всякая полилинейная функция $\quad \boldsymbol{t}\colon \underbrace{V\times\dots\times V}_{p\text{ раз}}\times\underbrace{V^*\times\dots\times V^*}_{q\text{ раз}}\to K$

называется тензором типа (p,q) и валентности (или ранга) $p+q$ на V.

Про тензор типа (p,q) говорят, что он p раз ковариантный и q раз контравариантный. Тензор типа $(p,0)$ (типа $(0,q)$) называется просто ковариантным (контравариантным).

Предупреждение: В литературе p и q в обозначении типа часто указываются в обратном порядке.

Примеры

1. Тензор типа $(0,0)$ — скаляр.
2. Тензор типа $(1,0)$ — линейная функция $V \to K$, т.е. элемент V^* (ковектор).
3. Тензор типа $(0,1)$ — линейная функция $V^* \to K$, т.е. элемент $V^{**} = V$ (вектор).
4. Тензор типа $(2,0)$ (типа $(0,2)$) — билинейная функция на V (на V^*).
5. Тензор типа $(1,1)$ — билинейная функция $b\colon V \times V^* \to K$. Её левая корреляция $b_{\text{лев}}\colon V \to V^{**} = V$ каждому вектору $\boldsymbol{v}$ ставит в соответствие функционал $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}$ на V^*, определённый правилом $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ для $\boldsymbol{f} \in V^*$. В силу изоморфизма $V^{**} \rightleftarrows V$ функционал $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}} \in V^{**}$ есть функция вычисления $e_{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{v}}}$ для некоторого вектора $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{v}} \in V$. Соответствие $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{v}}$ — линейный оператор $V \to V$.

   Обратно, пусть имеется линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$. Определим тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(1,1)$ правилом $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\mathcal{A}\boldsymbol{x}) = e_{\mathcal{A}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f})$. Его левая корреляция $\boldsymbol{x} \mapsto e_{\mathcal{A}\boldsymbol{x}} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$ — оператор $\mathcal{A}$.

   Таким образом, между линейным пространством всех билинейных функций $V \times V^* \to K$ (тензоров типа $(1,1)$) и линейным пространством всех линейных операторов $V \to V$ имеется естественный изоморфизм, так что тензоры типа $(1,1)$ можно идентифицировать с операторами.

Пространство тензоров

Обозначим

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q \text{ раз}},$$

$$(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ раз}}.$$

Тензоры типа (p, q) на V составляют векторное пространство

$$T_p^q = T_p^q(V) = \mathcal{P}(V^p \times (V^*)^q)$$

над K размерности n^{p+q}.

В силу нашего определения тензорного определения,

$$T_p^q(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q},$$

тензоры типа (p, q) можно определять эквивалентным образам как элементы тезорного произведения $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$.

Соглашения об индексации:

- векторы нумеруются нижними индексами, ковекторы (функционалы) — верхними;
- координаты векторов нумеруются верхними индексами, ковекторов — нижними;
- если один и тот же индекс встречается в формуле снизу и сверху, то по нему производится суммирование от 1 до n.

Координаты тензора

Пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в V и $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n\}$ — взаимный базис в V^*. Векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q},$$

где $(i_1, \ldots, i_p)$ и $(j_1, \ldots, j_q)$ — всевозможные наборы натуральных чисел, не превосходящих n, образуют базис этого пространства.

Еще соглашение об индексации: координаты тензора $\boldsymbol{t} \in T_p^q$ типа (p, q) записываются как $t_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$, тогда

$$\boldsymbol{t} = t_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q},$$

в этой записи мы используем соглашении о суммировании.

Числа $t_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_p}$ называются координатами (а также коэффициентами или компонентами) тензора $\boldsymbol{t}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Любая полилинейная функция полностью определяется своими координатами — значениями на наборах базисных векторов:

$$t_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{j_q}).$$

Пусть

$$\boldsymbol{x}_1 = x^{1i_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\ \boldsymbol{x}_2 = x^{2i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}, \dots,\ \boldsymbol{x}_p = x^{pi_p}\boldsymbol{e}_{i_p} \in V,$$
$$\boldsymbol{f}^1 = f_{1j_1}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1},\ \boldsymbol{f}^2 = f_{2j_2}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_2}, \dots,\ \boldsymbol{f}^q = f_{qj_q}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_q} \in V^*.$$

Тогда

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{f}^1, \dots, \boldsymbol{f}^q) = \boldsymbol{t}(x^{1i_1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, x^{2i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}; f_{1j_1}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}, \dots, f_{qj_q}\boldsymbol{\varepsilon}^{j_q})$$
$$= \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{j_q})x^{1j_1} \dots x^{2j_2} f_{1i_1} \dots f_{qi_q}$$
$$= t^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} x^{1i_1} \dots x^{2i_2} f_{1j_1} \dots f_{qj_q}.$$

Примеры

1. Пусть $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{f})$ — тензор типа $(2,1)$, и пусть $\boldsymbol{x}=x^i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y}=y^j\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{f}=f_k\boldsymbol{\varepsilon}^k$. Тогда

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{f})=\boldsymbol{t}(x^i\boldsymbol{e}_i,y^j\boldsymbol{e}_j,f_k\boldsymbol{\varepsilon}^k)=x^i\cdot y^j\cdot f_k\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{\varepsilon}^k)=x^i\cdot y^j\cdot f_k\cdot t_{ij}^k,$$

   где $t_{ij}^k=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{\varepsilon}^k)$ для $i,j,k=1,\dots,n$ — *координаты* тензора $\boldsymbol{t}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

2. Пусть $\mathcal{A}\colon V\to V$ — линейный оператор с матрицей $A=(a_i^j)$, т.е. $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i=a_i^j\boldsymbol{e}_j$. Тогда $\mathcal{A}$ можно трактовать как тензор $\boldsymbol{t}\colon V\times V^*\to K$ (типа (1,1)), определённый правилом $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f})=\boldsymbol{f}(\mathcal{A}\boldsymbol{x})$. На паре базисных векторов $(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{\varepsilon}^m)$ он принимает значение

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{\varepsilon}^m(a_k^j\boldsymbol{e}_j)=a_k^m.$$

   Таким образом, координаты тензора $\boldsymbol{t}$ — это в точности элементы матрицы A.

Переход в новую систему координат

Пусть $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ и $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^n\}$ — другой базис в V и взаимный с ним базис в V^*, и пусть $C = (c_i^j)$ — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$, т.е. $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = c_i^j \boldsymbol{e}_j$, и $S = (s_i^j) = (C^{-1})^T$ — матрица перехода от $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ к $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, т.е. $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = s_j^i \boldsymbol{\varepsilon}^j$ (заметьте, что в первом случае номерам строк соответствуют верхние индексы, а во втором — нижние). Отметим,

$$\delta_j^i = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\tilde{\boldsymbol{e}}_j) = (s_k^i \boldsymbol{\varepsilon}^k)(c_j^m \boldsymbol{e}_m) = s_k^i c_j^m \boldsymbol{\varepsilon}^k(\boldsymbol{e}_m) = s_k^i c_j^m \delta_m^k = s_s^i c_j^s,$$

где δ_j^i — символ Кронекера. Тогда

$$\tilde{t}_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q} = \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{k_1}, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{k_p}; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m_1}, \dots, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m_q}) = \boldsymbol{t}(c_{k_1}^{i_1} \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, c_{k_p}^{i_p} \boldsymbol{e}_{i_p}; s_{j_1}^{m_1} \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}, \dots, s_{j_q}^{m_q} \boldsymbol{\varepsilon}^{j_q}) =$$
$$= c_{k_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot s_{j_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot s_{j_q}^{m_q} \cdot t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}. \qquad (*)$$

Альтернативное определение тензора — *на пространстве V задан тензор типа (p, q), если каждому базису пространства V поставлена в соответствие система n^{p+q} чисел $t_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q}$ таким образом, что системы, отвечающие разным базисам, связаны соотношением $(*)$.*

В дальнейшем мы считаем, что в пространстве V зафиксирован базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, а в пространстве V^* — взаимный базис $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n\}$. Элементы векторных, сопряжённых и т.п. пространств обозначаются жирным шрифтом (возможно, с индексами, тильдами и пр.) и нумеруются в соответствии с соглашениями об индексации (когда оно применимо) — см., например, нумерацию элементов базисов выше. Их координаты обозначаются теми же буквами с теми же пометками, но светлым шрифтом, и индексируются в соответствии с теми же соглашениями. Например, рассматривая вектор $\boldsymbol{x} \in V$, мы будем подразумевать без пояснений, что $x^1, \ldots, x^n$ — его координаты в базисе $\boldsymbol{E}$.

Кроме того, как и выше, всегда подразумевается суммирование по одинаковым верхнему и нижнему индексам.

Арифметические операции над тензорами

- *Сложение* определяется поточечно для тензоров одного типа:

  $$(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s})(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q)+\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q).$$

  При сложении координаты тензоров складываются.
- *Умножение на скаляр* определяется поточечно. При умножении на скаляр координаты умножаются на тот же скаляр.

Таким образом, множество $T_p^q(V)$ всех тензоров типа (p,q) на V образует векторное пространство над полем K.

- *Умножение тензоров*: тензорное произведение тензоров $\boldsymbol{t}$ типа (p,q) и $\boldsymbol{t}'$ типа (p',q') — это тензор $\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{s}$ типа $(p+p',q+q')$, определённый правилом

  $$(\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{t}')(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{x}_{p+1},\dots,\boldsymbol{x}_{p+p'};\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q,\boldsymbol{f}^{q+1},\dots,\boldsymbol{f}^{q+q'}) =$$
  $$= \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{f}^1,\dots,\boldsymbol{f}^q)\cdot\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{x}_{p+1},\dots,\boldsymbol{x}_{p+p'};\boldsymbol{f}^{q+1},\dots,\boldsymbol{f}^{q+q'}).$$

  Его координаты — произведения соответствующих координат сомножителей.
  Умножение тензоров не коммутативно, но ассоциативно и дистрибутивно.

Примеры

1. Пусть $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ — тензоры типа $(1, 0)$ на V (т.е. линейные функции из V^*) с координатами f_i и g_i в базисе $\boldsymbol{E}$ (это означает, что $\boldsymbol{f} = f_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$ и $\boldsymbol{g} = g_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$, т.е. $f_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)$ и $g_i = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i)$). Тогда $\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}$ — тензор типа $(2, 0)$ (т.е. билинейная функция на V), определённый правилом
$$(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$$
(не все билинейные функции можно так разложить). Его координаты суть $t_{ij} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_j) = f_i \cdot g_j$.
2. Пусть $\boldsymbol{f}$ — тензор типа $(1, 0)$ и $\boldsymbol{v} = e_{\boldsymbol{v}}$ — тензор типа $(0, 1)$. Тогда
$$(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot e_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{g}) = e_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{g}).$$
Координаты этого тензора суть $(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{v})(\boldsymbol{e}_i; \boldsymbol{\varepsilon}^j) = f_i \cdot v^j$. Ему соответствует оператор $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$ с матрицей $(f_i \cdot v^j) = \begin{pmatrix} f_1 \cdot v^1 & \dots & f_n \cdot v^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 \cdot v^n & \dots & f_n \cdot v^n \end{pmatrix}$.

Тензор, являющийся тензорным произведением тензоров ранга 1, называется разложимым. Всякий тензор можно представить как сумму разложимых.

Универсальное свойство тензорного произведения $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$

Отображение

$$\otimes\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ раз}} \to \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ раз}},$$

$$\otimes(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p; \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q) = \boldsymbol{f}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{f}_p \otimes \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_q,$$

полилинейно. Для любой полилинейной функции $\varphi\colon V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to K$ существует единственный линейный функционал $\ell_\varphi\colon V^* \otimes \cdots \otimes V^* \otimes V \otimes \cdots \otimes V \to K$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
V^* \otimes \cdots \otimes V^* \otimes V \otimes \cdots \otimes V \arrow[r, "\ell_\varphi"'] & K
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\varphi = \ell_\varphi \circ \otimes$. Он определяется на элементах базиса формулой

$$\ell_\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{k_p} \otimes \boldsymbol{e}_{m_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{m_q}) = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^{k_1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{k_p}, \boldsymbol{e}_{m_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m_q})$$

и продолжается на всё пространство $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ по линейности.

Следовательно, $(V^* \otimes \cdots \otimes V^* \otimes V \otimes \cdots \otimes V)^* = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$. Таким образом, линейные функционалы на пространстве $T_p^q = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ тензоров типа (p, q) — это в точности тензоры типа (q, p).