Линейная алгебра и геометрия

Лекция 16. Тензорные произведения.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Тензорное произведение

Определение

Пусть U векторное пространство и $\theta\colon V_1 \times \dots \times V_m \to U$ полилинейное отображение. Пара (θ, U) называется *тензорным произведением* пространств $V_1, \dots, V_n$ если для любого полилинейного отображения $\Phi : V_1 \times \dots \times V_m \to V$ существует единственное линейное отображение $\mathcal{A}\colon U \to V$, для которого $\mathcal{A} \circ \theta = \Phi$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_m \arrow[rr, "\forall\Phi"] \arrow[d, "\theta"'] & & V \\ U \arrow[urr, "\exists!\mathcal{A}"'] & & \end{tikzcd}$$

Как правило, тензорное произведение обозначается как $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$, θ как $\otimes$ и

$$\otimes(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_m.$$

Тогда равенство $\mathcal{A} \circ \theta = \Phi$ записывается как

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_m) = \Phi(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) \quad \text{для } (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) \in V_1 \times \dots \times V_m.$$

Элементы тензорного произведения вида $\boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_m$ называются разложимыми.

Полилинейность отображения θ означает

$$\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{i-1} \otimes (\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m =$$

$$= \alpha(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{i-1} \otimes \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m) + \beta(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{i-1} \otimes \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m).$$

В частности

$$\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{i-1} \otimes \alpha \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m = \alpha(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{i-1} \otimes \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m).$$

Для единственности отображения $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно что множество

$$\theta(V_1 \times \cdots \times V_m) = \{\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m : (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \in V_1 \times \cdots \times V_m\}$$

полно в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$, то есть каждое $\boldsymbol{\psi} \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ выражается в виде

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}_{j1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{jm}.$$

Такое представление $\boldsymbol{\psi}$ не единственно. Для $\mathcal{A}$ из определения

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m) = \Phi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}) = \sum_{j=1}^{n} \Phi(\boldsymbol{x}_{j1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{jm}).$$

Любые два тензорных произведения (θ, U) и (θ', U') «одинаковы», в смысле, что существует единственный изоморфизм $i\colon U \to U'$, такой что $\theta' = i \circ \theta$ и $i^{-1} \circ \theta' = \theta$.

Действительно, так как θ' полилинейно, то из того, что (θ, U) тензорное произведение вытекает, что существует линейное отображение $i\colon U \to U'$, для которого $\theta' = i \circ \theta$. Аналогично, существует линейное отображение $i'\colon U' \to U$, для которого $\theta = i' \circ \theta'$. Тогда $i' \circ i\colon U \to U$ линейное отображение и $(i' \circ i) \circ \theta = i' \circ (i \circ \theta) = i' \circ \theta' = \theta$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrd, "\exists! \mathcal{A}"] \arrow[dd, shift left, "\exists! i"] & & \\
& V_1 \times \cdots \times V_m \arrow[lu, "\theta"'] \arrow[ld, "\theta'"] \arrow[r, "\forall \Phi"] & V \\
U' \arrow[rru, "\exists! \mathcal{A}'"'] \arrow[uu, shift left, "\exists! i' = i^{-1}"] & &
\end{tikzcd}$$

Так $\mathrm{id}_U \circ \theta = \theta$, то из того, что (θ, U) тензорное произведение вытекает, что $i' \circ i = \mathrm{id}_U$. Аналогично, $i \circ i' = \mathrm{id}_{U'}$. Следовательно, $i' = i^{-1}$.

Предложение

Пусть U *векторное пространство и* $\theta\colon V_1 \times \cdots \times V_m \to U$ *полилинейное отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1. *для любой полилинейной функции* $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_m \to K$ *существует единственный функционал* $\boldsymbol{l}\colon U \to K$, *для которого* $\boldsymbol{l} \circ \theta = \varphi$;
2. $\langle \theta(V_1 \times \cdots \times V_m) \rangle = U$ *и для любой полилинейной функции* $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_m \to K$ *существует функционал* $\boldsymbol{l}\colon U \to K$, *для которого* $\boldsymbol{l} \circ \theta = \varphi$.

Доказательство. (1)⇒(2) Предположим противное. Тогда существует ненулевое $\boldsymbol{l} \in U^*$, такое что $\theta(V_1 \times \cdots \times V_m) \subset \operatorname{Ker} \boldsymbol{l}$. Пусть $\varphi\colon V_1 \times \cdots \times V_m \to K$ тождественно нулевая функция и $\boldsymbol{l}_0 \in U^*$ нулевой функционал. Тогда $\boldsymbol{l} \neq \boldsymbol{l}_0$ и $\boldsymbol{l} \circ \theta = \varphi = \boldsymbol{l}_0 \circ \theta$. Противоречие с единственностью.

(2)⇒(1) Пусть $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l}_0 \in U^*$ и $\boldsymbol{l} \circ \theta = \varphi = \boldsymbol{l}_0 \circ \theta$. Надо проверить, что $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_0$. Функционалы $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{l}_0$ совпадают на $\theta(V_1 \times \cdots \times V_m)$. Так как $\langle \theta(V_1 \times \cdots \times V_m) \rangle = U$, то $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_0$. □

Следствие

Пара (θ, U) *является тензорным произведением пространств* $V_1, \ldots, V_n$ *если и только если* $\langle \theta(V_1 \times \cdots \times V_m) \rangle = U$ *и для любого полилинейного отображения* $\Phi : V_1 \times \cdots \times V_m \to V$ *существует линейное отображение* $\mathcal{A}\colon U \to V$*, для которого* $\mathcal{A} \circ \theta = \Phi$*.*

Доказательство. Импликация $(\Rightarrow)$ вытекает из предложения. Докажем $(\Leftarrow)$. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\colon U \to V$ линейные отображения, для которых $\mathcal{A}_1 \circ \theta = \Phi = \mathcal{A}_2 \circ \theta$. Надо проверить $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. Тогда $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ совпадают на множестве $\theta(V_1 \times \cdots \times V_m)$. Так как $\langle \theta(V_1 \times \cdots \times V_m) \rangle = U$, то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. $\square$

Теорема (о характеризация тензорного произведения)

Пара (θ, U) является тензорным произведением пространств $V_1, \dots, V_n$ если и только если для любой полилинейной функции $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_m \to K$ существует единственная линейная функция $\boldsymbol{l} \colon U \to K$ (то есть $\boldsymbol{l} \in U^*$), для которого $\boldsymbol{l} \circ \theta = \varphi$:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_m \arrow[rr, "\forall \varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & & K \\
U \arrow[urr, "\exists ! \boldsymbol{l}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть V векторное пространство и $\Phi \colon V_1 \times \cdots \times V_m \to V$ полилинейное отображение. Построим линейное отображение $\mathcal{A} \colon U \to V$, для которого $\Phi = \mathcal{A} \circ \theta$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ базис V и $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ сопряженный базис V^*. Тогда для каждого $i = 1, \dots, n$, для полилинейной функции $\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ \Phi \colon V_1 \times \cdots \times V_m \to K$ существует единственная линейная функция $\boldsymbol{l}_i \colon U \to K$, для которой $\boldsymbol{l}_i \circ \theta = \boldsymbol{\varepsilon}_i \circ \Phi$. Положим

$$\mathcal{A} \colon U \to V, \quad \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{l}_n(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_n.$$

Ясно, отображение $\mathcal{A}$ линейно. Пусть $i = 1, \ldots, n$. Для $\boldsymbol{u} \in U$,

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathcal{A}(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{l}_n(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{l}_i(\boldsymbol{u}),$$

то есть $\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ \mathcal{A} = \boldsymbol{l}_i$. Так как $\boldsymbol{l}_i \circ \theta = \boldsymbol{\varepsilon}_i \circ \Phi$, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ \mathcal{A} \circ \theta = \boldsymbol{\varepsilon}_i \circ \Phi. \tag{$\star$}$$

Лемма

Пусть $f, g \colon X \to V$. *Тогда* $f = g$ *если и только если* $\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ f = \boldsymbol{\varepsilon}_i \circ g$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Импликация $(\Rightarrow)$ очевидна. Проверим $(\Leftarrow)$. Пусть $x \in X$, $f(x) = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $g(x) = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$. Так как $x_i = (\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ f)(x) = (\boldsymbol{\varepsilon}_i \circ g)(x) = y_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то $f(x) = g(x)$. □

Из леммы и $(\star)$ вытекает $\mathcal{A} \circ \tilde{\delta} = \Phi$. Из доказанного предложения вытекает $\langle \theta(V_1 \times \cdots \times V_m) \rangle = U$. Из следствия вытекает единственность $\mathcal{A}$. □

Двойственная теорема к теореме о каноническом изоморфизме $\mathcal{P}(V_1,\dots,V_m)^*$ и $\mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)$ —

Теорема (о каноническом изоморфизме $\mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)^*$ и $\mathcal{P}(V_1,\dots,V_m)$)

Отображение

$$\widetilde{\Psi}\colon \mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)^* \to \mathcal{P}(V_1,\dots,V_m), \quad \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}\circ\tilde{\delta}$$

является изоморфизмом, где

$$\tilde{\delta}\colon V_1\times\dots V_m \to \mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*), \quad (\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_m)\mapsto \boldsymbol{x}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{x}_m.$$

Отображение $\tilde{\delta}$ *полилинейно и* $\langle\tilde{\delta}(V_1\times\dots\times V_m)\rangle = \mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)$.

Следствие

Для любой полилинейной функции $\varphi\colon V_1\times\dots\times V_m\to K$ *существует единственная линейная функция* $\boldsymbol{l}\colon \mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)\to K$, *для которого* $\boldsymbol{l}\circ\tilde{\delta}=\varphi$.

Из следствия и теоремы о характеризация тензорного произведения вытекает:

Теорема (о существовании тензорного произведения)

Пара $(\tilde{\delta}, \mathcal{P}(V_1^*, \ldots, V_m^*))$ *является тензорным произведением для* $V_1, \ldots, V_m$.

Далее под тензорным произведением $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ будем подразумевать $\mathcal{P}(V_1^*, \ldots, V_m^*)$ с отображением

$$\otimes = \tilde{\delta} \colon V_1 \times \cdots \times V_m \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_m, \quad (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \mapsto \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m.$$

Замечание

Для того, чтобы определить линейное отображение $\mathcal{A}$ на тензорном произведении, достаточно его определить на $\otimes(V_1 \times \ldots \times V_m)$ таким образом, что отображение $\mathcal{A} \circ \otimes \colon V_1 \times \ldots \times V_m \to V$ полилинейно. Формула

$$\mathcal{A} \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \to V, \quad \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m \mapsto \Phi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$$

корректно определяет линейное отображение $\mathcal{A}$, если отображение $\Phi \colon V_1 \times \ldots \times V_m \to V$ полилинейно.

Сопряженное к тензорному произведению пространство

Из теоремы о каноническом изоморфизме $\mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)^*$ и $\mathcal{P}(V_1,\dots,V_m)$, $V_1\otimes\dots\otimes V_m=\mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)$ и $V_1^*\otimes\dots\otimes V_m^*=\mathcal{P}(V_1\dots,V_m)$ вытекает

$$\boxed{(V_1\otimes\dots\otimes V_m)^*=V_1^*\otimes\dots\otimes V_m^*.}$$

Если $\boldsymbol{x}_i\in V_i$ и $\boldsymbol{l}_i\in V_i^*$, то

$$\boxed{\begin{gathered}(\boldsymbol{x}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{l}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{l}_m)=(\boldsymbol{l}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{l}_m)(\boldsymbol{x}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{x}_m)=\\ \boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{l}_1)\dots\boldsymbol{x}_m(\boldsymbol{l}_m)=\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1)\dots\boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m).\end{gathered}}$$

Если $\varphi\in V_1^*\otimes\dots\otimes V_m^*$, $\psi\in V_1\otimes\dots\otimes V_m$,

$$\varphi=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{l}_{1i}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{l}_{mi},\quad \psi=\sum_{j=1}^{l}\boldsymbol{x}_{1j}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{x}_{mj},\quad\text{то}$$

$$\boxed{\varphi(\psi)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\boldsymbol{l}_{1i}(\boldsymbol{x}_{1j})\dots\boldsymbol{l}_{mi}(\boldsymbol{x}_{mj}),}$$

при этом значение $\varphi(\psi)=\psi(\varphi)$ не зависит от разложений φ и ψ.

Базис и переход к новой системе координат в тензорных произведениях

Для $i = 1, \ldots, m$, пусть $\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots \boldsymbol{e}_{in_i}$ базис в V_i и $\boldsymbol{\varepsilon}'_{i1}, \ldots \boldsymbol{\varepsilon}'_{in_i}$ сопряженный базис в V_i^*.

Учитывая изоморфизмы пространств полилинейных функций и тензорных произведений, из результатов о полилинейных функциях, получаем, что базисы в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ и $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_m^*$ образуют множества

$$\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m} \quad \text{где } j_i = 1, \ldots, n_i \text{ и } i = 1, \ldots, m,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m} \quad \text{где } j_i = 1, \ldots, n_i \text{ и } i = 1, \ldots, m,$$

соответственно. Эти базисы сопряжены.

Для $i = 1, \ldots, m$, пусть $\boldsymbol{e}'_{i1}, \ldots \boldsymbol{e}'_{in_i}$ базис в V_i, $(c_{ipq})_{pq}$ матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots \boldsymbol{e}_{in_i}$ к базису $\boldsymbol{e}'_{i1}, \ldots \boldsymbol{e}'_{in_i}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}'_{i1}, \ldots \boldsymbol{\varepsilon}'_{in_i}$ сопряженный к базису $\boldsymbol{e}'_{i1}, \ldots \boldsymbol{e}'_{in_i}$.

Пусть $b_{j_1 \ldots j_m}$ и $b'_{j'_1 \ldots j'_m}$ координаты $\varphi \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ в базисах $\{\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m}\}_{j_1 \ldots j_m}$ и $\{\boldsymbol{e}'_{1j'_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}'_{mj'_m}\}_{j'_1 \ldots j'_m}$ соответственно. Тогда

$$\boxed{b'_{j'_1 \ldots j'_m} = \sum_{j_i = 1, \ldots, n_i \text{ для } i = 1, \ldots, m} c_{1j_1j'_1} \ldots c_{mj_mj'_m} b_{j_1 \ldots j_m}.}$$

Пусть $d_{j_1 \ldots j_m}$ и $d'_{j'_1 \ldots j'_m}$ координаты $\psi \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_m^*$ в базисах $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}\}_{j_1 \ldots j_m}$ и $\{\boldsymbol{\varepsilon}'_{1j'_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}'_{mj'_m}\}_{j'_1 \ldots j'_m}$ соответственно. Тогда

$$\boxed{d_{j_1 \ldots j_n} = \sum_{j'_i = 1, \ldots, n_i \text{ для } i = 1, \ldots, m} c_{1j_1j'_1} \ldots c_{mj_mj'_m} d'_{j'_1 \ldots j'_m}.}$$

Тензорное произведение эвклидовых пространств

Если пространства $V_1, \dots, V_m$ эвклидовы, мы отождествляем V_i и V_i^* — $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_i$. Это позволяет отождествлить $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$ с $(V_1 \otimes \dots \otimes V_m)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_m^*$. Если $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in V_i$ для $i = 1, \dots, m$, то

$$(\boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{y}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{y}_m) = (\boldsymbol{y}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{y}_m)(\boldsymbol{y}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{y}_m) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) \dots (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m).$$

Если $\varphi, \psi \in V_1 \otimes \dots \otimes V_m$, $\varphi = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{y}_{1i} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{y}_{mi}$, $\psi = \sum_{j=1}^l \boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_{mj}$, то

$$\varphi(\psi) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\boldsymbol{y}_{1i}, \boldsymbol{x}_{1j}) \dots (\boldsymbol{y}_{mi}, \boldsymbol{x}_{mj}),$$

при этом значение $\varphi(\psi) = \psi(\varphi)$ не зависит от разложений φ и ψ на разложимые элементы.

Введем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$ — $(\varphi, \psi) = \varphi(\psi) = \psi(\varphi)$:

$$\boxed{(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\boldsymbol{y}_{1i}, \boldsymbol{x}_{1j}) \dots (\boldsymbol{y}_{mi}, \boldsymbol{x}_{mj}).}$$

Очевидно, функция $(\cdot,\cdot)$ билинейна и из формулы для (φ, ψ) вытекает, что симметрична. Покажем, что $(\cdot,\cdot)$ положительно определена. Для этого достаточно найти ортонормированный базис для билинейной формы $(\cdot,\cdot)$, в этом базисе матрица билинейной формы $(\cdot,\cdot)$ является единичной матрицей.

Для $i = 1, ..., m$, пусть $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots \boldsymbol{e}_{in_i}$ ортонормированный базис в V_i. Покажем, что базис

$$\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m} \quad \text{где } j_i = 1, \dots, n_i \text{ и } i = 1, \dots, m$$

ортонормирован:

$$(\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m}, \boldsymbol{e}_{1j'_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{mj'_m}) = (\boldsymbol{e}_{1j_1}, \boldsymbol{e}_{1j'_1}) \dots (\boldsymbol{e}_{mj_m}, \boldsymbol{e}_{1m'_m}) =$$
$$= \delta_{j_1 j'_1} \dots \delta_{j_m j'_m} = \begin{cases} 1, & \text{если } j_1 \dots j_m = j'_1 \dots j'_m, \\ 0, & \text{если } j_1 \dots j_m \neq j'_1 \dots j'_m. \end{cases}$$

Тензорное произведение ассоциативно:

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3.$$

То есть, между пространствами $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ и $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ есть естественный изоморфизм. Отображение

$$\Phi\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3, \ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \mapsto (\boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2) \otimes \boldsymbol{x}_3.$$

полилинейно, поэтому существует единственное линейное отображение $\mathcal{A}\colon V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$, для которого

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2 \otimes \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2) \otimes \boldsymbol{x}_3.$$

Вектора $\{\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \boldsymbol{e}_{2j_2}\}_{j_1 j_2}$ образуют базис в $V_1 \otimes V_2$, поэтому вектора $\{(\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \boldsymbol{e}_{2j_2}) \otimes \boldsymbol{e}_{3j_3}\}_{j_1 j_2 j_3}$ образуют базис в $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Вектора $\{\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \boldsymbol{e}_{2j_2} \otimes \boldsymbol{e}_{3j_3}\}_{j_1 j_2 j_3}$ образуют базис в $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Отображение $\mathcal{A}$ переводит базис $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ в базис $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Следовательно, $\mathcal{A}$ изоморфизм.

В произведении $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ скобки можно растравлять произвольным образом.

Пусть $\boldsymbol{l} \in V_2^*$. Так как отображение $V_1 \times V_2 \to V_1, \quad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_1$ билинейно, то существует линейное отображение

$$\bar{\boldsymbol{l}} \colon V_1 \otimes V_2 \to V_1, \quad \boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2 \mapsto \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_1.$$

Предположим, что $V_3 = V_2^*$. Так как функция $V_2 \times V_3 \to K$, $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \mapsto \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{x}_2)$ билинейна, то существует функционал

$$\sigma \colon V_2 \otimes V_3 \to K, \ \ \boldsymbol{x}_2 \otimes \boldsymbol{x}_3 \mapsto \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{x}_2).$$

Учитывая $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, получаем линейное отображение

$$\bar{\sigma} \colon V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to V_1, \quad \boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2 \otimes \boldsymbol{x}_3 \mapsto \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_1.$$

Отображение $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ называется *сверткой* (по V_2 и V_3).

Предположим, что $V_i = V_j^*$ для различных $i, j = 1, \dots, m$. Аналогично, линейное отображение

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_m \to V_1 \otimes \dots \otimes V_{i-1} \otimes V_{i+1} \otimes \dots \otimes V_{j-1} \otimes V_{j+1} \otimes \dots \otimes V_m$$

$$\boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_m \mapsto \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{x}_j)(\boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_{i-1} \otimes \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_{j-1} \otimes \boldsymbol{x}_{j+1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_m)$$

называется *сверткой* (по V_i и V_j).