

Линейная алгебра и геометрия

Лекция 14. Аффинные пространства II.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Взаимное расположение плоскостей

Объединение двух плоскостей, вообще говоря, не является плоскостью.

Теорема

Пусть $\pi = A + U$ и $\rho = B + W$ — две плоскости. Тогда

$$\text{Aff}(\pi \cup \rho) = A + \langle \{\overrightarrow{AB}\} \cup (U + W) \rangle.$$

Пусть $\mathbb{A}$ конечномерно. Если $\pi \cap \rho \neq \emptyset$, то справедлива *формула Грассмана*

$$\dim \text{Aff}(\pi \cup \rho) = \dim \pi + \dim \rho - \dim(\pi \cap \rho).$$

Если $\pi \cap \rho = \emptyset$, то

$$\dim \text{Aff}(\pi \cup \rho) = \dim \pi + \dim \rho + 1 - \dim(U \cap W).$$

Доказательство. Положим $\sigma = A + \langle \{\overrightarrow{AB}\} \cup (U + W) \rangle$. Тогда $\pi, \rho \subset \sigma \implies \text{Aff}(\pi \cup \rho) \subset \sigma$.

Обратно, $A \in \text{Aff}(\pi \cup \rho) \implies \text{Aff}(\pi \cup \rho) = A + V'$ для некоторого $V' \subset_{\text{lin}} V$. Из того, что $B \in \text{Aff}(\pi \cup \rho)$, следует, что $\overrightarrow{AB} \in V'$. Для любого $u \in U$ имеем $A + u \in \pi \subset \text{Aff}(\pi \cup \rho) \implies u \in V'$. Для любого $w \in W$ имеем $B + w \in \rho \subset \text{Aff}(\pi \cup \rho)$ и $B + w = (A + \overrightarrow{AB}) + w = A + (\overrightarrow{AB} + w) \implies \overrightarrow{AB} + w \in V'$. Поскольку $\overrightarrow{AB} \in V'$, имеем $w \in V'$. Следовательно, $\langle \{\overrightarrow{AB}\} \cup (U + W) \rangle \subset V'$, т.е. $\sigma \subset \text{Aff}(\pi \cup \rho)$.

Пусть $\pi \cap \rho \neq \emptyset$ и $X \in \pi \cap \rho$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA} \in U + W$. Следовательно,
 $\dim\{\overrightarrow{AB}\} \cup (U + W) = \dim(U + W)$. Формула Грассмана $\implies$

$$\begin{aligned}\dim \text{Aff}(\pi \cup \rho) &= \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \\ &= \dim \pi + \dim \rho - \dim(\pi \cap \rho).\end{aligned}$$

Пусть $\pi \cap \rho = \emptyset$.

Если $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ для $\mathbf{u} \in U$ и $\mathbf{w} \in W$, то по аксиоме ① аффинного пространства $B = A + \overrightarrow{AB} = A + (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (A + \mathbf{u}) + \mathbf{w}$, т.е. $A + \mathbf{u} = B - \mathbf{w} \in \pi \cap \rho$. По предположению $\pi \cap \rho = \emptyset \implies \overrightarrow{AB} \notin U + W$. Следовательно,

$$\dim\{\overrightarrow{AB}\} \cup (U + W) = \dim(U + W) + 1$$

и

$$\begin{aligned}\dim \text{Aff}(\pi \cup \rho) &= \dim(U + W) + 1 = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) + 1 = \\ &= \dim \pi + \dim \rho - \dim(U \cap W) + 1.\end{aligned}$$



Замечание

Из доказательства видно, что плоскости $\pi = A + U$ и $\rho = B + W$ пересекаются тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AB}$ лежит в $U + W$.

Определение

Плоскости $\pi = A + U$ и $\rho = B + W$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ называются **параллельными**, если $U \subset W$ или $W \subset U$. Обозначение: $\pi \parallel \rho$.

Замечание

Плоскости π и ρ параллельны $\iff$ либо они не пересекаются, либо одна из них содержится в другой.

Определение

Плоскости π и ρ называются **скрещивающимися**, если они не параллельны и не пересекаются.

Для любых двух плоскостей есть три возможности: они могут

- пересекаться,
- не пересекаться и быть параллельными,
- скрещиваться.

Упражнение

Докажите, что если π — гиперплоскость в конечномерном аффинном пространстве $\mathbb{A}$, то любая не пересекающая π плоскость параллельна π .

Аффинно-линейные функции

Любое поле K можно рассматривать как одномерное векторное пространство над полем K , а также как аффинное пространство, ассоциированное с K . Пусть $\mathbb{A}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством V над K .

Определение

Отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow K$ называется **аффинно-линейной**, или **аффинной**, функцией, если существует линейное отображение $\varphi: V \rightarrow K$ такое, что

$$f(X + \mathbf{x}) = f(X) + \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{для любых } X \in \mathbb{A} \text{ и } \mathbf{x} \in V.$$

Линейная функция φ называется **дифференциалом** функции f и обозначается df .

Замечание

Функция $f: \mathbb{A} \rightarrow K$ **аффинно-линейна** $\iff$ если $\exists O \in \mathbb{A}$ и $\exists$ линейное отображение (**дифференциал**) $df: V \rightarrow K$ такие, что $f(O + \mathbf{v}) = f(O) + df(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in V$.

Действительно, $\Rightarrow$ очевидно. $\Leftarrow$: $\forall X \in \mathbb{A} \exists \mathbf{x} \in V$ такой, что $X = O + \mathbf{x}$. Для любого $\mathbf{v} \in V$ имеем $f(X + \mathbf{v}) = f(O + \mathbf{x} + \mathbf{v}) = f(O) + df(\mathbf{x}) + df(\mathbf{v}) = f(X) + df(\mathbf{v})$

Пусть $\dim \mathbb{A} = n$ и в $\mathbb{A}$ зафиксирован репер $(O, \mathbf{E})$, где $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, и пусть $df = f_1 \mathbf{e}_1 + \dots + f_n \mathbf{e}_n$ — разложение дифференциала df по взаимному базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в сопряженном пространстве V^* .

Если $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки $X \in \mathbb{A}$ в $(O, \mathbf{E})$ и $f(O) = c \in K$, то

$$f(X) = f(O + \overrightarrow{OX}) = f(O) + df(\overrightarrow{OX}) = f(O) + df(x_1, \dots, x_n),$$

откуда

$$\boxed{f(X) = f_1 x_1 + \dots + f_n x_n + c}. \quad (*)$$

Обратно, любая функция $f: \mathbb{A} \rightarrow K$ вида $(*)$ аффинно-линейна: для любого вектора $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n \in V$ точка $X + \mathbf{v} = O + (\overrightarrow{OX} + \mathbf{v})$ имеет координаты $(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n)$ относительно репера $(O, \mathbf{E})$, и $(*) \implies$

$$f(X + \mathbf{v}) = f_1(x_1 + v_1) + \dots + f_n(x_n + v_n) + c.$$

Следовательно,

$$f(X + \mathbf{v}) = df(f_1 x_1 + \dots + f_n x_n + c) + (f_1 v_1 + \dots + f_n v_n) = f(X) + \varphi(\mathbf{v}).$$

Выражение $f(X) = f_1 x_1 + \dots + f_n x_n + c$ будем обозначать $f(x_1, \dots, x_n)$. Его называют **аффинно-линейной формой**.

Предложение

Барицентрические координаты относительно любых аффинно независимых точек в n -мерном аффинном пространстве — аффинно-линейные функции.

Доказательство. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ — барицентрические координаты точки X относительно аффинно независимых точек $A_0, \dots, A_n$. Тогда $x_1, \dots, x_n$ — координаты вектора $\overrightarrow{A_0X}$ в базисе $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ векторного пространства V . Значит, $f_i(X) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, — аффинно-линейные функции. Поскольку $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$, функция $f_0(X) = x_0$ тоже аффинно-линейна. □

Упражнения

1. Докажите, что функция $f: \mathbb{A} \rightarrow K$ аффинно-линейна тогда и только тогда, когда для любой барицентрической линейной комбинации $\sum_{i=0}^k \lambda_i X_i$ любых точек $X_0, \dots, X_k \in \mathbb{A}$

$$f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(X_i)$$

(ниже доказана аналогичная теорема для общих аффинных отображений).

2. **Выпуклым многогранником** называется выпуклая оболочка конечного числа точек $A_0, \dots, A_k$ в аффинном пространстве. Точки $A_0, \dots, A_k$ называются **вершинами** многогранника.

Выведите из упражнения 1, что ограничение любой аффинно-линейной функции на любой выпуклый многогранник достигает своего максимума (а также минимума) в одной из вершин многогранника.

Важнейшие приложения выпуклых многогранников связаны с линейным программированием, основная задача которого состоит в максимизации или минимизации данной аффинно-линейной функции на выпуклом многограннике.

Пример

Транспортная задача. Имеются пункты производства $\Pi_1, \dots, \Pi_m$ некоторого продукта и пункты его реализации $P_1, \dots, P_n$. Для всех $i \leq m$ и $j \leq n$ заданы следующие величины: объём производства a_i в Π_i , объём реализации b_j в P_j и затраты c_{ij} на перевозку единицы продукта из Π_i в P_j . Предполагается, что суммарный объём производства равен объёму реализуемого продукта: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Требуется составить план перевозок (т.е. определить количество продукта x_{ij} , который предполагается доставить из Π_i в P_j), позволяющий полностью вывезти продукты всех производителей, обеспечивающий все пункты реализации и дающий минимум суммарных затрат на перевозку. Иными словами, на выпуклом многограннике

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0$$

в mn -мерном пространстве с координатами x_{ij} ($i \leq m, j \leq n$) требуется минимизировать функцию $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ — общую стоимость перевозки.

Определение

Множество точек, в которых аффинно-линейная функция $f: \mathbb{A} \rightarrow K$ обращается в ноль, называется **ядром** функции f и обозначается $\text{Ker } f$.

Предложение

Ядро $\text{Ker } f$ аффинно-линейной функции $f: \mathbb{A} \rightarrow K$ с дифференциалом $df: V \rightarrow K$ либо пусто, либо является плоскостью и равно $A + \text{Ker } df$, где A — произвольная точка, удовлетворяющая условию $f(A) = 0$.

Доказательство. Для любой точки $B = A + \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \in \text{Ker } df$, имеем $f(B) = f(A + \mathbf{v}) = f(A) + df(\mathbf{v}) = 0$. Значит, $A + \text{Ker } df \subset \text{Ker } f$.

Если $B \in \text{Ker } f$, то $f(B) = f(A) + df(\overrightarrow{AB}) = 0 \implies df(\overrightarrow{AB}) = 0$, т.е. $\overrightarrow{AB} \in \text{Ker } df$, а значит, $\text{Ker } f \subset A + \text{Ker } df$. □

Из предложения следует, что пересечение ядер конечного числа аффинно-линейных функций либо пусто, либо является плоскостью.

Теорема

Пусть $\mathbb{A}$ — аффинное пространство размерности n . Тогда

- ❶ Множество точек из $\mathbb{A}$, координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений ранга r , образуют $(n - r)$ -мерную плоскость $\pi \subset \mathbb{A}$.
- ❷ Произвольная k -мерная плоскость в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ состоит из всех точек, координаты которых относительно произвольного репера составляют множество решений некоторой системы линейных уравнений ранга $n - k$.

Доказательство. ❶ Пусть дана совместная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассмотрим аффинные функции $f_i: \mathbb{A} \rightarrow K$, $i = 1, \dots, m$, которые имеют координатную запись $f_i(X) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$ относительно некоторого репера $(O, \mathbf{E})$.

Данную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} f_1(X) = 0, \\ \dots \\ f_m(X) = 0. \end{cases}$$

Видим, что числа $x_1, \dots, x_n$ являются решением данной системы $\iff$ они являются координатами относительно репера $(O, \mathbf{E})$ точки X , лежащей в плоскости $\pi = \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_m$.

Пусть $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ — любое решение данной системы и X_0 — точка в $\mathbb{A}$ с координатами $x_1^0, \dots, x_n^0$ относительно репера $(O, \mathbf{E})$. Из курса алгебры знаем, что решения системы линейных уравнений суть суммы любого фиксированного частного решения неоднородной системы и решений однородной системы. Значит, $(x_1, \dots, x_n)$ — решение данной системы $\iff$ это набор координат точки $X = X_0 + \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} \in V$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} df_1(X) = 0, \\ \dots \\ df_m(X) = 0 \end{cases}$$

(напомним, что df_i — дифференциал функции f_i).

Из курса алгебры знаем, что множество решений — подпространство U размерности $n - r$, где r — ранг матрицы коэффициентов однородной системы (см. также подраздел «Функционалы и подпространства» в начале этого курса, в конце раздела «Сопряжённое пространство»). Значит, множество решений данной системы — плоскость $\pi = X_0 + U$ размерности $n - r$.

② Пусть $\pi = A + U$ — плоскость размерности k . В разделе о подпространствах векторных пространств была доказана теорема, что U — множество решений однородной системы линейных уравнений ранга $n - k$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0. \end{cases}$$

Точка X принадлежит плоскости $\pi = A + U \iff \overrightarrow{AX} \in U$. Если $a_1, \dots, a_n$ — координаты точки A , а $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки X относительно репера $(O, \mathbf{E})$, то $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ — координаты вектора $\overrightarrow{AX}$ в базисе $\mathbf{E}$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_j$ для $i = 1, \dots, k$.



Аффинные отображения

Всюду ниже V и W — векторные пространства над одним и тем же полем K .

Определение

Пусть даны два аффинных пространства, $\mathbb{A}$ над V и $\mathbb{B}$ над W . Отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ называется **аффинным**, если существует линейное отображение $\varphi: V \rightarrow W$ такое, что $f(A + \mathbf{v}) = f(A) + \varphi(\mathbf{v})$ для любых $A \in \mathbb{A}$ и $\mathbf{v} \in V$.

Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется **дифференциалом**, или **линейной частью**, отображения f и обозначается df .

Замечания

1. $f(B) = f(A) + df(\overrightarrow{AB})$ для любых $A, B \in \mathbb{A} \implies$ любое аффинное отображение однозначно определяется своим дифференциалом и значением в любой данной точке.
2. $df(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ для любых $A, B \in \mathbb{A}$.

Теорема

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — аффинные пространства над векторными пространствами V и W . Отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ аффинно $\iff$ существуют точка $O \in \mathbb{A}$ и линейное отображение $\varphi: V \rightarrow W$ такие, что $f(O + \mathbf{v}) = f(O) + \varphi(\mathbf{v})$ для любого $\mathbf{v} \in V$. При этом $\varphi = df$.

Доказательство. $\Rightarrow$: очевидно.

$\Rightarrow$: Для любой точки $A \in \mathbb{A}$ существует вектор $\mathbf{w} \in V$ такой, что $A = O + \mathbf{w}$. Для всякого $\mathbf{v} \in V$ имеем

$$\begin{aligned} f(A + \mathbf{v}) &= f(O + \mathbf{w} + \mathbf{v}) = f(O) + \varphi(\mathbf{w} + \mathbf{v}) = f(O) + \varphi(\mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}) = \\ &= f(O + \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}) = f(A) + \varphi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$



Предложение

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — аффинные пространства над векторными пространствами V и W и $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — отображение. Тогда следующие условия равносильны:

- ① отображение f — изоморфизм аффинных пространств;
- ② отображение f аффинно и биективно;
- ③ отображение f аффинно и его дифференциал $df: V \rightarrow W$ биективен, т.е. является изоморфизмом векторных пространств V и W .

Доказательство. ① $\Leftrightarrow$ ③: по определению изоморфизма.

② $\Rightarrow$ ③: Пусть f — биекция. Для $A \in \mathbb{A}$ и $\mathbf{v} \in V$ имеем $f(A + \mathbf{v}) = f(A) + df(\mathbf{v})$. Если $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то $A + \mathbf{v} \neq A \Rightarrow f(A + \mathbf{v}) \neq f(A) \Rightarrow df(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, т.е. df инъективно.

Пусть $\mathbf{w} \in W$. Возьмём $A \in \mathbb{A}$. Отображение f сюръективно $\Rightarrow \exists$ точка $A' \in \mathbb{A}$ такая, что $f(A') = f(A) + \mathbf{w}$. Имеем $df(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{f(A)f(A')} = \mathbf{w}$, т.е. df сюръективно.

③ $\Leftarrow$ ②: Если $df: V \rightarrow W$ — изоморфизм и $A, A' \in \mathbb{A}$ различны, то $\overrightarrow{AA'} \neq \mathbf{0} \Rightarrow df(\overrightarrow{AA'}) \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(A') = f(A) + df(\overrightarrow{AA'}) \neq f(A)$, т.е. f инъективно.

Возьмём $A \in \mathbb{A}$. df сюръективно $\Rightarrow \forall B \in W$ существует $\mathbf{v} \in V$, для которого $df(\mathbf{v}) = \overrightarrow{f(A)B}$. Имеем $f(A + \mathbf{v}) = B$, т.е. f сюръективно. □

Теорема

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — аффинные пространства над векторными пространствами V и W . Отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ аффинно $\iff$ для любой барицентрической линейной комбинации $\sum_{i=0}^k \lambda_i X_i$ любых точек $X_0, \dots, X_k \in \mathbb{A}$

$$f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(X_i).$$

Доказательство. $\Rightarrow$: Для $i \leq k$ положим $\mathbf{x}_i = \overrightarrow{X_0 X_i}$. Имеем

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i X_i\right) &= f\left(X_0 + \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i\right)\right) = f(X_0) + df\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i\right) f(X_0) + df\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i (f(X_0) + df(\mathbf{x}_i)) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(X_i). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Пусть $\mathbf{E}$ — базис в V и $O \in \mathbb{A}$. Для любого $\mathbf{x} \in V$ имеем $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{e}_i \in V$, где $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in K$ и $\mathbf{e}_i \in \mathbf{E}$. Положим $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{f(O) f(O + \mathbf{e}_i)}$. Легко показать, что φ — линейное отображение $V \rightarrow W$.

Каждая точка $X \in \mathbb{A}$ имеет вид $X = O + \mathbf{x}$ для некоторого $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{e}_i$. Положим $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$, $X_0 = O$ и $X_i = O + \mathbf{e}_i$ для $i = 1, \dots, k$. Имеем $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OX_0} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{OX_i} = \mathbf{e}_i$ для $i = 1, \dots, k$ и

$$\overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{OX_i}, \quad \text{т.е.} \quad X = \sum_{i=0}^k \lambda_i X_i.$$

По предположению

$$f(X) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(X_i).$$

По определению барицентрической линейной комбинации это означает, что

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(O)f(X)} &= \sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(X_i)} = \lambda_0 \overrightarrow{f(O)f(X_0)} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(X_i)} = \\ &= \mathbf{0} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(O + \mathbf{e}_i)} = \varphi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

т.е. $f(X) = f(O) + \varphi(\mathbf{x})$. Таким образом, для любого $\mathbf{x} \in V$ имеем

$f(O + \mathbf{x}) = f(O) + \varphi(\mathbf{x})$, т.е. f — аффинное отображение с дифференциалом $df = \varphi$.



Следствие

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — аффинные пространства над векторными пространствами V и W и $\dim \mathbb{A} = n$. тогда для любых аффинно независимых точек $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$ и любых точек $B_0, B_1, \dots, B_n \in \mathbb{B}$ существует единственное аффинное отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ с тем свойством, что $f(A_i) = B_i$ для $i = 0, 1, \dots, n$.

Замечания

1. Для аффинных отображений $f_0, \dots, f_k: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ и любых $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in K$, $\sum \lambda_i = 1$, можно определить **поточечную барицентрическую линейную комбинацию** $f = \sum_{i=0}^k \lambda_i f_i$ отображений f_i с коэффициентами λ_i , полагая

$$f(X) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f_i(X) \quad \text{для всех } X \in \mathbb{A}.$$

По предыдущей теореме эта комбинация тоже является аффинным отображением $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$.

2. Композиция аффинного отображения $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ с дифференциалом $df: V_1 \rightarrow V_2$ и аффинного отображения $g: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_3$ с дифференциалом $dg: V_2 \rightarrow V_3$ является аффинным отображением $\mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_3$ с дифференциалом $dg \circ df: V_1 \rightarrow V_3$.

Матрица аффинного отображения

Пусть $\mathbb{A}$ — n -мерное аффинное пространство над V , $\mathbb{B}$ — m -мерное аффинное пространство над W , $(O_A, \mathbf{E}_A)$ — репер в $\mathbb{A}$, $(O_B, \mathbf{E}_B)$ — репер в $\mathbb{B}$ и $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — аффинное отображение с дифференциалом $df: V \rightarrow W$. Матрицей аффинного отображения f в системах координат $(O_A, \mathbf{E}_A)$ и $(O_B, \mathbf{E}_B)$ называется матрица

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_m \end{matrix} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A — матрица дифференциала df в базисах $\mathbf{E}_A$ и $\mathbf{E}_B$ и $o'_1, \dots, o'_m$ — координаты точки $f(O_A)$ относительно репера $(O_B, \mathbf{E}_B)$.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки $X \in \mathbb{A}$ относительно репера $(O_A, \mathbf{E}_A)$ (т.е. координаты вектора $\overrightarrow{O_A X}$ в базисе $\mathbf{E}_A$) и $x'_1, \dots, x'_m$ — координаты $f(X) \in \mathbb{B}$ относительно репера $(O_B, \mathbf{E}_B)$ (т.е. координаты вектора $\overrightarrow{O_B f(X)}$ в базисе $\mathbf{E}_B$). Тогда $f(X) = f(O_A) + df(\overrightarrow{O_A X}) = O_B + \overrightarrow{O_B f(O_A)} + df(\overrightarrow{O_A X})$. В координатах:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_m \end{pmatrix}, \quad \text{или}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + o'_1, \\ \dots \\ x'_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + o'_m \end{cases}.$$

Пусть $(O_A, \mathbf{E}_A), (\tilde{O}_A, \tilde{\mathbf{E}}_A)$ — два репера в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ и $(O_B, \mathbf{E}_B), (\tilde{O}_B, \tilde{\mathbf{E}}_B)$ — два репера в аффинном пространстве $\mathbb{A}$, и пусть T_A ($\hat{T}_A$) — матрица перехода от базиса $\mathbf{E}_A$ к базису $\tilde{\mathbf{E}}_A$ (от репера $(O_A, \mathbf{E}_A)$ к реперу $(\tilde{O}_A, \tilde{\mathbf{E}}_A)$), а T_B ($\hat{T}_B$) — соответствующие матрицы для $\mathbb{B}$. Тогда $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T}_B \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_m \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T}_A \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}$, так что в новых координатах $\begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_m \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T}_B^{-1} \hat{A} \hat{T}_A \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}$, откуда

$$\boxed{\tilde{A} = \hat{T}_B^{-1} \hat{A} \hat{T}_A} \quad \text{и} \quad \boxed{\tilde{A} = T_B^{-1} A T_A}$$

(второе равенство следует из того, что у матриц $\hat{A}$, $\hat{T}_A$ и $\hat{T}_B$ последняя строка равна $(0 \dots 01)$).

Рангом аффинного отображения f называется ранг его дифференциала. В координатах: $\text{rank } f = \text{rank } A = \text{rank } \hat{A} - 1$.

Аффинные операторы

Определение

Аффинным оператором называется аффинное отображение аффинного пространства в себя. Взаимно однозначный аффинный оператор называется **аффинным преобразованием**.

Примеры

1. **Сдвиг**, или **параллельный перенос**, на фиксированный вектор $\mathbf{v} \in V$:

$$t_{\mathbf{v}}(X) = X + \mathbf{v} \quad \text{для всех } X \in \mathbb{A}.$$

2. **Гомотетия** с центром в фиксированной точке $O \in \mathbb{A}$ и коэффициентом $\lambda \in K \setminus \{0\}$:

$$f(X) = O + \lambda \overrightarrow{OX} \quad \text{для всех } X \in \mathbb{A}.$$

Гомотетия с коэффициентом $\lambda = -1$ называется **центральной симметрией**.

Упражнения

1. Докажите, что всякое аффинное преобразование с дифференциалом $\lambda \mathcal{E}$, где $\lambda \neq 0, 1$, является гомотетией.
2. Докажите, что композиция гомотетий с разными центрами и коэффициентами λ и μ является гомотетией, если $\lambda \cdot \mu \neq 1$, и параллельным переносом, если $\lambda \cdot \mu = 1$.

Матрица аффинного оператора

Пусть $\mathbb{A}$ — n -мерное аффинное пространство над V , $(O, \mathbf{E})$ — репер в $\mathbb{A}$ и $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ — аффинный оператор с дифференциалом $df: V \rightarrow V$. Матрицей аффинного оператора f относительно репера $(O, \mathbf{E})$ называется матрица

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} & A & o'_1 \\ & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & o'_n \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

где A — матрица дифференциала df в базисе $\mathbf{E}$ и $o'_1, \dots, o'_n$ — координаты точки $f(O)$ относительно репера $(O, \mathbf{E})$.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки $X \in \mathbb{A}$ относительно репера $(O, \mathbf{E})$ (т.е. координаты вектора $\overrightarrow{OX}$ в базисе $\mathbf{E}$) и $x'_1, \dots, x'_n$ — координаты $f(X)$ (т.е. координаты вектора $\overrightarrow{Of(X)}$ в базисе $\mathbf{E}$). Тогда $f(X) = f(O) + df(\overrightarrow{OX}) = O + \overrightarrow{Of(O)} + df(\overrightarrow{OX})$. В координатах:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_n \end{pmatrix}}, \quad \text{или} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \text{или} \quad \boxed{\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + o'_1, \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + o'_n \end{cases}}.$$

Пусть $(O, \mathbf{E})$ и $(\tilde{O}, \tilde{\mathbf{E}})$ — два репера в аффинном пространстве $\mathbb{A}$, и пусть T ($\hat{T}$) — матрица перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\tilde{\mathbf{E}}$ (от репера $(O, \mathbf{E})$ к реперу $(\tilde{O}, \tilde{\mathbf{E}})$).

Тогда $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_n \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}$, так что в новых координатах

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T}^{-1} \hat{A} \hat{T} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ откуда}$$

$$\boxed{\tilde{\hat{A}} = \hat{T}^{-1} \hat{A} \hat{T}} \quad \text{и} \quad \boxed{\tilde{A} = T^{-1} A T}$$

(второе равенство следует из того, что у матриц $\hat{A}$ и $\hat{T}$ строка равна $(0 \dots 01)$).

Аффинный оператор $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ называется **невырожденным**, если его ранг равен $\dim \mathbb{A}$. Аффинный оператор невырожден тогда и только тогда, когда он обратим, так что

невырожденные аффинные операторы = аффинные преобразования.

Если $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ — невырожденный аффинный оператор, то для любой точки $O \in \mathbb{A}$ и любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ имеем $f(f^{-1}(O) + \mathbf{x}) = O + df(\mathbf{x})$ и

$$f^{-1}(O + \mathbf{y}) = f^{-1}(O) + (df)^{-1}(\mathbf{y}),$$

так что $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$.

Множество всех невырожденных аффинных операторов в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ (= аффинных преобразований пространства $\mathbb{A}$) является группой, которая называется **полной аффинной группой пространства $\mathbb{A}$** и обозначается $GA(\mathbb{A})$. Группа $GA(\mathbb{A})$ содержит подгруппы сдвигов и операторов с неподвижной точкой.

Предложение

- 1 Любой сдвиг является аффинным оператором с тождественным дифференциалом.
- 2 Любой аффинный оператор с тождественным дифференциалом — сдвиг.
- 3 Множество $T(\mathbb{A})$ всех сдвигов аффинного пространства $\mathbb{A}$ является подгруппой группы $GA(\mathbb{A})$, изоморфная аддитивной группе векторного пространства V .

Доказательство

- 1 $t_v(X + x) = X + x + v = (X + v) + x = t_v(X) + x$.
- 2 Если $f(X + x) = f(X) + x$ для всех $X \in \mathbb{A}$ и $x \in V$, то для любой фиксированной точки $O \in \mathbb{A}$ и любой точки $X \in \mathbb{A}$ имеем $f(X) = f(O + \overrightarrow{OX}) = f(O) + \overrightarrow{OX} = X + \overrightarrow{Of(O)}$.
- 3 $t_v \circ t_u = t_{v+u}$, $t_v^{-1} = t_{-v}$, $t_0 = \text{id}|_{\mathbb{A}}$.



Ясно, что множество G_A всех аффинных преобразований с неподвижной точкой $A \in \mathbb{A}$, — тоже подгруппа, причём $G_A \cap T(\mathbb{A}) = \{\text{id}|_{\mathbb{A}}\}$.

Теорема

Пусть $A \in \mathbb{A}$. Тогда каждое аффинное преобразование $f \in \text{GA}(\mathbb{A})$ однозначно представляется в виде композиции

$$f = t_{\mathbf{v}} \circ g_A \quad \text{и} \quad f = g_A \circ t_{\mathbf{w}},$$

где $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ и $g_A \in G_A$. Таким образом, $\text{GA}(\mathbb{A}) = G_A \text{T}(\mathbb{A}) = \text{T}(\mathbb{A}) G_A$.

Доказательство. Положим $\mathbf{v} = \overrightarrow{Af(A)}$ и $g = t_{-\mathbf{v}}f$. Имеем $g \in G_A$ и $dg = df$, причём $f = t_{\mathbf{v}}g$ (больше не будем писать $\circ$).

Чтобы получить второе разложение, запишем $f = g(g^{-1}t_{\mathbf{v}}g)$. Дифференциал оператора $g^{-1}t_{\mathbf{v}}g$ тождественный (это композиция дифференциалов), поэтому $g^{-1}t_{\mathbf{v}}g = t_{\mathbf{w}}$ для некоторого $\mathbf{w} \in V$. В явном виде:

$$\begin{aligned} A + \mathbf{w} &= t_{\mathbf{w}}(A) = (g^{-1}t_{\mathbf{v}}g)(A) = g^{-1}(t_{\mathbf{v}}(g(A))) = g^{-1}(t_{\mathbf{v}}(A)) = \\ &= g^{-1}(A + \mathbf{v}) = g^{-1}(A) + (dg)^{-1}(\mathbf{v}) = A + (df)^{-1}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Единственность: пусть $f = t_{\mathbf{v}}g$ и $f = t_{\mathbf{v}'}g'$. Умножая равенство $t_{\mathbf{v}}g = t_{\mathbf{v}'}g'$ слева на $t_{\mathbf{v}'}^{-1}$, а справа на g^{-1} , получим $t_{\mathbf{v}-\mathbf{v}'} = g'g^{-1}$. Сдвиг с неподвижной точкой тождествен $\implies t_{\mathbf{v}} = t_{\mathbf{v}'}$ и $g = g'$. Единственность второго разложения доказывается аналогично. □

Евклидовы аффинные пространства

Определение

Аффинное пространство $\mathbb{A}$ над евклидовым пространством V называется **аффинно-евклидовым пространством** (или просто евклидовым пространством, если ясно, что речь идет о точечно-векторном пространстве). **Расстоянием** $\rho(A, B)$ между двумя точками $A, B \in \mathbb{A}$ называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$.

Среди всех аффинных систем координат в аффинно-евклидовом пространстве выделяются системы, связанные с ортонормированными реперами, т.е. реперами, базис которых ортонормирован. Такие системы координат называются **прямоугольными**.

Если $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ — координаты точек $X, Y \in \mathbb{A}$ относительно прямоугольной системы координат, то

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Определение

Два аффинных евклидовых пространства $\mathbb{A}$ и $\tilde{\mathbb{A}}$ называются **изоморфными**, если между ними существует изоморфизм аффинных пространств $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$, сохраняющий расстояние между точками, т.е. такой, что $\rho(A, B) = \tilde{\rho}(\varphi(A), \varphi(B))$ для любых $A, B \in \mathbb{A}$; здесь ρ — функция расстояния на $\mathbb{A}$ и $\tilde{\rho}$ — функция расстояния на $\tilde{\mathbb{A}}$.

Теорема

Любые аффинно-евклидовы пространства $\mathbb{A}$ (над евклидовым пространством V) и $\tilde{\mathbb{A}}$ (над $\tilde{V}$) одинаковой размерности изоморфны.

Доказательство. Выберем ортонормированные реперы $(O, \mathbf{E})$ в $\mathbb{A}$ и $(\tilde{O}, \tilde{\mathbf{E}})$ в $\tilde{\mathbb{A}}$. Для точки $X \in \mathbb{A}$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ относительно репера $(O, \mathbf{E})$ положим образ $\varphi(X)$ равным точке $\tilde{X} \in \tilde{\mathbb{A}}$ с координатами $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ относительно репера $(\tilde{O}, \tilde{\mathbf{E}})$. Отображение φ — изоморфизм аффинных пространств, и он сохраняет расстояния. □

Будем говорить, что **угол** между ненулевыми векторными подпространствами U и W евклидова пространства V **равен нулю**, если одно из них лежит в другом. В противном случае **углом** между U и W будем называть точную нижнюю грань углов между ненулевыми векторами $u \in U_0$ и $w \in W_0$, где U_0 и W_0 — ортогональные дополнения подпространства $U \cap W$ соответственно в U и W . **Углом между плоскостями** в аффинно-евклидовом пространстве называется угол между их направляющими подпространствами. Плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. **Расстояние** $\rho(\pi, \tau)$ между плоскостями π и τ определяется формулой

$$\rho(\pi, \tau) = \inf \{ \rho(X, Y) : X \in \pi, Y \in \tau \}.$$

Теорема

Для любых двух плоскостей $\pi = A + U$ и $\tau = B + W$ расстояние $\rho(\pi, \tau)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ в V относительно подпространства $U + W$.

Доказательство. Разложим V в прямую сумму

$$V = (U + W) \oplus (U + W)^\perp$$

и представим $\overrightarrow{AB}$ в виде

$$\overrightarrow{AB} = \text{pr}_{U+W} \overrightarrow{AB} + \text{ort}_{U+W} \overrightarrow{AB}.$$

Выберем любые две точки $X = A + \mathbf{u} \in \pi$ и $Y = B + \mathbf{w} \in \tau$. По теореме Пифагора

$$\rho(X, Y)^2 = |\overrightarrow{AB} + \mathbf{w} - \mathbf{u}|^2 = |\text{pr}_{U+W}(\overrightarrow{AB} + \mathbf{w} - \mathbf{u})|^2 + |\text{ort}_{U+W} \overrightarrow{AB}|^2 \geq |\text{ort}_{U+W} \overrightarrow{AB}|^2.$$

Равенство достигается для точек X и Y таких, что $\text{pr}_{U+W} \overrightarrow{XY} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$.



Аффинные операторы в евклидовых пространствах

Всюду ниже $\mathbb{A}$ — евклидово аффинное пространство, ассоциированное с евклидовым векторным пространством V , размерности n .

Определение

Движение, или **изометрия**, пространства $\mathbb{A}$ — это любое отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ с тем свойством, что $\rho(f(A), f(B)) = \rho(A, B)$ для любых точек $A, B \in \mathbb{A}$ (т.е. сохраняющее расстояния между точками).

Теорема

Отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ — движение $\iff f$ — аффинное отображение с ортогональным дифференциалом.

Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно. Докажем $\Rightarrow$. Возьмём любую точку $O \in \mathbb{A}$ и для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$ положим $\varphi(\mathbf{x}) = \overrightarrow{f(O)f(O+\mathbf{x})}$. Получили отображение $\varphi: V \rightarrow V$, сохраняющее длины векторов, причём $f(O+\mathbf{x}) = f(O) + \varphi(\mathbf{x})$.

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Длина вектора $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ равна расстоянию между точками $O + \mathbf{x}$ и $O + \mathbf{y} \implies |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

$$2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \implies \text{имеем } (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Отображение φ линейно:

Если $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, то

$$0 = |\mathbf{z} - \mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2(\mathbf{z}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|^2 \\ \implies \varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}).$$

$$\text{Если } \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}, \text{ то } 0 = |\mathbf{y} - \lambda \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + \lambda^2 |\mathbf{x}|^2 - 2\lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = |\varphi(\mathbf{y}) - \lambda \varphi(\mathbf{x})|^2 \implies \\ \varphi(\mathbf{y}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}).$$



Упражнение

Докажите, что если отображение обычной двумерной аффинно-евклидовой плоскости в себя переводит любые две точки, расстояние между которыми равно 1, в две точки, расстояние между которыми равно 1, то это отображение — движение.

Совокупность всех движений образует группу, называемую группой изометрий пространства $\mathbb{A}$ и обозначаемую $\text{Isom } \mathbb{A}$. Движение **собственное** (сохраняет ориентацию), если определитель его дифференциала равен 1. В противном случае (если определитель дифференциала равен -1) движение **несобственное** (меняет ориентацию). Собственные движения образуют подгруппу в $\text{Isom } \mathbb{A}$.

Теорема

Для любого движения $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ найдётся вектор $\mathbf{u} \in V$ такой, что $df(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ и $f = t_{\mathbf{u}} \circ \Phi$, где Φ — движение с неподвижной точкой.

Доказательство. Если у df есть собственный вектор с собственным значением 1, то положим $U = V_1$ (собственное подпространство), в противном случае положим $U = \{\mathbf{0}\}$. Пусть $W = U^\perp$. df ортогонален $\implies W$ инвариантно, и $(df - \mathcal{E})|_W$ невырождено.

Возьмём $O \in \mathbb{A}$ и положим $\mathbf{v} = \overrightarrow{Of(O)}$. Поскольку $V = U \oplus W$, имеем $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, где $\mathbf{u} \in U$ и $\mathbf{w} \in W$, причём $df(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Положим $g = t_{\mathbf{u}}^{-1} \circ f$.

Найдём неподвижную точку отображения g . Пусть $X = O + \mathbf{x}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in U$ и $\mathbf{z} \in W$. Тогда $g(X) = f(O) + df(\mathbf{x}) - \mathbf{u} = f(O) + df(\mathbf{x}) - \mathbf{u} = O + \mathbf{v} + df(\mathbf{x}) - \mathbf{u} = O + df(\mathbf{x}) + \mathbf{w} = O + \mathbf{x} + (df - \mathcal{E})\mathbf{x} + \mathbf{w}$. Значит, $X = O + \mathbf{x}$ неподвижна $\iff (df - \mathcal{E})\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = ((df - \mathcal{E})|_W)^{-1}(-\mathbf{w})$. □

Следствие

- ❶ Если $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ — движение и df не имеет собственных векторов с собственным значением 1, то f имеет неподвижную точку.
- ❷ Если $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ — движение и df имеет собственный вектор $\mathbf{u}$ с собственным значением 1, то прямая $f(O) + \langle \mathbf{u} \rangle$ состоит из неподвижных точек отображения $t_{-\mathbf{u}} \circ f$.

Замечания

1. Любое собственное движение прямой — сдвиг, несобственное движение прямой — композиция сдвига и отражения относительно неподвижной точки дифференциала.
2. Собственное движение двумерной плоскости — либо сдвиг, либо поворот относительно неподвижной точки. Несобственное движение плоскости — композиция сдвига вдоль прямой, состоящей из неподвижных точек дифференциала, и отражения относительно этой прямой.

3. Собственное движение трёхмерного пространства — композиция сдвига вдоль прямой, состоящей из неподвижных точек дифференциала, и вращения вокруг этой прямой (винтовое движение). Несобственное движение пространства — либо композиция симметрии относительно плоскости, состоящей из неподвижных точек дифференциала, и сдвига вдоль прямой, параллельного этой плоскости, либо является композицией симметрии относительно плоскости и вращения вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости.

Аффинно-квадратичные функции

В этом разделе $\mathbb{A}$ — n -мерное аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством V над полем K характеристики $\neq 2$.

Определение

Аффинно-квадратичной функцией на аффинном пространстве $\mathbb{A}$ называется отображение $Q: \mathbb{A} \rightarrow K$ с тем свойством, что для любой точки $O \in \mathbb{A}$ существуют квадратичная функция $q: V \rightarrow K$ и линейная функция $\ell: V \rightarrow K$ такие, что

$$Q(X) = Q(O) + 2\ell(\overrightarrow{OX}) + q(\overrightarrow{OX}) \quad \forall X \in \mathbb{A}.$$

Если $\tilde{O}$ — любая другая точка, то

$$\begin{aligned} Q(X) &= Q(\tilde{O} + \overrightarrow{\tilde{O}X}) = Q(O + \overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}X}) = Q(O) + 2\ell(\overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}X}) + q(\overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}X}) = \\ &= Q(O) + 2\ell(\overrightarrow{O\tilde{O}}) + 2\ell(\overrightarrow{\tilde{O}X}) + q(\overrightarrow{O\tilde{O}}) + q(\overrightarrow{\tilde{O}X}) + 2b(\overrightarrow{\tilde{O}X}, \overrightarrow{O\tilde{O}}) = \\ &= (Q(O) + 2\ell(\overrightarrow{O\tilde{O}}) + q(\overrightarrow{O\tilde{O}})) + 2\ell(\overrightarrow{\tilde{O}X}) + 2b(\overrightarrow{\tilde{O}X}, \overrightarrow{O\tilde{O}}) + q(\overrightarrow{\tilde{O}X}) = \\ &= Q(\tilde{O}) + 2(\ell(\overrightarrow{\tilde{O}X}) + b(\overrightarrow{\tilde{O}X}, \overrightarrow{O\tilde{O}})) + q(\overrightarrow{\tilde{O}X}), \end{aligned}$$

где b — полярная к q билинейная функция, $\implies q$ не зависит от O .

Если $(O, \mathbf{E})$ — репер, $B = (b_{ij})$ — матрица квадратичной функции q (билинейной функции b) в базисе $\mathbf{E}$ и $l_1, \dots, l_n$ — координаты линейной функции ℓ во взаимном с $\mathbf{E}$ базисе и $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки X в $(O, \mathbf{E})$, то

$$Q(X) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j + 2 \sum_i l_i x_i + a_0 = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 2(l_1, \dots, l_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0,$$

где $a_0 = Q(O)$.

Матрица аффинно-квадратичной функции Q :

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} & & & l_1 \\ & B & & \vdots \\ & & & l_n \\ l_1 & \dots & l_n & a_0 \end{pmatrix},$$

для неё

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (x_1, \dots, x_n, 1) \widehat{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для другого репера $(O', \mathbf{E}')$ с матрицей перехода $\widehat{C}$:

$$\widehat{B}' = \widehat{C}^T \widehat{B} \widehat{C}, \quad \begin{pmatrix} l'_1 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix} = C^T \left(B \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \right), \quad a'_0 = Q(O')$$

(здесь $\tilde{o}_1, \dots, \tilde{o}_n$ — координаты точки O' относительно репера $(O, \mathbf{E})$).

Если меняется только начало координат, а базис не меняется, то $B' = B$ и $\begin{pmatrix} l'_1 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$. Значит, если для точки $\tilde{O} = \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix}$ имеем $B \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$, то в записи аффинно-квадратичной функции Q относительно репера $(\tilde{O}, \mathbf{E})$ нет линейных членов. Другими словами, для любого $\mathbf{x} \in V$ имеем $Q(\tilde{O} + \mathbf{x}) = Q(\tilde{O}) + q(\mathbf{x})$, т.е. $Q(\tilde{O} + \mathbf{x}) = Q(\tilde{O} - \mathbf{x})$.

Определение

Точка $\tilde{O}$ называется **центром** аффинно-квадратичной функции Q , если для любого вектора $\mathbf{x} \in V$

$$Q(\tilde{O} + \mathbf{x}) = Q(\tilde{O} - \mathbf{x}).$$

Множество центров = множество решений уравнения $B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$.

Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду

Теорема

Для любой аффинно-квадратичной функции $Q: \mathbb{A} \rightarrow K$, не являющейся аффинно-линейной, существует репер $(O, \mathbf{E})$, в котором Q имеет вид

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + a_0, \quad r \leq n, \quad (*)$$

или

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2x_{r+1}, \quad r < n, \quad (**)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$.

Замечание

Функция, которая имеет вид $(*)$ относительно некоторого репера, не приводится к виду $(**)$, и наоборот, так как в первом случае разность $\text{rank } \widehat{B} - \text{rank } B$ равна 1 или 0, а во втором — 2, и ранги не меняются при замене координат.

Доказательство. Теорема Лагранжа $\implies$ существует базис $\mathbf{E}$, в котором $q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$, причем $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ненулевые. Возьмём любую точку O' . Запишем Q относительно репера $(O', \mathbf{E})$:

$$Q(O' + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_r x_r'^2 + 2l_1' x_1' + \dots + 2l_n' x_n' + a_0'.$$

Перенесём начало координат в точку O'' с координатами $-\frac{l_1'}{\lambda_1}, \dots, -\frac{l_r'}{\lambda_r}, 0, \dots, 0$, т.е. сделаем замену координат $x_i'' = x_i' + \frac{l_i'}{\lambda_i}$ для $i \leq r$, $x_i'' = x_i'$ для $i > r$:

$$Q(O'' + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1''^2 + \dots + \lambda_r x_r''^2 + 2l_{r+1}' x_{r+1}'' + \dots + 2l_n' x_n'' + a_0''.$$

Если $l_{r+1}' = \dots = l_n' = 0$, то Q имеет вид $(*)$ (и O'' — центр функции Q).

Пусть $l_i' \neq 0$ для некоторого $i > r$. Пусть для определённости $l_{r+1}' \neq 0$. Тогда

замена
$$x_{r+1} = l_{r+1}' x_{r+1}'' + \dots + l_n' x_n'' + \frac{a_0''}{2}, \quad x_i = x_i'' \text{ для } i \neq r+1$$

приводит Q к виду $(**)$ (и Q не имеет центра). □

Замечание

В случае $K = \mathbb{C}$ ($K = \mathbb{R}$) функция Q приводится к виду $(*)$ или $(**)$, в котором $\lambda_i = 1$ ($\lambda_i = \pm 1$) для $i \leq r$, причём этот вид определён однозначно (для поля $\mathbb{R}$ число $+1$ и -1 не зависит от системы координат в силу закона инерции).

Аффинно-квадратичные функции в аффинно-евклидовых пространствах

Ниже $\mathbb{A}$ — n -мерное аффинное пространство, ассоциированное с евклидовым векторным пространством V .

Теорема

Для любой аффинно-квадратичной функции $Q: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, не являющейся аффинно-линейной, существует прямоугольная система координат $(O, \mathbf{E})$, в которой Q имеет вид

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + a_0, \quad r \leq n, \quad (*)$$

или

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2\lambda_{r+1} x_{r+1}, \quad r < n, \quad (**)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\lambda_{r+1} > 0$. Этот вид определён однозначно с точностью до нумерации переменных.

Доказательство. Начало доказательства прежнее, только надо ссылаться не на теорему Лагранжа, а на теорему о приведении квадратичной функции к главным осям. Если Q имеет центр, то и конец доказательства прежний.

Предположим, что центра нет и функция уже приведена к виду

$$Q(O'' + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1''^2 + \dots + \lambda_r x_r''^2 + 2l'_{r+1} x_{r+1}'' + \dots + 2l'_n x_n'' + a_0'',$$

где не все $l'_j, j > r$, равны 0, относительно ортонормированного репера $(O'', \mathbf{E}')$.

Положим

$$\mathbf{e}_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{l_{r+1}'^2 + \dots + l_n'^2}} (l'_{r+1} \mathbf{e}'_{r+1} + \dots + l'_n \mathbf{e}'_n) \in \langle \mathbf{e}'_{r+1}, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle.$$

Это единичный вектор, ортогональный всем $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_r$. Дополним его до базиса в $\langle \mathbf{e}'_{r+1}, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ векторами $\mathbf{e}_{r+2}, \dots, \mathbf{e}_n$. Положим $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_r, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Относительно репера $(O'', \mathbf{E})$ функция Q имеет вид

$$Q(O'' + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1'''^2 + \dots + \lambda_r x_r'''^2 + 2 \frac{1}{\sqrt{l_{r+1}'^2 + \dots + l_n'^2}} x_{r+1}''' + a_0'''.$$

Осталось сдвинуть начало координат вдоль вектора $\mathbf{e}_{r+1}$, чтобы обнулить a_0''' .

Единственность:

Тип (*) или (**) определён однозначно (из рассмотрения рангов).

Числа r и $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ определены однозначно по теореме о приведении квадратичной функции в евклидовом пространстве к главным осям.

a_0 равно значению Q в центре и не зависит от выбора центра: если O_1 и O_2 — центры, то $Q(O_2) = Q(O_1) + q(\overrightarrow{O_1 O_2}) = Q(O_2) + q(\overrightarrow{O_2 O_1}) + q(\overrightarrow{O_1 O_2})$ и $q(\overrightarrow{O_1 O_2}) = 0$.

Осталось доказать единственность λ_{r+1} . Предположим, что относительно ортонормированных реперов $(O, \mathbf{E})$ и $(O', \mathbf{E}')$ Q записывается как

$$Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + 2\lambda_{r+1} x_{r+1} \quad \text{и} \quad Q(X) = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_r x_r'^2 + 2\tilde{\lambda}_{r+1} x_{r+1}',$$

и пусть B — (диагональная) матрица q относительно этих реперов.

Рассмотрим оператор $\mathcal{B}: V \rightarrow V$ с матрицей B . Его матрица совпадает с матрицей q во всех ортонормированных базисах, так как при ортогональной замене координат матрицы операторов и квадратичных функций меняются одинаково ($C^T = C^{-1}$). Значит, оператор $\mathcal{B}$ имеет одну и ту же матрицу в базисах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$, причём эта матрица диагональна и диагональные элементы с номерами $> r$ нулевые. Из вида матрицы $\mathcal{B}$ в базисе $\mathbf{E}$ следует, что $\text{Im } \mathcal{B} = \mathcal{B}(\langle \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\} \rangle) = \langle \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\} \rangle$. Из (того же самого) вида матрицы $\mathcal{B}$ в базисе $\mathbf{E}'$ следует, что $\text{Im } \mathcal{B} = \mathcal{B}(\langle \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_r\} \rangle) = \langle \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_r\} \rangle$.

Таким образом, $\langle \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\} \rangle = \langle \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_r\} \rangle$. Базисы ортонормированные $\implies \langle \{\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n\} \rangle = \langle \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\} \rangle^\perp = \langle \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_r\} \rangle^\perp = \langle \{\mathbf{e}'_{r+1}, \dots, \mathbf{e}'_n\} \rangle$. Значит, матрица C перехода от $\mathbf{E}$ к $\mathbf{E}'$ блочно-диагональная (по определению этой матрицы) и состоит из блока C_1 размера $r \times r$ и блока C_2 размера $(n-r) \times (n-r)$, каждый из которых, очевидно, является ортогональной матрицей (поскольку сама матрица C ортогональна). По формуле преобразования выражения для аффинно-квадратичной функции (точнее, его линейной части) при переходе к новой системе координат имеем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\lambda}_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C^T \left(B \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \vdots \\ \tilde{o}_r \\ \tilde{o}_{r+1} \\ \tilde{o}_{r+2} \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \vdots \\ \tilde{o}_r \\ \tilde{o}_{r+1} \\ \tilde{o}_{r+2} \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \tilde{o}_1 \\ \vdots \\ \lambda_2 \cdot \tilde{o}_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $\tilde{o}_1, \dots, \tilde{o}_n$ — координаты точки O' относительно репера $(O, \mathbf{E})$. Матрица C_2

ортогональна, $\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_2^T \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_{r+1} = \tilde{\lambda}_{r+1}$. □

Квадрики

Здесь опять $\mathbb{A}$ — n -мерное аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством V над полем K характеристики $\neq 2$.

Определение

Множество вида $\Gamma(Q) = \{X \in \mathbb{A} : Q(X) = 0\}$, где $Q: \mathbb{A} \rightarrow K$ — аффинно-квадратичная функция, называется **квадрикой**, или **гиперповерхностью второго порядка** (если только оно не пусто и не является плоскостью). При $n = 2$ квадрики называются **кониками**, или **кривыми второго порядка**. При $n = 3$ квадрики называются также **поверхностями второго порядка**.

Предложение

Любая прямая либо целиком лежит на квадрике, либо пересекается с ней в не более чем двух точках.

Доказательство. Рассмотрим любую прямую $\ell = A + \langle \mathbf{v} \rangle = \{A + t\mathbf{v} : t \in K\}$, проходящую через точку A квадрики. Точки пересечения прямой с квадрикой соответствуют значениям t , удовлетворяющим квадратному уравнению. □

Определение

Точка O называется **центром** квадрики, если эта квадратика симметрична относительно O , т.е. вместе со всякой точкой $O + \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in V$) содержит точку $O - \mathbf{x}$. Центр квадрики, лежащий на ней самой, называется её **вершиной**.

Предложение

Если O — вершина квадрики $\Gamma(Q)$ и $A \in \Gamma(Q)$, $A \neq O$, то вся прямая, проходящая через точки O и A , содержится в квадрике $\Gamma(Q)$.

Доказательство. Из предыдущего предложения. □

Предложение

Любая квадратика содержит точку, не являющуюся ее вершиной.

Доказательство. По теореме о геометрической характеристике плоскостей: если все вершины принадлежат квадрике, то это плоскость. □

Теорема

Если K — бесконечное поле характеристики $\neq 2$ и Q_1 и Q_2 — две аффинно-квадратичные функции $\mathbb{A} \rightarrow K$, для которых $\Gamma(Q_1)$ и $\Gamma(Q_2)$ — квадратики и $\Gamma(Q_1) = \Gamma(Q_2)$, то эти функции пропорциональны.

Доказательство. Положим $\Gamma = \Gamma(Q_1) = \Gamma(Q_2)$. Пусть $O \in \Gamma$ — не вершина. Тогда $Q_1(O) = Q_2(O) = 0$ и $\ell_1, \ell_2 \neq 0$ в разложениях

$$Q_1(O + \mathbf{x}) = q_1(\mathbf{x}) + 2\ell_1(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad Q_2(O + \mathbf{x}) = q_2(\mathbf{x}) + 2\ell_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V.$$

Рассмотрим произвольную прямую $\pi = O + \langle \mathbf{v} \rangle$. Точка $O + t\mathbf{v}$ этой прямой принадлежит $\Gamma \iff t$ — решение уравнений $t^2 q_i(\mathbf{v}) + 2t\ell_i(\mathbf{v}) = 0$, $i = 1, 2$. Следовательно, эти уравнения должны иметь одинаковые решения (относительно t). Поэтому для всех векторов $\mathbf{v}$ таких, что $\ell_1(\mathbf{v}), \ell_2(\mathbf{v}) \neq 0$, имеем $q_1(\mathbf{v}) \cdot \ell_2(\mathbf{v}) = q_2(\mathbf{v}) \cdot \ell_1(\mathbf{v})$. Умножим на $\ell_1(\mathbf{v}) \cdot \ell_2(\mathbf{v})$:

$$q_1(\mathbf{v}) \cdot \ell_2(\mathbf{v}) \cdot \ell_1(\mathbf{v}) \cdot \ell_2(\mathbf{v}) = q_2(\mathbf{v}) \cdot \ell_1(\mathbf{v}) \cdot \ell_1(\mathbf{v}) \cdot \ell_2(\mathbf{v})$$

для всех $\mathbf{v} \in V$. Поле K бесконечно $\implies q_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 = q_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \implies q_1 \cdot \ell_2 = q_2 \cdot \ell_1$ (в кольце многочленов нет делителей нуля).

Предположим, что линейные функции ℓ_1 и ℓ_2 не пропорциональны, а значит, линейно независимы. Дополним их до базиса $\mathcal{E}^*$ пространства V^* и рассмотрим взаимный базис $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V . В этом базисе $\ell_1(\mathbf{x}) = x_1$ и $\ell_2(\mathbf{x}) = x_2$, где $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, а равенство $q_1 \cdot \ell_2 = q_2 \cdot \ell_1$ записывается в виде

$$\sum_{i,j} b_{ij}^{(1)} x_i x_j x_2 = \sum_{i,j} b_{ij}^{(2)} x_i x_j x_1.$$

Видим, что q_1 делится на x_1 , а q_2 делится на x_2 , причём частные от деления равны, т.е.

$$q_1(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x}) \cdot x_1 \quad \text{и} \quad q_2(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x}) \cdot x_2,$$

где $\ell(\mathbf{x})$ — некоторая линейная функция. Следовательно,

$$Q_1(O + \mathbf{v}) = (\ell(\mathbf{v}) + 2) \cdot x_1 \quad \text{и} \quad Q_2(O + \mathbf{v}) = (\ell(\mathbf{v}) + 2) \cdot x_2.$$

$\Gamma = \Gamma(Q_1) \implies$ плоскость $\pi : x_1 = 0$ содержится в $\Gamma \implies Q_2 \equiv 0$ на $\pi \implies \ell(\mathbf{x}) + 2 = 0$ для любого $\mathbf{x} \in V$ с $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$. Противоречие (достаточно рассмотреть $\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_2$).



Следствие

В аффинном пространстве над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$ центр любой квадрики $\Gamma(Q)$ является также и центром аффинно-квадратичной функции Q .

Доказательство. Если O — центр квадрики $\Gamma(Q)$, то $\Gamma(Q) = \Gamma(\tilde{Q})$, где $Q(O + \mathbf{x}) = \tilde{Q}(O - \mathbf{x})$. Следовательно, $\tilde{Q} = \lambda Q$ для некоторого $\lambda \in K$. Сравнивая члены второй степени в выражениях для Q и $\tilde{Q}$, видим, что $\lambda = 1$, т.е. $Q = \tilde{Q}$, а значит, $Q(O + \mathbf{x}) = Q(O - \mathbf{x})$. □

Классификация квадрик

Аффинная классификация квадрик

Теорема

В n -мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$ уравнение любой квадрики выбором системы координат приводится к одному из видов

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 &= 0, & r \leq n, \\ \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 &= 1, & r \leq n, \\ \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 &= 2x_{r+1}, & r < n,\end{aligned}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$.

В случае $K = \mathbb{C}$ ($K = \mathbb{R}$) уравнение квадрики можно привести к виду, в котором $\lambda_i = 1$ для всех $i \leq r$ ($\lambda_i = \pm 1$ для всех $i \leq r$), причём этот вид определён однозначно.

Определение

Две квадрики Γ_1 и Γ_2 называются **аффинно эквивалентными**, если найдется невырожденный аффинный оператор (т.е. аффинное преобразование) $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ такой, что $\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

Теорема

В аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$ две аффинно-квадратичные функции $Q_1: \mathbb{A} \rightarrow K$ и $Q_2: \mathbb{A} \rightarrow K$ задают аффинно эквивалентные квадрики тогда и только тогда, когда выражения для этих функций относительно некоторых реперов $(O, \mathbf{E})$ и $(O', \mathbf{E}')$ совпадают с точностью до ненулевого скалярного множителя.

Доказательство. Пусть $\widehat{C}$ — матрица перехода от $(O, \mathbf{E})$ к $(O', \mathbf{E}')$, и пусть $\widehat{B}_1$ — матрица Q_1 в $(O, \mathbf{E})$ и $\widehat{B}_2$ — матрица Q_2 в $(O', \mathbf{E}')$, причём $\widehat{B}_1 = \alpha \widehat{B}_2$. Тогда матрица Q_1 относительно $(O', \mathbf{E}')$ равна $\widehat{C}^T \widehat{B}_1 \widehat{C}$. Рассмотрим преобразование $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ с матрицей C относительно $(O, \mathbf{E})$. Для точки X с координатами $x_1, \dots, x_n$ относительно $(O', \mathbf{E}')$ точка $\Phi(X)$ имеет координаты $C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$, так что

$$X \in \Gamma_1 \iff Q_1(X) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n, 1) \widehat{C}^T \widehat{B}_1 \widehat{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{1}{\alpha} Q_2(\Phi(X)) = 0.$$

Обратно, пусть Φ — аффинное преобразование с матрицей $\widehat{C}$ относительно репера $(O, \mathbf{E})$, $\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$ и $\widehat{B}_1$ и $\widehat{B}_2$ — матрицы Q_1 и Q_2 относительно $(O, \mathbf{E})$. Пусть X — точка с координатами $x_1, \dots, x_n$ относительно $(O, \mathbf{E})$ и $y_1, \dots, y_n$ — координаты точки $\Phi(X) = Y$. Тогда

$$X \in \Gamma_1 \iff (x_1, \dots, x_n, 1) \widehat{B}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

и

$$\Phi(X) = Y \in \Gamma_2 \iff (y_1, \dots, y_n, 1) \widehat{B}_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff (x_1, \dots, x_n, 1) C^T \widehat{B}_1 C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из равносильности условий $X \in \Gamma_1$ и $\Phi(X) \in \Gamma_2$ следует, что $\widehat{B}_1 = \alpha \widehat{C}^T \widehat{B}_2 \widehat{C}$.



Следствие

В n -мерном вещественном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ любая квадрика аффинно эквивалентна ровно одной из квадрик

$$\begin{aligned} x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 &= 1, & k \geq 0, l > 0, k+l \leq n, \\ x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 &= 0, & 0 \leq l \leq k, k+l \leq n, \\ x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 &= 2x_{k+l+1}, & 0 \leq l \leq k, k+l \leq n. \end{aligned}$$

Метрическая классификация квадрик

Теорема

В n -мерном аффинно-евклидовом пространстве уравнение любой квадрики выбором прямоугольной системы координат приводится к одному из видов

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 &= 1, & r &\leq n, \\ \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 &= 0, & r &\leq n, \\ \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 &= 2x_{r+1}, & r &< n,\end{aligned}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$.

Для первого вида числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ определены однозначно с точностью до перестановки. Для второго вида числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ определены однозначно с точностью до перестановки и одновременного умножения на ненулевое число. Для третьего вида числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ определены однозначно с точностью до перестановки и одновременного умножения на -1 .

Определение

Две квадрики Γ_1 и Γ_2 в аффинно-евклидовом пространстве называются **метрически эквивалентными**, если найдется ортогональный аффинный оператор (т.е. изометрическое преобразование) $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ такой, что $\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

Теорема

Если в аффинно-евклидовом пространстве $\mathbb{A}$ две аффинно-квадратичные функции $Q_1: \mathbb{A} \rightarrow K$ и $Q_2: \mathbb{A} \rightarrow K$ задают квадрики, то эти квадрики метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда выражения для функций Q_1 и Q_2 относительно некоторых ортонормированных реперов $(O, \mathbf{E})$ и $(O', \mathbf{E}')$ совпадают с точностью до ненулевого скалярного множителя.