Линейная алгебра и геометрия

Лекция 11. Евклидовы и унитарные пространства.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Ортогональное проектирование

Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ — ортонормированный базис подпространства $U \subset V$ и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — ортонормированный базис V. Тогда $U^\perp = \langle\{\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}\rangle$.

Предложение

Для каждого $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V \quad V = U \oplus U^\perp$.

Таким образом, любой вектор $\boldsymbol{x} \in V$ единственным образом раскладывается в сумму $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{u} \in U$ и $\boldsymbol{w} \in U^\perp$. Вектор $\boldsymbol{u}$ называется ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{x}$ на U (обозначение: $\mathrm{pr}_U\, \boldsymbol{x}$), а вектор $\boldsymbol{w}$ — ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{x}$ относительно U (обозначение: $\mathrm{ort}_U\, \boldsymbol{x}$). Отображение проектирования пространства V на U параллельно $U^\perp$ называется ортогональным проектированием на U и обозначается pr_U.

В указанном вверху ортонормированном базисе для любого $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ имеем

$$\mathrm{pr}_U\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k \quad \text{и} \quad \mathrm{ort}_U\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_{k+1})\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Таким образом, процесс ортонормализации сводится к замене каждого базисного вектора его ортогональной составляющей относительно линейной оболочки уже построенных векторов и нормированию.

Свойства ортогонального дополнения

Пусть U и W — подпространства евклидова пространства V.

- $(U^\perp)^\perp = U$ (из предложения);
- $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ (доказывается прямой проверкой);
- $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ (из первых двух свойств).

Расстояние в евклидовом пространстве

Определение

Расстояние $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в евклидовом пространстве V определяется формулой

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

Функция $\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$ — метрика (она рефлексивна, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника).

Определение

Расстояние $\rho(\boldsymbol{x}, U)$ между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством U в евклидовом пространстве V определяется формулой

$$\rho(\boldsymbol{x}, U) = \inf_{\boldsymbol{u} \in U} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Углом между ненулевым вектором $\boldsymbol{x}$ и ненулевым подпространством U называется наименьший из углов между $\boldsymbol{x}$ и ненулевыми векторами из U.

Теорема

1. *Расстояние от вектора* $\boldsymbol{x}$ *евклидова пространства* V *до подпространства* U *равно* $|\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|$, *причём единственным ближайшим к* $\boldsymbol{x}$ *вектором подпространства* U *является* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$.
2. *Угол между ненулевым вектором* $\boldsymbol{x}$ *и ненулевым подпространством* U *равен углу между* $\boldsymbol{x}$ *и* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$ (*если* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) *или* $\frac{\pi}{2}$ (*если* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$).

Доказательство. 1. По теореме Пифагора

$$|(\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}) + \operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|^2 = |\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}|^2 + |\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|^2 \geqslant |\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|^2 = \rho^2(\boldsymbol{x}, \operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}),$$

так что наименьшее значение $\rho(\boldsymbol{x}, U)$ достигается при $\boldsymbol{u} = \operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$ и равно $|\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|$.

2. Пусть $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Надо доказать, что

$$\cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{u}|} \leqslant \frac{(\boldsymbol{x}, \operatorname{pr}_U \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}|} = \cos(\boldsymbol{x}, \operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}),$$

т.е. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}| \leqslant (\boldsymbol{x}, \operatorname{pr}_U \boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}| \Leftrightarrow (\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} + \operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}| \leqslant (\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} + \operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}, \operatorname{pr}_U \boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}|$ $\Leftrightarrow (\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}| \leqslant (\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}, \operatorname{pr}_U \boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}| \Leftrightarrow (\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqslant |\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{u}|$. Это неравенство Коши–Буняковского. $\square$

Теорема

Пусть U — ненулевое подпространство евклидова пространства V и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ — любой базис в U. Тогда для произвольного вектора $\boldsymbol{x} \in V$

$$\rho(\boldsymbol{x}, U)^2 = \frac{\det G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{x})}{\det G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)}.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} \notin U$. Тогда $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{x}\}$ — базис подпространства $U \oplus \langle \boldsymbol{x} \rangle$. Матрица $G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{x})$ — матрица симметричной билинейной функции в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{x}\}$, и все её угловые миноры отличны от нуля. Применяя ортогонализацию Якоби, получаем ортогональный базис $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{k+1}\}$, причём $\tilde{\boldsymbol{e}}_{k+1} = \mathrm{ort}_U \boldsymbol{x}$ и $|\tilde{\boldsymbol{e}}_{k+1}|^2 = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$. □

Определение

Для векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в n-мерном евклидовом пространстве множество

$$P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{a}_i : 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \right\}$$

называется k-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Основанием этого k-мерного параллелепипеда называется $(k-1)$-мерный параллелепипед $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1})$, а высотой — длина вектора $\operatorname{ort}_{\langle\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}\}\rangle} \boldsymbol{a}_k$. Объём $\operatorname{vol} P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ k-мерного параллелепипеда определяется рекурсивно: для $k = 1$ это длина вектора $\boldsymbol{a}_1$, для $k > 1$ — произведение объёма основания на высоту.

Теорема

$\operatorname{vol} P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)^2 = \det G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$.

Доказательство. Индукция по k + предыдущая теорема. $\square$

Геометрический смысл определителя

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — произвольные векторы n-мерного евклидова пространства и A — квадратная матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в каком-нибудь ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Тогда

$$\operatorname{vol} P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = |\det A|.$$

Действительно, для линейно независимых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ имеем

$$G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = A^T E A = A^T A,$$

откуда

$$\det G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (\det A)^2.$$

Знак $\det A$ можно принять за определение ориентации линейно независимой системы $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ по отношению к базису $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Ортогональные матрицы

Пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ — два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве и $T = (t_{ij})$ — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$, т.е. $\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j \leqslant n} t_{i,j} \boldsymbol{e}_j$. Вычисляя скалярное произведение $\boldsymbol{e}'_i$ и $\boldsymbol{e}'_j$ в базисах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$, получаем

$$(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj} \qquad \text{и} \qquad (\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = \delta_{ij}.$$

Значит,

- столбцы T образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^n$ n-ок вещественных чисел относительно стандартного скалярного произведения (сумма произведений соответственных компонент) и
- $T^T T = E$, так что $T^{-1} = T^T$ и строки тоже образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Определение

Матрица A, удовлетворяющая условию $A^T A = E$, называется ортогональной.

Свойства ортогональных матриц

- Матрица ортогональна $\iff$ это матрица перехода между ортонормированными базисами.
- Если даны два базиса в евклидовом пространстве, один из них ортонормирован и матрица перехода ортогональна, то и другой базис ортонормирован.
- A ортогональна $\implies$ A^{-1} ортогональна.
- A и B ортогональны $\implies$ AB ортогональна.
- Множество O_n всех ортогональных матриц порядка n образует подгруппу в полной линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ всех невырожденных квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{R}$. Это ортогональная группа O_n.

Теорема (о QR-разложении)

Всякая невырожденная матрица A может быть представлена в виде произведения QR, где Q — ортогональная, а R — верхнетреугольная матрица, причем диагональные элементы матрицы R положительны.

Доказательство. Рассмотрим столбцы матрицы A как столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. Так как матрица A невырождена, векторы $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ составляют базис $\boldsymbol{A}$. При этом A является матрицей перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{A}$. Пусть $\tilde{\boldsymbol{A}}$ — ортонормированный базис, полученный из базиса $\boldsymbol{A}$ с помощью процесса ортонормализации Грама–Шмидта. Матрица перехода от $\boldsymbol{A}$ к $\tilde{\boldsymbol{A}}$, а значит, и матрица R перехода от $\tilde{\boldsymbol{A}}$ к $\boldsymbol{A}$ — верхнетреугольная матрица с положительными элементами на диагонали. Поскольку базисы $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и $\boldsymbol{E}$ ортонормированы, матрица Q перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ортогональна. □

Ортогональные операторы

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в евклидовом пространстве V называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad \text{для любых } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

Замечание

$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \iff \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{E} \iff \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$.

Действительно, тогда $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ $\iff (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}) = 0$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в евклидовом пространстве V является ортогональным $\iff$ его матрица в некотором ортонормированном базисе ортогональна $\iff$ его матрица в произвольном ортонормированном базисе ортогональна.

Следствие

Линейный оператор в евклидовом пространстве ортогонален $\iff$ *он переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис* $\iff$ *он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Теорема

Линейный оператор ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов. В частности, ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.

Доказательство. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\big).$ □

Следствие

Собственные значения ортогонального линейного оператора равны ± 1.

Изоморфизм евклидовых пространств

Определение

Евклидовы пространства V и U называются изоморфными, если существует отображение $\Phi\colon V \to U$, которое является изоморфизмом векторных пространств и удовлетворяет условию

$$(\Phi(\boldsymbol{x}), \Phi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Само отображение Φ называется при этом изоморфизмом евклидовых пространств V и U.

Замечание

Линейный оператор между евклидовыми пространствами — изоморфизм $\Longleftrightarrow$ его матрица ортогональна.

Теорема

Любые два евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны.

Доказательство. Возьмём ортонормированные базисы $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ и $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ в n-мерных евклидовых пространствах U и V, положим $\Phi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{u}_i$ и продолжим по линейности. $\square$

Линейные операторы и билинейные формы в евклидовых пространствах

Как и выше, через V везде обозначаем n-мерное евклидово пространство. Каждому линейному оператору $\mathcal{A}\colon V \to V$ соответствует билинейная функция $b_{\mathcal{A}}\colon V \times V \to \mathbb{R}$, определённая правилом $b_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y})$. Обозначим соответствие $\mathcal{A} \mapsto b_{\mathcal{A}}$ через β.

Теорема

1. *Матрица любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ в любом ортонормированном базисе совпадает с матрицей билинейной функции $\beta(\mathcal{A})$ в том же базисе.*
2. *Отображение $\beta\colon \mathscr{L}(V) \to \mathscr{B}(V)$ — изоморфизм.*

Доказательство. ❶ Матрица A оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе характеризуется тем, что если вектор $\boldsymbol{y} \in V$ имеет в этом базисе координаты $y_1, \ldots, y_n$, а его образ $\mathcal{A}\boldsymbol{y}$ — координаты $x_1, \ldots, x_n$, то $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Матрица $B_{\mathcal{A}}$ билинейной функции $\beta(\mathcal{A})$ характеризуется тем, что $b_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. В

Сопряжённые операторы

Изоморфизм $\mathscr{C}: V \to V^*$ (корреляция) не зависит от базиса и позволяет отождествлять операторы $\mathcal{A}: V^* \to V^*$ с операторами $\mathscr{C}^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathscr{C}: V \to V$.

Определение

Оператор $\mathcal{A}^*: V \to V$ в евклидовом пространстве V называется сопряжённым к линейному оператору $\mathcal{A}: V \to V$, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*\boldsymbol{y}).$$

Такое определение (и обозначение) законно, так как сопряжённый оператор в новом («евклидовом») смысле — это $\mathscr{C}^{-1} \circ \mathcal{A}_{\text{сопр}} \circ \mathscr{C}$, где $\mathcal{A}_{\text{сопр}}$ — сопряжённый оператор в общем смысле.

Действительно, для $\boldsymbol{y} \in V$ $\mathscr{C}(\boldsymbol{y})$ — функционал $f_{\boldsymbol{y}}$, который каждому $\boldsymbol{x} \in V$ ставит в соответствие $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\mathcal{A}_{\text{сопр}}(f_{\boldsymbol{y}}) = f_{\boldsymbol{y}} \circ \mathcal{A}$ — функционал f, который каждому $\boldsymbol{x} \in V$ ставит в соответствие $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, и $\mathscr{C}^{-1}(f)$ — вектор $\tilde{\boldsymbol{y}}$ с тем свойством, что $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = f(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$.

Теорема

Для каждого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ сопряжённый оператор $\mathcal{A}^*$ существует и единствен, причём в любом ортонормированном базисе его матрица равна транспонированной матрице самого́ оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. Существование уже доказали. Утверждение о матрицах, а вместе с ним и единственность, вытекает из того, что в ортонормированном базисе для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с матрицами A и B и векторов $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ имеем

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)\, A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y}) = (x_1, \dots, x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

Свойства операции сопряжения

- $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$,
- $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,
- $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,
- $(\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*$,
- $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$.