МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ФОРСИНГ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В ТОПОЛОГИИ


СИПАЧЁВА
ОЛЬГА ВИКТОРОВНА

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
**ГРОЗНОВУ АНАСТАСИЮ ЮРЬЕВНУ**

# Содержание

# Лекция 1. Аксиомы ZFC

Рубеж XIX–XX веков: кризис оснований математики.

*Программа Гильберта*

- *Формализация всей математики*: все математические утверждения должны быть написаны на точном формальном языке и управляться четко определёнными правилами.
- *Полнота*: доказательство того, что все истинные математические утверждения могут быть формально доказаны.
- *Непротиворечивость*: доказательство того, что в формализме математики не может быть получено никакого противоречия. Желательно, чтобы оно использовало только «конечные» рассуждения о конечных математических объектах.
- *Экономность*: любой результат о «реальных объектах», полученный с использованием рассуждений об «идеальных объектах» (таких как несчётные множества), может быть доказан без использования идеальных объектов.
- *Алгоритмическая разрешимость*: для любого математического утверждения существует алгоритм, определяющий его истинность или ложность.

*Формальная система* (*формальная теория*, *дедуктивная система*) — это совокупность абстрактных объектов вместе с чисто синтаксическими правилами оперирования символами.

Формальная система считается определённой, если

- задано конечное или счётное число произвольных символов (*язык*);
- выделены конечные последовательности символов (выражения), которые считаются *формулами*;
- выделены формулы, которые называются *аксиомами*;
- задано конечное число отношений между формулами, называемых *правилами вывода.*

Мы возьмём за основу *аксиоматическую формальную систему* (гильбертовского типа), где основное ударение делается на аксиомы, а правила вывода сведены к минимуму; бывают ещё, например, *системы естественного вывода* (генценовского типа), где аксиом нет вообще, но много правил вывода.

## Логика первого порядка

### Логика высказываний

Язык логики высказываний:

- символы $P$, $Q$, $R$, … для «первичных высказываний» (*атомов*) произвольной природы, которые играют роль переменных;
- *пропозициональные связки* — символы

  $\wedge$ — *конъюнкция* (логическое «и»),

  $\vee$ — *дизъюнкция* (логическое «или»),

$\neg$ — *отрицание* (логическое «не»),

$\to$ — *импликация* («влечёт за собой»);

- служебные символы — скобки ( и ).

*Пропозициональные формулы* определяются рекурсивно:

1) все атомы — формулы;
2) если $A$ и $B$ — формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$ и $A \to B$ — формулы.

*Соглашение о скобках:* $(A) \rightsquigarrow A$, $(A \wedge B) \wedge C \rightsquigarrow A \wedge B \wedge C$, $(A \vee B) \vee C \rightsquigarrow A \vee B \vee C$. Скобки также опускаются, если их можно однозначно восстановить по приоритетам: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$.

*Длина* формулы — число символов (считая повторения и опущенные скобки).

## Тавтологии

Введём два «внешних» символа И («истина») и Л («ложь»). *Истинностная оценка* на множестве $\mathscr{P}$ первичных высказываний — это любая функция $\nu\colon \mathscr{P} \to \{\text{И}, \text{Л}\}$. Для каждой истинностной оценки определяется её продолжение $\bar{\nu}$ на все пропозициональные формулы индукцией по длине формулы с помощью общеизвестных таблиц истинности.

Пропозициональная формула $A$ называется *тавтологией*, если $\bar{\nu}(A) = \text{И}$ для любой истинностной оценки $\nu\colon \mathscr{P} \to \{\text{И}, \text{Л}\}$.

Тавтологии играют роль аксиом в логике высказываний. Достаточный набор тавтологий:

$$\begin{array}{lll}
A \wedge B \to A, & A \vee \neg A, & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), \\
A \wedge B \to B, & A \to (B \to A), & (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)), \\
A \to (A \vee B), & \neg A \to (A \to B), & (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A). \\
B \to (A \vee B) & A \to (B \to (A \wedge B)), &
\end{array}$$

Единственное правило вывода в логике высказываний — *modus ponens*, или *правило отделения*, — переход от любых двух формул вида $A$ и $A \to B$ к одной формуле $B$. Запись: $\frac{A,\ A \to B}{B}$.

## Язык логики первого порядка

- символы $x$, $y$, $z$, $u$, $v$ ... для переменных;
- пропозициональные связки;
- служебные символы — скобки ( и ) и запятая;
- символ равенства $=$;
- кванторы *существования* $\exists$ («существует») и *всеобщности* $\forall$ («для всех»);
- *сигнатура* — набор $\Sigma$ нелогических символов, который может включать *предикатные* символы и *функциональные* символы, каждому из которых сопоставлена «арность» — число аргументов. 0-арные функциональные символы называются также *константными* символами.

*Термы* сигнатуры $\Sigma$ определяются рекурсивно:

1) все символы переменных и константные символы — термы;

2) если $t_1, \ldots, t_n$ — термы и $f$ — $n$-арный функциональный символ из $\Sigma$, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

*Формулы первого порядка* определяются рекурсивно:

1) любое выражение вида $(t_1 = t_2)$ и вида $R(t_1, \ldots, t_2)$, где $t_i$ — термы и $R$ — $n$-арный предикатный символ — формулы (они называются *атомными формулами* или *атомами*);

2) если $\varphi$ и $\varphi$ — формулы, то $\varphi \wedge B$, $\varphi \vee B$, $\neg A$ и $\varphi \to B$ — формулы;

3) если $\varphi$ — формула и $x$ — символ переменной, то $(\exists x \varphi)$ и $(\forall x \phi)$ — формулы.

*Свободные переменные* формулы $\phi$ определяются так:

1) если $\varphi$ — атом, то свободные переменные формул $\varphi$ и $\neg\varphi$ — это все переменные, которые встречаются в $\varphi$;

2) свободные переменные формул $\varphi \wedge B$, $\varphi \vee B$ и $\varphi \to B$ — это $\{$свободные переменные $\varphi\} \cup \{$свободные переменные $\psi\}$;

3) свободные переменные формул $(\exists x \varphi)$ и $(\forall x \phi)$ — это все свободные переменные формулы $\varphi$, кроме $x$.

Когда пишут $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обычно имеют в виду, что все свободные переменные формулы содержатся среди $x_1, \ldots, x_n$.

*Высказывание* (или *предложение*) — это любая формула, не содержащая свободных переменных.

## Логические аксиомы первого порядка

- Все тавтологии.
- *Аксиомы равенства:*
  - $(x = x)$, $(x = y) \to (y = x)$, $(x = y) \wedge (y = x) \to (x = z)$;
  - для любого функционального символа $f$ $(x = y) \to (f(\ldots, x, \ldots) = f(\ldots, y, \ldots))$;
  - для любой формулы $\varphi$, в которой $x$ свободна, $(x = y) \to (\varphi(\ldots, x, \ldots) \to \varphi(\ldots, y, \ldots))$, если $y$ остаётся свободной.
- Все формулы вида $(\forall x \varphi(x)) \to \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \to \exists x \varphi(x)$

  ($\varphi(t/x)$ — формула, которая получается подстановкой $t$ вместо свободных вхождений переменной $x$, $t$ — любой терм, ни одна переменная которого не становится связанной в процессе подстановки).

*Правила вывода* в логике первого порядка:

- *Modus ponens* (правило отделения): $\frac{A,\ A\to B}{B}$.
- *Правила обобщения*: если переменная $x$ не входит в формулу $\varphi$ в качестве свободной переменной, то
$$\frac{\varphi\to\psi(x)}{\varphi\to\forall y\psi(y)} \quad \text{и} \quad \frac{\psi(x)\to\varphi}{\exists y\psi(y)\to\varphi}.$$

## Модели и выводимость

*Алгебраическая система* для произвольной сигнатуры $\Sigma$, или $\Sigma$-*система*, — это пара $(M, \sigma)$, где $M$ — непустое множество и $\sigma$ — отображение с областью определения $\Sigma$ такое, что

- если $R \in \Sigma$ — $n$-арный предикатный символ, то $\sigma(R)$ — $n$-местное отношение на $M$ (т.е. $\sigma(R) \subset M^n$);
- если $f \in \Sigma$ — $n$-арный функциональный символ, то $\sigma(f)$ — отображение $M^n \to M$ (т.е. $\sigma(f) \subset M^{n+1}$ и если $(x_1, \ldots, x_n, x), (x_1, \ldots, x_n, y) \in \sigma(f)$, то $x = y$);
- в частности, если $c \in \Sigma$ — константный символ, то $\sigma(c) \in M$.

$M$ — *несущее множество*, $\sigma$ — *семантическая* (интерпретирующая) *функция*. Обычно алгебраическую систему отождествляют с несущим множеством и вместо $(M, \sigma)$ пишут просто $M$ (наличие семантической функции подразумевается), а вместо $\sigma(R)$ или $\sigma(f)$ — $R^M$ или $f^M$.

Теперь, когда мы проинтерпретировали все предикатные и функциональные символы в системе $M$, выясним, чему в этой системе соответствуют термы — символы переменных и констант, выражения вида $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $f$ — $n$-арный функциональный символ и $x_1, \ldots, x_n$ — символы переменных или констант, выражения вида $g(y_1, \ldots, y_k)$, где $g$ — $k$-арный функциональный символ и $y_1, \ldots, y_k$ — символы переменных или констант или выражения, полученные на предыдущем шаге (возможно, $g = f$ и $n = k$), и т.д.

*Подстановка* в системе $M$ для сигнатуры $\Sigma$ — это отображение $s$ из множества переменных сигнатуры $\Sigma$ в $M$. Другими словами, подстановка — это просто приписывание каждому символу переменной конкретного значения из $M$.

Для каждого терма $t$ сигнатуры $\Sigma$ рекурсивно определяется его интерпретация — отображение $t^M$ всех подстановок в элементы $M$: для каждой подстановки $s$

- если $t$ — константный символ $c$, то $t^M(s) = c^M$;
- если $t$ — переменная $x$, то $t^M(s) = s(x)$;
- если $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, то $t^M(s) = f^M(t_1^M(s), \ldots, t_n^M(s))$.

Таким образом, отображение $t^M$ просто определяет, какие значения принимают функции $f^M$, когда их аргументы принимают значения, определённые каждой конкретной подстановкой.

Через $s(a/v)$ обозначим подстановку $s'$, которая приписывает значение $a$ переменной $v$, а в остальном совпадает с $s$.

Пусть $M$ — $\Sigma$-система и $\varphi$ — формула сигнатуры $\Sigma$. Определим по индукции естественное отношение $M \models \varphi[s]$ ($\varphi$ выполняется в $M$ при подстановке $s$):

- $M \models (t_1 = t_2)[s]$ означает, что $t_1^M(s)$ совпадает с $t_2^M(s)$;
- $M \models R(t_1, \ldots, t_n)[s]$ — что $(t_1^M(s), \ldots, t_n^M(s)) \in R^M$;
- $M \models \neg\varphi[s]$ — что $M \models \varphi[s]$ не выполняется;
- $M \models (\varphi \to \psi)[s]$ — что либо $M \models \neg\varphi[s]$, либо $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\varphi \wedge \psi)[s]$ — что $M \models \varphi[s]$ и $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\varphi \vee \psi)[s]$ — что либо $M \models \varphi[s]$, либо $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\exists x\varphi)[s]$ — что $M \models \varphi[s(a/x)]$ для некоторого $a \in M$;
- $M \models (\forall x\varphi)[s]$ — что для всех $a \in M$ выполнено $M \models \varphi[s(a/x)]$.

Справедливость $M \models \varphi[s]$ зависит только от значений $s(x)$ для *свободных* переменных в $\varphi$. Если $\varphi$ — высказывание, пишем $M \models \varphi$.

**Определение 1.** (Формальное) *доказательство* (вывод) формулы $\varphi$ из набора высказываний $A$ — это конечный список формул $\psi_1, \ldots, \psi_n = \varphi$, каждая из которых либо является некоторой аксиомой логики первого порядка, либо входит в набор $A$, либо получена по одному из трёх правил вывода из формул, предшествующих ей в этом списке. Если формула $\varphi$ имеет доказательство, то мы говорим, что $\varphi$ *выводима из* $A$ и пишем $A \vdash \varphi$.

*Теория* $T$ состоит из фиксированной сигнатуры и набора высказываний в этой сигнатуре. Обычно предполагается, что задан список аксиом — высказываний, которые порождают теорию (т.е. любое высказывание из $T$ выводится из аксиом), и что $T$ включает все высказывания, выводимые из аксиом.

Теория (набор формул) $T$ *непротиворечива*, если не существует формулы $\varphi$, для которой $T \vdash \varphi$ и $T \vdash \neg\varphi$.

**Определение 2.** Система $M$ называется *моделью* набора формул $T$, если $M \models \varphi$ для всех $\varphi \in T$.

# Теория множеств

Сигнатура теории множеств состоит из единственного предикатного символа $\in$.

## Система аксиом ZFC (Zermelo–Fraenkel–choice)

- *Аксиома существования*: множества существуют.

  $\exists x(x = x)$

- *Аксиома объёмности*: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы, т.е. каждый элемент одного множества принадлежит другому и наоборот.

  $\forall X \forall Y(\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$

- *Схема аксиом выделения*: любому множеству $X$ и любому свойству $\varphi$ отвечает множество $Y$, состоящее в точности из тех элементов множества $X$, которые обладают свойством $\varphi$.

  Если $\varphi$ — формула, свободные переменные которой содержатся среди $X, z, u_1, \ldots, u_n$, то $\forall X \forall u_1, \ldots, u_n \exists Y \forall z(z \in Y \leftrightarrow z \in X \wedge \varphi)$

  Множество всех $y \in X$, обладающих свойством $\varphi$, обозначается

$$\{y \in X : \varphi(y)\}.$$

По техническим причинам бывает удобно рассматривать совокупность всех множеств $x$, для которых выполнено данное свойство-формула $\varphi(x)$. Такая совокупность называется *классом*. Запись:

$$x \in \boldsymbol{C} \leftrightarrow \varphi(x) \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{C} = \{x : \varphi(x)\}.$$

Классы $\boldsymbol{C} = \{x : \varphi(x)\}$ и $\boldsymbol{D} = \{x : \psi(x)\}$ *равны*, если $\forall x(\varphi(x) = \psi(x))$. Класс, который не равен никакому множеству, называется *собственным*. *Универсальный класс* $\boldsymbol{V}$ — это класс всех множеств:

$$\boldsymbol{V} = \{x : x = x\}.$$

Используя аксиому объёмности и схему аксиом выделения, можно определить

- *пересечение* $X \cap Y = \{z \in X : z \in Y\}$,
- *разность* $X \setminus Y = \{z \in X : z \notin Y\}$,
- *пустое множество* $\varnothing = \{y \in X : y \neq y\}$.

- *Аксиома пары*: для любых множеств $x$ и $y$ существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — $x$ и $y$ (*неупорядоченная пара* элементов $x$ и $y$).

  $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$

  Используя аксиому объёмности и аксиому пары, можно определить

  - неупорядоченную пару $\{x, y\}$,
  - одноэлементное множество $\{x\} = \{x, x\}$,
  - упорядоченную пару $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,
  - упорядоченную тройку $(x, y, z) = ((x, y), z)$,
  - ...

- *Аксиома объединения*: для любого семейства множеств $\mathscr{F}$ существует множество $X = \bigcup \mathscr{F}$ — объединение семейства $\mathscr{F}$; его элементами являются в точности все элементы множеств-элементов семейства $\mathscr{F}$.

  $\forall \mathscr{F} \exists X \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathscr{F} \to x \in X)$.

  Обозначения: $X \cup Y = \bigcup\{X, Y\}$, $X \cup Y \cup Z = \bigcup\{X, Y, Z\}$ и т.д.

- *Схема аксиом подстановки* (*замещения*): если $\varphi(x, y)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества $a$ существует единственное множество $b$ такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества $X$ определено множество $Y$, элементами которого являются те и только те множества $y$, для которых $\varphi(x, y)$ истинно при некотором $x \in X$.

  $\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z) \to$

  $\quad \to \forall X \exists Y (\forall x \in X) \forall y(\varphi(x, y) \to y \in Y)$

  Здесь формулу $\varphi$ можно воспринимать как класс-отображение, которое каждому $a$ ставит в соответствие то единственное множество $b$, для которого высказывание $\varphi(a, b)$ истинно; тогда $Y$ — не что иное как образ множества $X$ при этом «отображении».

- *Аксиома бесконечности*: существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\varnothing$ и вместе с каждым элементом $x$ содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества $x$ и само множество $x$).

  $\exists X((\varnothing \in X) \wedge \forall x(x \in X \to (x \cup \{x\}) \in X))$

  Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует, что существует множество, состоящее из элементов $\varnothing$ (обозначение: 0), $\{\varnothing\}$ (обозначение: 1), $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (обозначение: 2), $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ (обозначение: 3), $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$ (обозначение: 4), ... .

Назовём множество $Y$ *подмножеством* множества $X$ (обозначение: $Y \subset X$), если $\forall y(y \in Y \to y \in X)$. Если $Y \subset X$ и $\neg(Y = X)$, то $Y$ называется *собственным подмножеством* (обозначение: $Y \subsetneq X$).

- *Аксиома множества подмножеств*: для любого множества $X$ существует множество $Y$, состоящее из всех подмножеств множества $X$.

  $\forall X \exists Y \forall z(z \subset X \to z \in Y)$

  Для множества подмножеств множества $X$ используются обозначения $\mathscr{P}(X)$, $2^X$ и $\exp X$.

  Аксиома множества подмножеств позволяет определить

  *декартово произведение* $X \times Y$ двух (и любого конечного числа) множеств $X$ и $Y$, а также понятия отношений и отображений:

  $$X \times Y = \{z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y) : (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = (x, y))\}.$$

  Множество $R$ называется (бинарным) *отношением*, если $R \subset X \times Y$ для некоторых множеств $X$ и $Y$. *Область определения* и *область значений* отношения $R$ — это множества

  $$\operatorname{dom} R = \{x \in X : \exists y((x, y) \in R)\} \quad \text{и} \quad \operatorname{ran} R = \{y \in Y : \exists x((x, y) \in R)\}.$$

  Отношение $f$ называется *отображением* (или *функцией*), если

  $$\forall x \forall y \forall x(((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \to y = z).$$

  В случае, когда $\operatorname{dom} f = X$, используют обозначение $f\colon X \to Y$.

  Множества можно возводить в степень:

  $$Y^X = \{f \subset X \times Y : f - \text{функция}, \operatorname{dom} f = X, \operatorname{ran} f \subset Y\}.$$

- *Аксиома регулярности* (*фундирования*): каждое непустое множество $X$ содержит элемент $x$ такой, что $X \cap x = \varnothing$.

  $\forall X(\neg(X = \varnothing) \to (\exists x \in X)(x \cap X = \varnothing)$

  *Следствие*: не существует бесконечной последовательности множеств $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такой, что $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$ (в частности, $\nexists X(X \in X)$) — достаточно рассмотреть $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ и применить аксиому. Из аксиомы выбора следует, что верно и обратное: из несуществования бесконечной последовательности $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$ вытекает аксиома регулярности — иначе $(\exists X \neq \varnothing)(\forall x \in X)(x \cap X \neq \varnothing)$ и по аксиоме выбора существует множество $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, в котором $x_0 \in X$, $x_1 \in X \cap x_0$, $x_2 \in X \cap x_1$ и т.д.

- *Аксиома выбора* ($AC$): для каждого семейства $\mathscr{F}$ непустых множеств существует *функция выбора* на $\mathscr{F}$, т.е. отображение $f\colon \mathscr{F} \to \bigcap \mathscr{F}$ с тем свойством, что $f(X) \in X$ для каждого $X \in \mathscr{F}$.

  $\forall \mathscr{F}((\forall X \in \mathscr{F})(X \neq \varnothing) \to (\exists f\colon \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F})(\forall X \in \mathscr{F})(f(X) \in X))$

# Лекция 2. Ординалы и кардиналы. Упорядоченные множества

## Ординалы и кардиналы

### Порядок

*Частичный порядок*, или просто *порядок*, на множестве $X$ — это подмножество $\leq$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leq y$ вместо $(x, y) \in \leq$; кроме того, мы иногда пишем $y \geq x$ вместо $x \leq y$):

- $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \to (x \leq z)$ (*транзитивность*);
- $\forall x \in X(x \leq x)$ (*рефлексивность*);
- $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \to (x = y)$ (*антисимметричность*).

Множество $X$ вместе с заданным на нём порядком (т.е. пара $(X, \leq)$) называется (*частично*) *упорядоченным множеством*; про множество $X$ говорят, что оно (*частично*) *упорядочено отношением* $\leq$. Запись $x \leq y$ читается «элемент $x$ не больше элемента $y$» или «элемент $x$ не превосходит элемента $y$», а запись $x \geq y$ — «элемент $x$ не меньше элемента $y$».

Для каждого порядка $\leq$ на $X$ однозначно определено соответствующее отношение $<$ *строгого порядка*: $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. При этом говорят, что элемент $x$ *меньше* элемента $y$, а $y$ *больше* $x$. И наоборот, по строгому порядку $<$ очевидным образом восстанавливается порядок $\leq$, которому он соответствует.

Два элемента $x$ и $y$ множества $X$, упорядоченного отношением $\leq$, *сравнимы*, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Элементы $x$ и $y$ *совместимы*, если существует $z \in X$ такой, что $z \leq x$ и $z \leq y$.

Говорят, что $y \in X$ лежит *между* $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leq y \leq z$.

Элемент $x$ множества $Y \subset X$ называется *минимальным* (*максимальным*) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leq x) \to (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leq y) \to (y = x))$).

Элемент $x$ *ограничивает* множество $Y \subset X$ *сверху* (*снизу*), или является *верхней* (*нижней*) *гранью* множества $Y$, если $\forall y \in Y(y \leq x)$ (соответственно $\forall y \in Y(x \leq y)$). Если при этом $x$ принадлежит множеству $Y$, то он называется *наименьшим* (*наибольшим*) элементом $Y$ и обозначается $\min Y$ ($\max Y$).

Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*, *ограниченным*).

Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества $Y$, если она существует, называется также *точной верхней* (*нижней*) *гранью*, или *супремумом* (*инфимумом*), множества $Y$ и обозначается $\sup Y$ ($\inf Y$).

*Интервалом* упорядоченного множества $(X, \leq)$ называется любое его подмножество $I$ с тем свойством, что для любых $x, y \in I$ всякий элемент $z \in X$ между $x$ и $y$ принадлежит $I$. Интервалы бывают восьми типов:

$$\begin{array}{llll}
\text{а)} & \{x : x < a\}, & \text{д)} & \{x : a \leq x \leq b\} = [a, b], \\
\text{б)} & \{x : x \leq a\}, & \text{е)} & \{x : a < x < b\} = (a, b), \\
\text{в)} & \{x : a < x\}, & \text{ё)} & \{x : a \leq x < b\} = [a, b), \\
\text{г)} & \{x : a \leq x\}, & \text{ж)} & \{x : a < x \leq b\} = (a, b],
\end{array}$$

где $a, b \in I$. Интервалы типа а) называют *начальными интервалами*.

Порядок $\leq$ на $X$ называется *линейным*, если любые два элемента $x$ и $y$ множества $X$ сравнимы. В этом случае пара $(X, \leq)$ называется *линейно упорядоченным множеством*, а пара $(X, <)$ — *строго линейно упорядоченным множеством.*

Порядок $\leq$ на $X$ *полон*, если он линеен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в $Y$) элемент. Пара $(X, \leq)$, где $\leq$ — полный порядок, называется *вполне упорядоченным множеством*, а пара $(X, <)$ — *строго вполне упорядоченным множеством.* Всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент (хотя наибольший элемент существовать не обязан), и для всякого его элемента, который не является наибольшим, определён элемент, непосредственно следующий за ним.

Порядок $\leq$ на $X$ называется *фундированием*, если любое непустое множество $Y \subset X$ содержит минимальный (в $Y$) элемент.

На каждом подмножестве $Y$ упорядоченного множества $(X, \leq)$ естественно возникает *индуцированный* порядок, или *сужение* порядка $\leq$ на $Y$ — это пересечение порядка $\leq$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линеен или полон, если таковым является порядок $\leq$ на $X$. В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Отображение $f\colon X \to Y$ между упорядоченными множествами $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ называется *порядковым изоморфизмом*, а сами эти упорядоченные множества — *порядково изоморфными*, если $f$ взаимно однозначно и для любых $x, y \in X$ соотношение $x \leq y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \preccurlyeq f(y)$. В случае линейно упорядоченных множеств любая сохраняющая порядок (т.е. «монотонно неубывающая») биекция является порядковым изоморфизмом.

## Теорема об изоморфизме

**Теорема 1.** Пусть $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ — любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует $x_* \in X$ такой, что начальный интервал $\{x \in X : x < x_*\}$ множества $X$ порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству $Y$, либо существует $y_* \in Y$ такой, что вполне упорядоченное множество $X$ порядково изоморфно начальному интервалу $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ множества $Y$, либо сами множества $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ порядково изоморфны.

**Замечание 1.**

1. Пусть $f\colon P \to P$ — сохраняющее порядок биективное отображение вполне упорядоченного множества $P$ в себя. Тогда $f(x) \geq x$ для каждого $x \in P$.
2. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу.

## Ординалы

**Определение 3.** Множество $S$ *транзитивно*, если оно содержит все элементы всех своих элементов: $\forall x(x \in S \to x \subset S)$.

**Определение 4.** Множество называется *ординалом* (*порядковым числом*), если оно транзитивно и строго вполне упорядочено отношением $\in$.

Ординалы обычно обозначают буквами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... . Вместо $\alpha \in \beta$ часто пишут $\alpha < \beta$. Запись $\alpha \leq \beta$ означает, что либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$.

Класс всех ординалов обозначается Ord или On.

- Каждый ординал $\alpha$ — это множество всех ординалов $\beta < \alpha$
- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ = множество всех ординалов $\beta \leq \alpha$ — наименьший ординал, больший $\alpha$
- Для множества ординалов $A$ $\bigcup A = \sup A$ (очень легко проверить). Множество $\sup A$ иногда обозначают $\lim A$.
- Класс ординалов собственный (по аксиоме регулярности).

Сам Кантор понимал ординалы как классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств и называл их *порядковыми типами*.

**Теорема 2.** Каждое вполне упорядоченное множество $(P, \leq)$ порядково изоморфно единственному ординалу.

*Доказательство.* $P$ вполне упорядочено $\implies$ по аксиоме подстановки можно определить множество $S$ ординалов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь начальному интервалу $P$. Ординал $\alpha = \sup S = \bigcup S$ изоморфен $P$. Действительно, если это не так, то по теореме об изоморфизме либо $\alpha$ изоморфен начальному интервалу $I \subsetneq P$ (а тогда $\alpha \in \alpha$ в противоречие с аксиомой регулярности), либо $P$ изоморфно начальному интервалу $\alpha$. Любой начальный интервал $\alpha$ — это некоторый ординал $\beta < \alpha$, который изоморфен начальному интервалу $P$, а вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу. Отсюда же вытекает единственность. ■

**Определение 5.** Ординал $\alpha$ называется *изолированным*, или *непредельным*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta$. В противном случае $\alpha$ называется *предельным* ординалом.

**Замечание 2.** Ординал $\alpha$ является предельным тогда и только тогда, когда $\alpha = \sup \alpha$.

Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует существование наименьшего непустого предельного ординала $\omega$. Ординалы, меньшие $\omega$ (т.е. элементы $\omega$) называются *натуральными числами*, а сам ординал $\omega$ называется *множеством натуральных чисел*. Натуральные числа обозначаются $0, 1, 2, \ldots, i, j, k, l, m, n, \ldots$ .

(Привычнее было бы сказать, что натуральные числа — непустые элементы множества $\omega$; иногда, а за пределами теории множеств почти(?) всегда, под множеством натуральных чисел имеют в виду $\omega \setminus \{\varnothing\}$, и тогда его обозначают $\mathbb{N}$.)

## Трансфинитная индукция и рекурсия

Каждый ординал строго вполне упорядочен отношением $\in$ $\implies$ в каждом непустом классе ординалов есть наименьший элемент.

**Принцип трансфинитной индукции:**
Пусть $\boldsymbol{C}$ — класс ординалов такой, что

1. $\varnothing \in \boldsymbol{C}$,
2. $\alpha \in \boldsymbol{C} \to \alpha + 1 \in \boldsymbol{C}$,
3. $A \in \boldsymbol{C} \to \sup A \in \boldsymbol{C}$.

Тогда $\boldsymbol{C} = \mathrm{Ord}$.

*Доказательство.* Если утверждение неверно, то существует наименьший ординал $\alpha \notin \boldsymbol{C}$, а это противоречит условиям 1–3. ■

На практике принцип индукции часто приходится применять к множествам, а не классам множеств. В этом случае следует считать, что класс $\boldsymbol{C}$ заведомо содержит все ординалы, начиная с некоторого.

Трансфинитная рекурсия похожа на трансфинитную индукцию, но вместо того чтобы *доказывать*, что что-то верно для всех ординалов, мы *строим* последовательность объектов, по одному для каждого ординала.

**Принцип трансфинитной рекурсии:**
Для любой функции-класса $G\colon \boldsymbol{V} > \boldsymbol{V}$ (где $\boldsymbol{V}$ — класс всех множеств) существует единственная трансфинитная последовательность ординалов $F\colon \operatorname{Ord} \to \boldsymbol{V}$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ для всех $\alpha \in \operatorname{Ord}$.

Н.К. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*,
Москва: МЦНМО, 2012

## Теорема Цермело и лемма Цорна

**Теорема 3.** Любое множество можно вполне упорядочить.

**Теорема 4.** Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в $X$ есть максимальный элемент.

Теорема Цермело и лемма Цорна равносильны аксиоме выбора в том смысле, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело}, \quad \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело} \vdash \mathrm{ZFC}$$

и

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна}, \quad \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна} \vdash \mathrm{ZFC}.$$

Принцип трансфинитной рекурсии равносилен схеме аксиом подстановки в том же смысле.

Пример применения леммы Цорна.

**Теорема 5.** В любом векторном пространстве $V$ имеется базис. Более того, всякое линейно независимое множество векторов в $V$ можно дополнить до базиса.

**Теорема 6 (Оригинальная формулировка леммы Цорна).** Пусть $\mathscr{X}$ — семейство множеств со свойством: если $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ таково, что для любых $X, Y \in \mathscr{Y}$ либо $X \subset Y$, либо $Y \subset X$, то $\bigcup \mathscr{Y} \in \mathscr{X}$. Тогда в семействе $\mathscr{X}$ есть максимальный по включению элемент.

*Доказательство.* Возьмём в качестве $\mathscr{X}$ семейство всех линейно независимых множеств в $V$, содержащих данное множество $\mathcal{S}$. Пусть $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ удовлетворяет условию в лемме. Возьмём любые $n \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \bigcup \mathscr{Y}$. Для $i \in \mathbb{N}$ найдём $\mathcal{S}_i \in \mathscr{Y}$, для которых $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{S}_i$. По условию на $\mathscr{Y}$ множества $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ можно упорядочить по включению. Пусть $\mathcal{S}_{k_1} \subset \mathcal{S}_{k_2} \subset \cdots \subset \mathcal{S}_{k_n}$. Тогда $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathcal{S}_{k_n}$. Множество $\mathcal{S}_{k_n}$ линейно независимо $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ линейно независимы $\Longrightarrow$ $\bigcup \mathscr{Y}$ линейно независимо. Лемма Цорна $\Longrightarrow$ в $\mathscr{X}$ есть максимальное линейно независимое множество, содержащее $\mathcal{S}$. ■

Понятие вполне упорядоченного множества и теорема Цермело позволяют распространить метод математической индукции на произвольные множества. Пусть $X$ — непустое множество и $\varphi(x)$ — любое высказывание об элементах $X$. Предположим, что нам удалось ввести полный порядок $\le$ на $X$ так, что мы умеем доказывать $\varphi(x_0)$ для наименьшего элемента $x_0$ и умеем выводить утверждение $\varphi(x)$ из утверждения «$\varphi(y)$ верно для всех $y < x$». Тогда мы смело можем утверждать, что утверждение $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$. Действительно, если это не так, т.е. если множество $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\}$ непусто, то мы можем взять наименьший элемент в этом множестве и сразу получить противоречие.

То же рассуждение работает в случае, когда $\le$ — фундирование: если $\varphi(x_0)$ верно для всех минимальных элементов $x_0$ и из утверждения «для любого $y < x$ $\varphi(y)$ верно» выводится $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$ — если $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\} \ne \varnothing$, то существование минимального элемента в этом множестве приводит к противоречию.

## Кардиналы

Для каждого множества $X$ Кантор определял мощность $|X|$ как класс всех множеств, находящихся во взаимно однозначном соответствии с $X$ ($|X| = |Y|$, если существует биекция $X \rightleftarrows Y$). Мощности сравниваются так:

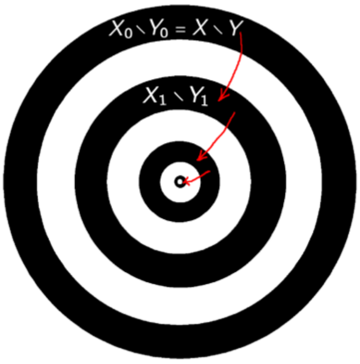
$$|X| \le |Y|, \qquad \text{если существует инъекция } X \to Y \text{ (или сюръекция } Y \to X)$$

**Теорема 7 (Кантора–Бернштейна–Шрёдера).** Если $|X| \le |Y|$ и $|Y| \le |X|$, то $|X| = |Y|$.

*Доказательство.* Достаточно показать, что если $X_1 \subset Y \subset X$ и $|X_1| = |X|$, то $|X| = |Y|$. Пусть $f\colon X \to X_1$ — биекция. Положим

$$\begin{array}{llll} X_0 = X, & X_1 = f(X_0), & X_2 = f(X_1), & \dots; \\ Y_0 = Y, & Y_1 = f(Y_0), & Y_2 = f(Y_1), & \dots. \end{array}$$

Для $x \in X$ положим $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } \exists n \in \omega\colon x \in X_n \setminus Y_n, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$




Отображение $g\colon X \to Y$ — биекция. ■

**Определение 6.** *Мощность* $|X|$ множества $X$ — это наименьший ординал $\alpha$, для которого существует биекция $X \rightleftarrows \alpha$.

**Определение 7.** Ординал $\alpha$ называется *кардиналом*, если не существует биекции между $\alpha$ и $\beta$ ни для какого ординала $\beta < \alpha$.

Кардиналы обозначаются буквами $\kappa$, $\lambda$, ... .

Кардиналы называются также *алефами.* Кантор использовал для них обозначение $\aleph_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$:

- $\aleph_0 = \omega$,
- $\aleph_{\alpha+1} =$ наименьший кардинал, больший $\aleph_\alpha$,
- для предельного ординала $\alpha$ $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$.

Сейчас наравне с $\aleph_\alpha$ используется обозначение $\omega_\alpha$ (которое сам Кантор использовал только для ординалов):

- $\omega_0 = \omega$,
- $\omega_{\alpha+1} =$ наименьший кардинал, больший $\omega_\alpha$,
- для предельного ординала $\alpha$ $\omega_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$.

Мощность определена для каждого множества. Действительно, по теореме Цермело любое множество можно вполне упорядочить, а каждое вполне упорядоченное множество порядково изоморфно единственному ординалу. Порядковый изоморфизм — биекция, поэтому для любого множества $X$ существуют ординал $\alpha$ и биекция $\alpha \rightleftarrows X$. Значит, множество ординалов $\{\beta \in \alpha + 1 : \text{существует биекция } \beta \rightleftarrows X\}$ непусто, и $|X|$ — его наименьший элемент.

Для каждого бесконечного множества $X$ $\exists \alpha \in \mathrm{Ord}$: $|X| = \omega_\alpha$.

**Определение 8.** Множество $X$ *счётно*, если $|X| = \omega$. Множество $X$ *несчётно*, если $|X| > \omega$.

## Арифметика кардиналов

Для непересекающихся множеств $X$ и $Y$

- $|X| + |Y| = |X \cup Y|$
- $|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$
- $|Y|^{|X|} = |Y^X|$
  (напомним: $Y^X = \{f \subset X \times Y : f$ — отображение $X \to Y\}$)
- в частности, $2^{|X|} = |\{\chi_A : A \subset X\}| = |\mathscr{P}(X)|$
  ($\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств $X$,
  $\chi_A$ — характеристическая функция подмножества $A \subset X$)

*Свойства арифметических операций:*

- $(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu)$, $\quad (\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)$;
- $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$, $\quad \kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$;
- $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$;
- если $\kappa\le\lambda$, то $\kappa+\mu\le\lambda+\mu$, $\kappa\cdot\mu\le\lambda\cdot\mu$ и $\kappa^\mu\le\lambda^\mu$;
- если $1\le\kappa$ и $\lambda\le\mu$, то $\kappa^\lambda\le\kappa^\mu$;
- если $\kappa$ бесконечен, то $\kappa\cdot\kappa=\kappa$;
- если хотя бы один из кардиналов $\kappa$ и $\lambda$ бесконечен и оба они
- отличны от нуля, то $\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$;
- $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$, $\quad (\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$, $\quad \kappa^{\lambda\cdot\mu}=(\kappa^\lambda)^\mu$;
- если хотя бы один из кардиналов $\kappa$ и $\lambda$ бесконечен, $\kappa\ge 2$ и $\lambda\ge 1$, то
- $\max\{\kappa,2^\lambda\}\le\kappa^\lambda\le\max\{2^\kappa,2^\lambda\}$;
- в частности, если $\lambda$ бесконечен, то $2^\lambda=\kappa^\lambda$ для любого $\kappa\le 2^\lambda$, $\kappa\ge 2$.


- $(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu)$, $\quad (\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)$;
- $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$, $\quad \kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$;
- $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$;
- если $\kappa\le\lambda$, то $\kappa+\mu\le\lambda+\mu$, $\kappa\cdot\mu\le\lambda\cdot\mu$ и $\kappa^\mu\le\lambda^\mu$;
- если $1\le\kappa$ и $\lambda\le\mu$, то $\kappa^\lambda\le\kappa^\mu$;
- если $\kappa$ бесконечен, то $\kappa\cdot\kappa=\kappa$;
- если хотя бы один из кардиналов $\kappa$ и $\lambda$ бесконечен и оба они
- отличны от нуля, то $\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$;
- $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$, $\quad (\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$, $\quad \kappa^{\lambda\cdot\mu}=(\kappa^\lambda)^\mu$;
- если хотя бы один из кардиналов $\kappa$ и $\lambda$ бесконечен, $\kappa\ge 2$ и $\lambda\ge 1$, то
- $\max\{\kappa,2^\lambda\}\le\kappa^\lambda\le\max\{2^\kappa,2^\lambda\}$;
- в частности, если $\lambda$ бесконечен, то $2^\lambda=\kappa^\lambda$ для любого $\kappa\le 2^\lambda$, $\kappa\ge 2$.


**Теорема 8 (Кантора).** Для любого кардинала $\kappa$ $\;2^\kappa>\kappa$.

*Доказательство.* Надо доказать: $|\mathscr{P}(X)|>|X|$ для любого множества $X$. Ясно, что $|\mathscr{P}(X)|\ge |X|$. Для любого отображения $f\colon X\to\mathscr{P}(X)$

$$Y=\{x\in X : x\notin f(x)\}\notin \operatorname{ran} f \quad (\operatorname{ran} f \text{ — множество значений } f).$$

Действительно, пусть $Y=f(y)$. По определению множества $Y$ если $y\in Y$, то $y\notin Y$, и если $y\notin Y$, то $y\in Y$.

Не существует сюръекции $X\to\mathscr{P}(X) \implies |\mathscr{P}(X)|>|X|$. ■

**Определение 9.** Кардинал $2^\omega$ называется *мощностью континуума.*

Континуум-гипотеза (CH): $\boxed{2^\omega=\omega_1}$.

CH верна $\iff$ существует сюръекция $\omega_1\to\mathscr{P}(\omega)$.
CH неверна $\iff$ существует инъекция $\omega_2\to\mathscr{P}(\omega)$.

# Лекция 3. Теорема Цермело. Трансфинитная индукция. Универсум фон Неймана. Генерические множества

## Кумулятивная иерархия фон Неймана

### $\in$-Индукция

Аксиома регулярности $\implies$ любое непустое множество содержит $\in$-минимальный элемент (если $X \neq \varnothing$, то $(\exists Y \in X)(Y \cap X = \varnothing)$). Покажем, что любой непустой класс тоже содержит $\in$-минимальный элемент.

**Определение 10.** *Транзитивное замыкание* множества $X$ — это транзитивное множество $\mathrm{TC}(X)$ такое, что $X \subset \mathrm{TC}(X)$ и $\mathrm{TC}(X) \subset Y$ для любого транзитивного множества $Y \supset X$.

**Лемма 1.** Для любого множества $X$ существует транзитивное замыкание $\mathrm{TC}(X)$.

*Доказательство.* По индукции: $X_0 = X, \ldots, X_{n+1} = \bigcup X_n, \ldots, \mathrm{TC}(X) = \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$. ■

**Лемма 2.** Если $\boldsymbol{C}$ — непустой класс, то $(\exists X \in \boldsymbol{C})(X \cap \boldsymbol{C} = \varnothing)$.

*Доказательство.* Возьмём $X \in \boldsymbol{C}$. Предположим, что $X \cap \boldsymbol{C} \neq \varnothing$. Тогда $T = \mathrm{TC}(X) \cap \boldsymbol{C} \neq \varnothing$. По аксиоме регулярности существует $x \in T$, для которого $x \cap T = \varnothing$. Имеем $x \cap \boldsymbol{C} = \varnothing$, так как если $y \in x \cap \boldsymbol{C}$, то $y \in \mathrm{TC}(X)$ в силу транзитивности $\mathrm{TC}(X)$, так что $y \in x \cap T$. ■

**Теорема 9 (Теорема об $\in$-индукции).** Если для класса $\boldsymbol{C}$ выполнено условие $\forall x(X \subset \boldsymbol{C} \to X \in \boldsymbol{C})$, то $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{V}$.

*Доказательство.* Если класс $\boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{C}$ непуст, то по лемме существует $X \in \boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{C}$, для которого $X \cap (\boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{C}) = \varnothing$, т.е. $X \subset \boldsymbol{C}$. По предположению $X \in \boldsymbol{C}$. ■

### Иерархия фон Неймана

Иерархия фон Неймана — это ранжирование всех множеств в соответствии с их принадлежностью к множествам $V_\alpha$, где $\alpha$ пробегает класс всех ординалов. Классы $V_\alpha$ определяются по трансфинитной рекурсии:

- $V_0 = \varnothing$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $V_\alpha = \mathscr{P}(V_\beta)$
- если $\alpha$ — предельный ординал, то $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$

Положим $\boldsymbol{\Pi} = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} V_\alpha$ (это собственный класс).

**Определение 11.** *Ранг* множества $x \in \boldsymbol{\Pi}$ — это наименьший ординал $\alpha$, для которого $x \subset V_\alpha$ (т.е. $x \in V_{\alpha+1}$). Обозначение: $\operatorname{rank} x$.

1. $\beta < \alpha \Rightarrow V_\beta \subset V_\alpha$
2. $x \in \mathbf{\Pi} \Leftrightarrow x \subset \mathbf{\Pi}$
3. $\mathrm{Ord} \subset \mathbf{\Pi}$
4. $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} \;\; \mathrm{rank}\, \alpha = \alpha$
5. $x \in y \in \mathbf{\Pi} \Rightarrow \mathrm{rank}\, x < \mathrm{rank}\, y$
6. $\mathrm{rank}\, X = \sup\{\mathrm{rank}\, x + 1 : x \in X\}$
7. существует формула $\varphi(\alpha, x)$, выражающая «$x \in V_\alpha$»

**Теорема 10 (фон Нейман).** Аксиома регулярности $\iff$ $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{V}$.

*Доказательство.* $\Longrightarrow$: Если класс $\boldsymbol{V} \setminus \mathbf{\Pi}$ непуст, то существует $X \in \boldsymbol{V} \setminus \mathbf{\Pi}$, для которого $X \cap \boldsymbol{V} \setminus \mathbf{\Pi} = \varnothing$, т.е. $(\forall x \in X)(x \in \mathbf{\Pi})$. Положим $\alpha = \sup\{\mathrm{rank}\, x : x \in X\}$. По определению ранга $X \subset V_{\alpha+1}$. Значит, $X \in V_{\alpha+2} \subset \mathbf{\Pi}$.

$\Longleftarrow$: Если $X \neq \varnothing$, то для элемента $x \in X$ наименьшего ранга имеем $x \cap X = \varnothing$, так как если $y \in x \cap X$, то $\mathrm{rank}\, y < \mathrm{rank}\, x$ в противоречие с минимальностью ранга $x$. ∎

# Модели теории множеств

*Алгебраическая система* для сигнатуры $\{\in\}$ теории множеств, или $\in$-система, — это пара $(M, \sigma(\in))$, где $M$ — непустое множество и $\sigma(\in)$ — бинарное отношение на $M$ (т.е. $\sigma(\in) \subset M \times M$). Мы будем рассматривать только *стандартные* $\in$-системы, для которых $\sigma(\in) = \in$. Стандартная $\in$-система — это просто непустое множество $M$.

В дальнейшем будем рассматривать только формулы языка теории множеств. Атомы: $x \in y$ и $x = y$. Все остальные формулы теории множеств стоятся из атомов с помощью пропозициональных связок и кванторов:

$$\varphi \wedge \psi, \quad \varphi \vee \psi, \quad \neg\varphi, \quad \varphi \to \psi, \quad \forall x \varphi, \quad \exists x \varphi$$

(можно обойтись связками $\vee$ и $\neg$ и квантором $\exists$).

Выше мы определили в общем случае (для произвольных $\Sigma$-системы $M$, $\Sigma$-формулы $\varphi$ и подстановки $s$: {символы переменных} $\to M$) отношение $M \models \varphi[s]$ ($\varphi$ выполняется в $M$ при подстановке $s$).

Для стандартной $\in$-системы определение становится проще.

**Определение 12.** Пусть $M$ — $\in$-система и $\varphi$ — формула. *Релятивизация* $\varphi^M$ формулы $\varphi$ к $M$ определяется индукцией по длине формулы:

- если $\varphi$ — атом, то $\varphi^M = \varphi$;
- если $\varphi = \chi \wedge \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \wedge \psi^M$;
- если $\varphi = \chi \vee \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \vee \psi^M$;
- если $\varphi = \chi \to \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \to \psi^M$;
- если $\varphi = \neg\psi$, то $\varphi^M = \neg(\psi^M)$;
- если $\varphi = \exists x \psi$, то $\varphi^M = (\exists x \in M)(\psi^M)$;
- если $\varphi = \forall x \psi$, то $\varphi^M = (\forall x \in M)(\psi^M)$.

Пусть теперь $\varphi$ — высказывание. Мы пишем $M \models \varphi$ и говорим, что $\varphi$ истинно в $M$, или $M$ является *моделью* для $\varphi$, если истинна его релятивизация $\varphi^M$.

*Модель теории множеств* — это множество $M$ с тем свойством, что $M \models \varphi$ для каждой аксиомы $\varphi$ системы ZFC.

Если система аксиом ZFC непротиворечива, то модель теории множеств существует (по теореме о существовании модели).

Обычно в теории множеств рассматривают только *стандартные транзитивные модели* (*СТМ*).

Теорема Лёвенгейма–Скулема $\implies$ если существует какая-то СТМ теории множеств, то существует и счётная СТМ.

**Определение 13.** Пусть $M$ — СТМ. Говорят, что формула $\varphi(x)$ *абсолютна* (для $M$), если

$$(\forall x \in M)(\varphi(x) \leftrightarrow \varphi^M(x)).$$

**Предложение 1.**

1. Все атомы абсолютны.
2. Любая формула $\varphi$, которая содержит кванторы $\exists$ и $\forall$ только в составе выражений вида $(\exists x \in y)$ и $(\forall x \in y)$, абсолютна (такие формулы называются $\Sigma_0$-*формулами*).
3. Любая формула $\varphi$ с тем свойством, что для некоторой $\Sigma_0$-формулы $\psi$ $\mathrm{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, абсолютна.
4. Любая формула $\varphi$ с тем свойством, что для некоторых $\Sigma_0$-формул $\chi$ и $\psi$ $\mathrm{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x\chi(x)$ и $\mathrm{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \forall x\psi(x)$, абсолютна.

*Доказательство.* 2: Если $\varphi$ — атом или имеет один из видов $\chi \wedge \psi$, $\chi \vee \psi$, $\chi \to \psi$ и $\neg\psi$ для абсолютных $\chi$ и $\psi$, то доказывать нечего. Пусть $\varphi(y, z)$ имеет вид $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$ для абсолютной $\psi$, и пусть $y, z \in M$.

Формула $\varphi(y, z)^M$ означает, что $((\exists x \in y)(\psi(x, y, z))^M$. Следовательно, $\exists x \in y \in M$, для которого $\psi(x, y, z)^M$. Транзитивность $M$ + абсолютность $\psi$ $\implies$ $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$.

Обратно, формула $\varphi(y, z)$ означает, что $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$, т.е. $\psi(x, y, z)$ для некоторого $x \in y$. В случае $y \in M$ имеем $x \in M$. Формула $\psi$ абсолютна $\implies$ $\psi(x, y, z)^M$ для некоторого $x \in y$, т.е. $((\exists x \in y)\psi(x, y, z))^M$, а это и есть $\varphi(y, v)^M$.

3: Пусть $x$ — набор всех свободных переменных в $\varphi$, и пусть $\psi$ — $\Sigma_0$-формула, для которой $\mathrm{ZFC} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Поскольку аксиомы ZFC не содержат свободных переменных, по правилу обобщения (одно из правил вывода для кванторов) имеем $\mathrm{ZFC} \vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Значит, $(\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi))^M$ (потому что $M$ — модель ZFC), т.е. $(\forall x \in M)(\varphi^M \leftrightarrow \psi^M)$. С другой стороны, $(\forall x \in M)(\varphi \leftrightarrow \psi)$ и $(\forall x \in M)(\psi \leftrightarrow \psi^M)$ (так как $\psi$ абсолютна). Следовательно, $(\forall x \in M)(\varphi \leftrightarrow \varphi^M)$. ∎

**Предложение 2.** Формула $\mathrm{WF}(x, Y)$, означающая «$x$ — отношение фундирования на $Y$», абсолютна.

*Доказательство. Схема доказательства.* Легко видеть, что утверждение «$x$ является бинарным отношением на $Y$» выражается $\Sigma_0$-формулой. Поэтому сосредоточимся на той части формулы WF, которая относится к существованию минимальных элементов.

Обозначим соответствующее утверждение $\varphi$: для бинарного отношения $R$ на $Y$ формула $\varphi(R, Y)$ («$R$ — отношение фундирования») — это

$$\forall A((A \subset Y) \wedge (A \neq \varnothing) \to (\exists a \in A)(\forall b \in A)\neg(bRa)).$$

Видно, что формула WF, выписанная полностью, удовлетворяет одному из условий в пункте 4 предыдущего предложения.

Рассуждая по трансфинитной рекурсии, можно показать, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash \varphi(R, Y) \leftrightarrow \exists f((f \text{ — отображение } Y \to \mathrm{Ord}) \wedge \\ \wedge (\forall y, z \in Y)(yRz \to f(y) < f(z)),$$

так что второе условие тоже выполнено.

■

## Список абсолютных формул

- $x \in Y$
- $X = Y$
- $X \subset Y$
- $\{x, y\}$
- $\{x\}$
- $(x, y)$
- $\varnothing$
- $X \cup Y$
- $X \cap Y$
- $X \setminus Y$
- $S(X) = X \cup \{X\}$
- $\bigcup X$
- $\bigcap X$, $X \neq \varnothing$
- $X \times X$
- $R$ — отношение
- $\operatorname{dom} R$
- $\operatorname{ran} R$
- $f$ — функция
- $f(x)$
- $f$ — биекция
- $X$ транзитивно
- $X$ — ординал
- $X$ — предельный ординал
- $X$ — изолированный ординал
- $X$ — конечный ординал
- $\omega$
- 27
- $X$ конечно
- $X$ бесконечно
- $X^n$
- $X^{<\omega}$ $(= \bigcup\{X^n : n \in \omega\})$
- $R$ упорядочивает $X$
- $R$ вполне упорядочивает $X$
- порядковый тип $(X, \leq)$

**Теорема 11 (Абсолютность трансфинитной рекурсии).** *Для любой функции-класса $G\colon \mathbf{V} > \mathbf{V}$ (где $\mathbf{V}$ — класс всех множеств) существует единственная трансфинитная последовательность ординалов $F\colon \mathrm{Ord} \to \mathbf{V}$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$.*

*Если $G$ абсолютна, то и $F$ абсолютна.*

*Доказательство. Схема доказательства.* Применяя трансфинитную рекурсию внутри СТМ $M$, определяем $F^M\colon \mathrm{Ord}^M \to M$ так, что $(\forall\alpha \in \mathrm{Ord}^M)(F^M(\alpha) = G^M|_\alpha)$. По трансфинитной индукции доказываем, что $F^M = F|_{\mathrm{Ord}^M}$ (иначе рассмотрим наименьший ординал $\alpha$, для которого это нарушается, и придём к противоречию). ■

**Теорема 12.** 1. Формулы $\operatorname{rank} x$ и $\mathrm{TC}(x)$ абсолютны.

2. Для любой СТМ $M$

$$(\forall X \in M)(\mathscr{P}(X)^M = \mathscr{P}(X) \cap M) \text{ и } (\forall \alpha \in M)(V_\alpha^M = V_\alpha \cap M).$$

## Генерическое расширение

В дальнейшем под (*частично*) *упорядоченным множеством* (сокращение: ч.у.м.) мы всегда будем иметь в виду тройку $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$, где $P$ — множество, $\leq$ — порядок на $P$ и $\mathbf{1}$ — наибольший элемент $P$. Когда мы пишем $\mathbb{P} \in M$, мы имеем в виду, что $P \in M$, $\leq \in M$ и $\mathbf{1} \in M$. Скажем, что $x, y \in P$ *совместимы*, если существует элемент $z \in P$ такой, что $z \leq x$ и $z \leq y$. Если $x$ и $y$ несовместимы, мы пишем $x \perp y$.

**Определение 14.** Множество $D \subset P$ *плотно* в $\mathbb{P}$, если для каждого $p \in P$ существует $d \leq p$, $d \in D$.

Для данного $p \in P$ множество $D \subset P$ *плотно ниже* $p$, если для всякого $q \leq p$ существует $d \leq q$, $d \in D$.

Ясно, что всякое плотное множество плотно ниже любого $p \in P$.

Свойство «быть отношением частичного порядка» абсолютно, так как оно выражается через абсолютное свойство «быть отношением» формулой, содержащей лишь ограниченные кванторы. То же относится к понятиям плотности и плотности ниже $p$.

**Определение 15.** Пусть $M$ — множество и $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м.. Множество $G \subset P$ называется $\mathbb{P}$-*генерическим над* $M$, или просто *генерическим*, если

1. $\mathbf{1} \in G$;
2. для любых $p, q \in G$ существует $r \in G$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
3. если $p \in G$, $q \in P$ и $p \leq q$, то $q \in G$;
4. если $D \subset P$ плотно и $D \in M$, то $G \cap D \neq \varnothing$.

**Предложение 3.** Если $M$ счётно, то для любого $p \in P$ найдётся генерическое множество $G \subset P$, содержащее $p$.

*Доказательство.* Перенумеруем все плотные $D \subset P$, принадлежащие множеству $M$: $D_0, D_1, \dots$ . По индукции выберем $q_i \in D_i$ так, что $p \geq q_0 \geq q_1 \geq \dots$ . Положим

$$G = \{r \in P : \text{существует } n \in \omega, \text{ для которого } q_n \leq r\}.$$

∎

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $M$ — счётная стандартная транзитивная модель ZFC и $\mathbb{P}$ — частично упорядоченное множество, $\mathbb{P} \in M$. Напомним, что $p \perp q$ означает, что $p$ и $q$ несовместимы, т.е. не существует $r \in P$, для которого одновременно $r \leq p$ и $r \leq q$.

**Предложение 4.** Если $\mathbb{P}$ таково, что для всякого $p \in P$ существуют $q, r \in P$ со свойствами

$$q \le p, \quad r \le p \quad \text{и} \quad q \perp r,$$

то никакое генерическое множество не принадлежит $M$.

*Доказательство.* Если $G$ — генерическое множество и $G \in M$, то $D = P \setminus G \in M$ (так как операция $\setminus$ абсолютна). Множество $D$ плотно. (Действительно, пусть $p \in P$. Возьмём $q, r \in P$ такие, что $q \le p$, $r \le p$ и $q \perp r$. Поскольку $q \perp r$, имеем либо $q \notin G$, либо $r \notin G$, а значит, либо $q \in D$, либо $r \in D$.) Однако $G \cap D = \varnothing$. ■

Исходя из счётной СТМ $M$, ч.у.м. $\mathbb{P}$ и генерического множества $G$ мы будем строить другую счётную СТМ $M[G]$ со свойствами

1. $M \subset M[G]$
2. $G \in M[G]$
3. $M$ — минимальная модель со свойствами 1 и 2.

Позже мы увидим, что из свойств 1–3 вытекает свойство

4. $\mathrm{Ord}^{M[G]} = \mathrm{Ord}^M$.

(Грубо говоря, $M[G]$ — это множество всех множеств из $M$ и множеств, которые можно получить из $G$ с помощью процессов, определимых в $M$. Таким образом, хотя элементы $M[G]$ и не обязаны принадлежать модели $M$, их можно описывать изнутри $M$, если дать им имена из $M$.)

Элементы генерического множества $G$ называются *условиями.*

## Как это работает

**Определение 16.** Пусть $\alpha$ — ординал. Упорядоченное множество $\mathbb{P} = (P, \le, \mathbf{1})$, где

$$P \text{ — множество конечных частичных функций } \alpha \times \omega \to \{0, 1\},$$

$$p \le q \iff p \supset q,$$

$$\mathbf{1} = \varnothing,$$

называется *$\alpha$-коэновским частично упорядоченным множеством.*

Если $M$ — СТМ ZFC и $\alpha \in M$, то $\alpha$-коэновское множество принадлежит $M$ — это вытекает из абсолютности множеств $\omega$ и $\{0, 1\}$ и формул $X \times Y$, $X \subset Y$, «$X$ — функция» и «$X$ конечно».

Элементы $\alpha$-коэновского множества можно рассматривать как «конечные приближения» функций $\alpha \times \omega \to \{0, 1\}$.

*Важно:* для любой СТМ $M$ имеем $\omega \in M$ и $\omega = \omega^M$. Однако даже если, например, $\omega_1 \in M$, нельзя утверждать, что $\omega_1 = \omega_1^M$. Если $M$ счётна, то все ординалы $\alpha \in M$ счётны.

**Предложение 5.** Пусть $\mathbb{P}$ — $\omega_2^M$-коэновское ч.у.м., $G \subset \mathbb{P}$ — любое $\mathbb{P}$-генерическое множество и $g = \bigcup G$. Тогда

1. $g \in M[G]$ (очевидно);
2. $g$ является функцией;

3. $\operatorname{dom} g = \omega_2^M \times \omega$;
4. если $\alpha, \beta \in \omega_2^M$ и $\alpha \neq \beta$, то существует $n \in \omega$, для которого $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$.

**Замечание 3.** Любая функция $g\colon \omega_2^M \times \omega \to \{0,1\}$ со свойством 4 порождает вложение $f\colon \omega_2^M \to \mathscr{P}(\omega)^{M[G]}$, определённое правилом

$$f(\alpha) = \{n \in \omega : g(\alpha, n) = 0\}.$$

*Доказательство предложения.* 2: Ясно, что $g \subset \omega_2^M \times \omega \times \{0,1\}$. Если бы множество $g$ не было функцией, то нашлись бы $p, q \in G$ и $(\alpha, n) \in \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q$ такие, что $p(\alpha, n) \neq q(\alpha, n)$, т.е. для которых не существовало бы функции $r \in P$, являющейся продолжением и функции $p$, и функции $q$. Однако поскольку любые два условия (элемента $G$) совместимы в $G$ (см. 2 в определении), такая функция $r$ обязана существовать.

3: Пусть $\alpha \in \omega_2^M$ и $n \in \omega$. Положим

$$D = \{p \in P : (\alpha, n) \in \operatorname{dom} p\}.$$

Очевидно, $D \in M$. Множество $D$ плотно: если $p \in P$, то либо $p \in D$, либо $d = p \cup \{((\alpha, n), 0)\} \in D$, причём $d \supset p$, т.е. $d \leq p$. По свойству 4 генерических множеств найдётся $q \in D \cap G$. Имеем $(\alpha, n) \in \operatorname{dom} q \subset \operatorname{dom} g$.
4: Пусть $\alpha < \beta < \omega_2^M$. Положим

$$D = \{p \in P : \exists n \in \omega \text{ такое, что } (\alpha, n), (\beta, n) \in \operatorname{dom} p \text{ и } p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}.$$

Очевидно, $D \in M$. Множество $D$ плотно. Действительно, если $p \in P$, то $\operatorname{dom} p$ конечно, а значит, существует $n \in \omega$, для которого пары $(\alpha, n)$ и $(\beta, n)$ не принадлежат $\operatorname{dom} p$. Положим

$$d = p \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 1)\}.$$

Имеем $d \leq p$ и $d \in D$.

Итак, $D$ плотно. Значит, существует $q \in D \cap G$. Имеем

$$g(\alpha, n) = q(\alpha, n) \neq q(\beta, n) = g(\beta, n).$$

■

Мы построили (в модели $M[G]$) функцию $g\colon \omega_2^M \times \omega \to \{0,1\}$, а значит, и вложение $f\colon \omega_2^M \to \mathscr{P}(\omega)^{M[G]}$. Тем самым мы доказали, что $\left|\mathscr{P}(\omega)^{M[G]}\right| \geq \left|\omega_2^M\right|$. Чтобы доказать совместимость $\neg$CH с ZFC, достаточно проверить, что

- $M[G]$ существует;
- $\omega_2^{M[G]} = \omega_2^M$.

Тогда мы сможем утверждать, что в некоторой модели $\omega_1 < 2^\omega$.

# Лекция 4. Имена и интерпретации. Определение генерического расширения модели ZFC как множества интерпретаций

## Имена и интерпретации

Пусть $\mathbb{P}$ — ч.у.м. в СТМ $M$. Мы будем обозначать $\mathbb{P}$-имена греческими буквами $\tau, \sigma, \pi, \ldots$.

**Определение 17 (основное).** Класс $\mathbb{P}$-*имён* определяется по рекурсии:

- $\varnothing$ — имя;
- множество $\tau$ — $\mathbb{P}$-имя, если $\tau$ — отношение (т.е. множество пар) и для любого $(\sigma, p) \in \tau$ $\sigma$ — $\mathbb{P}$-имя и $p \in P$.

По-другому:

- $V^{\mathbb{P}}_{\varnothing} = \varnothing$;
- $V^{\mathbb{P}}_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V^{\mathbb{P}}_{\alpha} \times P)$ для любого ординала $\alpha$;
- $V^{\mathbb{P}}_{\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} V^{\mathbb{P}}_{\beta}$ для любого предельного ординала $\alpha$;
- $V^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} V^{\mathbb{P}}_{\alpha}$.

*Множество* $M^{\mathbb{P}}$ $\mathbb{P}$-*имён* из $M$ — это $V^{\mathbb{P}} \cap M$.

**Определение 18 (упрощённое).** Множество $\tau$ — $\mathbb{P}$-*имя* из $M$, если $\tau \in M$ и $\tau \subset M \times P$.

**Определение 19 (основное).** Для $G \subset P$ $G$-*интерпретация* $\mathbb{P}$-*имён* — это отображение, которое каждому имени $\tau$ ставит в соответствие множество $\tau_G$. Определяется по рекурсии:

- $\varnothing_G = \varnothing$;
- $\{\tau_G = \{\sigma_G :$ существует $p \in G$, для которого $(\sigma, p) \in \tau\}$.

**Определение 20 (упрощённое).** $G$-*интерпретация* $\tau_G$ имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ — это множество

$$\tau_G = \{x \in M : \text{ существует } p \in G, \text{ для которого } (x, p) \in \tau\}.$$

**Определение 21.** *Генерическое расширение* $M[G]$ модели $M$ — это множество всех $G$-интерпретаций $\mathbb{P}$-имён из $M$: $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$.

**Замечание 4.** Множество $M[G]$ транзитивно. Если $N$ — любая транзитивная модель ZFC, для которой $M \subset N$ и $G \in N$, то $M[G] \subset N$.

**Пример 1.**

- $\varnothing \in M^{\mathbb{P}}$ и $\varnothing_G = \varnothing$ для любого $G$.
- Для $p \in P$ $\{(\varnothing, p)\} \in M^{\mathbb{P}}$ и

$$\{(\varnothing, p)\}_G = \begin{cases} \{\varnothing\}, & \text{если } p \in G, \\ \varnothing, & \text{если } p \notin G. \end{cases}$$

- Для любого имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ $\{(\tau, \mathbf{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ и $\{(\tau, \mathbf{1})\}_G = \{\sigma_G : \sigma \in \tau\}$. (Если принято простое определение, то $\{(x, \mathbf{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ для любого $x \in M$, и $\{(x, \mathbf{1})\}_G = x$.)

  Таким образом, каждому множеству $x$ канонически (независимо от $G$ и, по сути, от $\mathbb{P}$) соответствует имя
  $$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbf{1}) : y \in x\}.$$
  Это определение абсолютно, так что если $x \in M$, то $\check{x} \in M$. Кроме того, $\check{x}_G = x$ (доказывается $\in$-индукцией).

- $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in P\} \in M^{\mathbb{P}}$, $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$.

- $0 = \varnothing = \varnothing$.

- $1 = \{\varnothing\}$,  $1 = \{(\varnothing, \mathbf{1})\}$.

- $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,  $2 = \{(0, \mathbf{1}), (1, \mathbf{1})\} = \{(\varnothing, \mathbf{1}), ((\varnothing, \mathbf{1}), \mathbf{1})\}$.

# Свойства $M[G]$ для СТМ $M$

1. Для любого имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ $\operatorname{rank} \tau_G \leq \operatorname{rank} \tau$.

   (Доказывается простой $\in$-индукцией.)

2. Множества $M[G]$ и $M$ содержат одни и те же ординалы: $\mathrm{Ord}^{M[G]} = \mathrm{Ord}^{M}$.

3. Если модель $M$ счётна, то и $M[G]$ счётна.

*Доказательство.* Если $\alpha \in \mathrm{Ord}^{M[G]}$, то $\alpha = \tau_G$ для некоторого $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Свойство 1 $\Longrightarrow$ $\operatorname{rank} \alpha \leq \operatorname{rank} \tau$. Поскольку $\operatorname{rank} \alpha = \alpha$ для всякого ординала $\alpha$, имеем $\alpha \leq \operatorname{rank} \tau$. Определение ранга абсолютно $\Longrightarrow$ для любого $x \in M$ имеем $\operatorname{rank} x \in M$, так что $\operatorname{rank} \tau \in M$. Транзитивность $M$ и определение порядка на ординалах $\Longrightarrow$ $\alpha \in M$.

Включение $\mathrm{Ord}^{M} \subset \mathrm{Ord}^{M[G]}$ следует из того, что $M \subset M[G]$. ■

# Вынуждение (форсинг)

**Определение 22.** Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, $M$ — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество в $M$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — имена. Элементы $p \in P$ называются *условиями*. Говорят, что условие $p \in P$ *вынуждает* утверждение $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, и пишут
$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$
если для любого $\mathbb{P}$-генерического множества $G \ni p$ над $M$ имеем $M[G] \models \varphi(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})$ (т.е. верно $\varphi(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})^{M[G]}$).

Вместо $x_1, \ldots, x_n$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}$ будем писать $\vec{x}$, $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_G$.

**Теорема 13 (об определимости).** *Для любых $\varphi(\vec{x})$ и $\vec{\tau}$ и любого условия $p$ высказывание $p \Vdash \varphi(\vec{\tau})$ можно доказать или опровергнуть внутри $M$.*

**Теорема 14 (об истинности).** *Для любого истинного в $M[G]$ высказывания существует условие из $G$, которое его вынуждает.*

**Замечание 5.** Если $p, q \in P$, $p \le q$ и $p \Vdash \varphi(\tau)$, то $q \Vdash \varphi(\tau)$.

Отношение $\Vdash$ определено в классе $V$ всех множеств, а не в модели $M$, поскольку оно предполагает знание *всех* генерических множеств $G \subset P$. Мы определим другое отношение $\Vdash^*$ и покажем, что $p \Vdash \varphi(\tau)$ тогда и только тогда, когда $(p \Vdash \varphi^*(\tau))^M$.

**Пример 2.** Предположим, что $\tau_1 = \{(\pi_1, s)\}$, $\tau_2 = \{(\pi_2, s)\}$ и житель $M$ пытается понять, какие условия $p$ вынуждают $\tau_1 = \tau_2$.

Если $p \perp s$, то $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$, потому что $s \notin G$ для $G \ni p$, так что $\tau_{1G} = \tau_{2G} = \varnothing$ для всех $G \ni p$.

Если $p \le s$, то для любого $G \ni p$ имеем $\tau_{1G} = \{\pi_{1G}\}$ и $\tau_{2G} = \{\pi_{2G}\}$, так что $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \pi_1 = \pi_2$ (при условии, что $p \le s$). Можно показать, что $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда

$$\forall q \in P((q \le p) \wedge (q \le s) \to q \Vdash \pi_1 = \pi_2).$$

**Определение 23.** (Индукция по рангу имён и длине формул.) Пусть $\mathbb{P} = (P, \le, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество. Для любых $p \in P$, любых имён $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и любых формул $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$

1. $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, если
   ($\alpha$) $\forall (\pi_1, s_1) \in \tau_1\ \forall q \le p\ \exists r \le q\ ((r \le s_1) \to \exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2((r \le s_2) \wedge (r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)))$
   ($\beta$) $\forall (\pi_2, s_2) \in \tau_2\ \forall q \le p\ \exists r \le q\ ((r \le s_2) \to \exists (\pi_1, s_1) \in \tau_1((r \le s_1) \wedge (r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)))$.
2. $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$, если $\forall q \le p\ \exists r \le q$
$$\exists (\pi, s) \in \tau_2((r \le s) \wedge (r \Vdash^* \pi = \tau_1)).$$
3. $p \Vdash^* (\varphi(\vec{\tau}) \wedge \psi(\vec{\tau}))$, если $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$ и $p \Vdash^* \psi(\vec{\tau})$.
4. $p \Vdash^* \neg\varphi(\vec{\tau})$, если не существует $q \le p$ такого, что $q \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$.
5. $p \Vdash^* \exists x(\varphi(x, \vec{\tau})$, если для каждого $q \le p$ существуют условие $r \le q$ и имя $\sigma$, для которых $r \Vdash^* \varphi(\sigma, \vec{\tau})$.

**Лемма 3.** Если $E \in M$, $E \subset P$ и $G$ — генерическое множество, то

1. либо $G \cap E \ne \varnothing$, либо существует $q \in G$ такое, что $q \perp E$ (т.е. $q \perp r$ для всех $r \in E$);
2. если $p \in G$ и $E$ плотно ниже $p$, то $G \cap E \ne \varnothing$.

*Доказательство.* 1 вытекает из плотности множества

$$D = \{p \in P : \exists r \in E(p \le r)\} \cup \{q \in P : \forall r \in E(q \perp r)\}$$

и того, что любое генерическое множество пересекает все плотные множества, и что если $p \in G$ и $r \ge p$, то $r \in G$ (см. определение генерических множеств).

2: Пусть $G \cap E = \varnothing$. Пользуясь утверждением 1, зафиксируем $q \in G$, удовлетворяющее условию $q \perp E$. Пусть $q' \in G$, $q' \le q$, $q' \le p$ (оно существует, так как $G$ генерическое). Поскольку $E$ плотно ниже $p$, найдётся $r \in E$ такое, что $r \le q' \le q$. Получили противоречие. ■

**Лемма 4.** Для любого условия $p$ и любой формулы $\varphi(\vec{x})$ следующие утверждения равносильны:

1. $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$;
2. $\forall r \le p(r \Vdash^* \varphi(\tau^*)$;
3. $\forall q \le p\ \exists r \le q(r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))$.

*Доказательство.* Импликации 2⇒3 и 2⇒1 тривиальны. Чтобы доказать, что 1⇒2 и 3⇒1 для атомов, достаточно проанализировать определение отношения $\Vdash^*$ и определение генерического множества. Для составных формул применяется индукция по длине формулы (индуктивное предположение нужно только при рассмотрении формул вида $\varphi_1 \wedge \varphi_2$). ■

**Лемма 5.** Для любой формулы $\varphi(\vec{x})$, любого набора имён $\vec{\tau}$ и любого генерического множества $G$

1. $p \in G \wedge \big(p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})\big)^M \to \big(\varphi(\vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}$;
2. $\big(\varphi(\vec{\tau}_G)\big)^{M[G]} \to \exists p \in G\big((p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M\big)$.

*Доказательство.* Доказательство проводится индукцией по рангу имён для атомов и по длине формулы для сложных формул. Мы разберём только один ингредиент доказательства (это даст хорошее представление об остальных).

Проверим 1 для формулы $\tau_1 = \tau_2$. Пусть $p \in G$ и $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Надо показать, что $\tau_{1G} = \tau_{1G}$, т.е. $\tau_{1G} \subset \tau_{1G}$ и $\tau_{1G} \supset \tau_{1G}$. Докажем первое включение (второе аналогично).

Любой элемент интерпретации $\tau_{1G}$ имеет вид $\pi_{1G}$, где $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ для некоторого $s_1 \in G$. Надо показать, что $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$. Зафиксируем $q \in G$ такое, что $q \le p$ и $q \le s_1$. По лемме (2) имеем $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Множество тех $r \in P$, которые удовлетворяют условию в пункте 1 $(\alpha)$ определения отношения $\Vdash^*$, в котором $p$ заменено на $q$, плотно ниже $q$. По лемме (1) это множество пересекает $G$, т.е.

$$\exists r \in G\big((r{\le}q) \wedge \big((r{\le}s_1) \to \exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2((r{\le}s_2) \wedge (r \Vdash^* \pi_1{=}\pi_2))\big)\big)$$

(переписали $(\alpha)$ с $q$ вместо $p$ и $r \in G$ вместо любого $r$ $(\in P)$). Но $q \le s_1$; значит, для любого $r \le q$ имеем $r \le s_1$, так что нужное имя $(\pi_2, s_2)$ существует. Зафиксируем его.

Имеем $s_2 \in G$ (так как $s_2 \ge r \in G$). Следовательно, $\pi_{2G} \in \tau_{2G}$. Поскольку $\operatorname{rank}\pi_i < \operatorname{rank}\tau_i$, по индуктивному предположению $r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2 \to \pi_{1G} = \pi_{2G}$, откуда $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$. ■

# Лекция 5. Основные положения форсинга

**Теорема 15 (определимость + истинность).** Пусть $M$ — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество в $M$, $\varphi(\vec{x})$ — формула и $\vec{\tau}$ — набор имён из $M$. Тогда

1. для всякого $p \in P$ $\ p \Vdash \varphi(\vec{\tau}) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M$;
2. для всякого $\mathbb{P}$-генерического множества $G$ над $M$
$$\varphi(\vec{\tau}_G)^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\vec{\tau})).$$

*Доказательство.* 1, $\leftarrow$: из леммы (3) и определения $\Vdash$.

1, $\rightarrow$: лемма (2) $\implies$ достаточно показать, что $D = \{r \in P : (r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})\}$ плотно ниже $p$. Пусть это не так, и пусть $q \leq p$ таково, что $\neg\exists r \leq q(r \in D)$. По определению $\Vdash^*$ имеем $(q \Vdash^* \neg\varphi(\vec{\tau}))^M$. Доказанная импликация $\leftarrow$ $\implies$ $q \Vdash \neg\varphi(\vec{\tau})$. Если $G$ — генерическое множество и $q \in G$, то $(\neg\varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]}$, но $p \in G$ (так как $p \geq q$), откуда $(\varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]}$ — противоречие.

2, $\rightarrow$: из 1 и леммы (3) 2.

2, $\leftarrow$: из определения $\Vdash$. ∎

**Следствие 1.** Пусть $M$ — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — ч.у.м. в $M$ и $\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n$ — имена в $M$. Тогда

1. множество $\{p \in P : (p \Vdash \varphi(\vec{\tau})) \vee (p \Vdash \neg\varphi(\vec{\tau}))\}$ плотно в $P$;
2. $p \nVdash \neg\varphi(\vec{\tau}) \leftrightarrow \neg\exists q \leq p(q \Vdash \varphi(\vec{\tau}))$;
3. $p \Vdash \exists x\varphi(x, \vec{\tau}) \leftrightarrow \{r \leq p : \exists \pi \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau})\}$ плотно ниже $p$;
4. если $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x, \vec{\tau}))$, то $\exists q \leq p\ \exists \pi \in \operatorname{dom}(\sigma)(q \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau}))$.

*Доказательство.* Утверждения 1–3 верны для $\Vdash^*$ (по определению), значит, они верны и для $\Vdash$ (по основной теореме 1).

Докажем 4. Зафиксируем генерическое множество $G \ni p$. По определению $\Vdash$ найдётся $a \in \sigma_G$, для которого $(\varphi(a, \vec{\tau}))^{M[G]}$; имеем $a \in \pi_G$ для некоторого $\pi \in \operatorname{dom}(\sigma)$. По основной теореме 2 $\ \exists r \in G(r \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau}))$. Для $q \leq p$, $q \leq r$ имеем $q \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau})$. ∎

## ZFC в $M[G]$

*Аксиома существования: множества существуют.*

Выполнение в $M[G]$ очевидно.

*Аксиома объёмности: два множества равны $\iff$ каждый элемент одного из них принадлежит другому и наоборот.*

Выполнение в $M[G]$ вытекает из транзитивности $M[G]$.

*Аксиома регулярности: $X \neq \varnothing \implies$ существует $x \in X$ такой, что $X \cap x = \varnothing$.*

Из транзитивности.

*Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит в качестве элемента $\varnothing$ и вместе с каждым элементом $x$ содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$.*

$\omega = \check{\omega}_G \in M[G]$.

*Аксиома пары: для любых множеств $x$ и $y$ существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — $x$ и $y$.*

Поскольку $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$, достаточно показать, что для любых имён $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ найдётся имя $\text{ПАРА}(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$, которое всегда интерпретируется как $\{\sigma_G, \tau_G\}$. Оно определяется так:

$$\text{ПАРА}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbf{1}), (\tau, \mathbf{1})\}.$$

*Схема аксиом выделения: любому множеству $X$ и любому свойству $\varphi$ отвечает множество $Y$, состоящее в точности из тех элементов множества $X$, которые обладают свойством $\varphi$.*

Надо проверить, что для любых $\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ и любой формулы $\varphi(x, \vec{y})$ имеем $\big\{u \in \sigma_G : \big(\varphi(u, \vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}\big\} \in M[G]$. Положим

$$\rho = \{(\pi, p) \in \operatorname{dom}(\sigma) \times P : p \Vdash ((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi, \vec{\tau}))\}.$$

Из теоремы об определимости вытекает, что $\rho \in M$ (а значит, $\rho \in M^{\mathbb{P}}$). Покажем, что $\rho_G = \big\{u \in \sigma_G : \big(\varphi(u, \vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}\big\}$.

Любой элемент $\rho_G$ имеет вид $\pi_G$, где $(\pi, p) \in \rho$ для некоторого $p \in G$. По определению $p \Vdash \big((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi_G, \vec{\tau})^{M[G]}\big)$; значит, $\rho_G \subset \big\{u \in \sigma_G : \big(\varphi(u, \vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}\big\}$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in \sigma_G$ и $\varphi(u, \vec{\tau}_G)^{M[G]}$. Тогда $u = \pi_G$ для некоторого $\pi \in \operatorname{dom}(\sigma)$. Значит, $((\pi_G \in \sigma_G) \wedge \varphi(\pi_G, \vec{\tau}_G))^{M[G]}$. Любое высказывание, истинное в $M[G]$, вынуждается некоторым условием из $G \implies$ найдётся $p \in G$, для которого $p \Vdash ((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi, \vec{\tau}))$, так что $(\pi, p) \in \rho$, откуда $\pi_G \in \rho_G$.

*Аксиома объединения: для любого семейства множеств $\mathscr{F}$ существует множество $X = \bigcup \mathscr{F}$ — объединение семейства $\mathscr{F}$; его элементами являются в точности все элементы множеств-элементов семейства $\mathscr{F}$.*

Поскольку у нас уже есть аксиома выделения, достаточно проверить, что для любого $\mathscr{F} \in M[G]$ существует $X \in M[G]$ такое, что $\bigcup \mathscr{F} \subset X$, т.е. $(\forall Y \in \mathscr{F})(Y \subset X)$.

Пусть $\tau$ — имя и $\tau_G = \mathscr{F}$. Для $\pi = \bigcup \operatorname{dom}(\tau)$ имеем $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ и $X = \pi_G \in M[G]$. Пусть $Y \in \mathscr{F}$. Тогда $Y = \sigma_G$ для некоторого имени $\sigma \in \operatorname{dom}(\tau)$. Поскольку $\sigma \subset \pi$, имеем $Y = \sigma_G \subset \pi_G = X$.

*Аксиома множества подмножеств: для любого множества $X$ существует множество $Y$, состоящее из всех подмножеств множества $X$.*

Пусть $X = \tau_G \in M[G]$. Положим $\sigma = S \times \{\mathbf{1}\}$ для

$$S = \{\pi \in M^{\mathbb{P}} : \operatorname{dom}(\pi) \subset \operatorname{dom}(\tau)\} = \big(\mathscr{P}(\operatorname{dom}(\tau) \times P)\big)^M.$$

Зафиксируем имя $\rho$, для которого $\rho_G \subset \tau_G$. Покажем, что $\rho_G \in \sigma_G$. Положим

$$\mu = \{(\nu, p) : \nu \in \operatorname{dom}(\tau) \wedge p \Vdash \nu \in \rho\}.$$

Имеем $\mu \in S$, откуда $\mu_G \in \sigma_G$. Осталось показать, что $\rho_G = \mu_G$.

Покажем, что $\rho_G \subset \mu_G$. Поскольку $\rho_G \subset \tau_G$, любой элемент $\rho_G$ имеет вид $\nu_G$ для некоторого $\nu \in \operatorname{dom}(\tau)$, а поскольку $\nu_G \in \rho_G$, по теореме об истинности найдётся условие $p \in G$, для которого $p \Vdash \nu \in \rho$, так что $(\nu, p) \in \mu$ и $\nu_G \in \mu_G$.

Докажем обратное включение $\mu_G \subset \rho_G$. Любой элемент $\mu_G$ имеет вид $\nu_G$ для имени $\nu$ с тем свойством, что $(\nu, p) \in \mu$ для некоторого $p \in G$. Значит, $p \Vdash \nu \in \rho$ и $\nu_G \in \rho_G$.

*Схема аксиом подстановки: если $\varphi(x, y)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества $a$ существует единственное множество $b$ такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества $X$ определено множество $Y$, элементами которого являются те и только те множества $y$, для которых $\varphi(x, y)$ истинно при некотором $x \in X$.*

Пусть $X = \tau_G$, и пусть множество имён $S \in M$ таково, что

$$(\forall \pi \in \tau)(\forall p \in P)\big((\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}})(p \Vdash \varphi(\pi, \sigma)) \to (\exists \sigma \in S)(p \Vdash \varphi(\pi, \sigma))\big).$$

Существование множества $S$ следует из теоремы об определимости и общего *принципа отражения: для любой формулы $\varphi(x, y)$ и любого множества $S_0$ существует множество $S \supset S_0$ такое, что для всякого $x \in S$*

$$\exists y(\varphi(x, y)) \to (\exists y \in S)(\varphi(x, y)).$$

Множество $S$ строится так: для всякого множества $x$ положим $C_x = \{y : \varphi(x, y)\}$ (это класс) и для всякого множества $Y$ положим

$$\mathfrak{C}(Y) = Y \cup \bigcup_{x \in Y} \{y \in C_x : (\forall z \in C_x)(\operatorname{rank} y \leq \operatorname{rank} z)\}$$

(это множество). По рекурсии определяем $S_{n+1} = \mathfrak{C}(S_n)$ для $n \in \omega$. Множество $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ обладает нужными свойствами.

Пусть $\sigma = S \times \{\mathbf{1}\}$. Тогда $\sigma_G = \{\pi_G : \pi \in S\}$. Зафиксируем $x \in \tau_G$ и покажем, что найдётся $y = \rho_G \in \sigma_G$ такое, что $(\varphi(x, y))^{M[G]}$. По предположению $(\exists! y \varphi(\pi_G, y))^{M[G]}$, поэтому для некоторого имени $\rho$ имеем $(\varphi(\pi_G, \rho_G))^{M[G]}$, и по основной теореме 2 $(\exists p \in G)(p \Vdash \varphi(\pi, \rho))$. Следовательно,

$$(\exists \rho \in S)(p \Vdash \varphi(\pi, \rho)),$$

откуда $\rho_G \in \sigma_G$ и $(\varphi(\pi_G, \rho_G))^{M[G]}$.

Мы показали, что для всякого $x \in \tau_G = X$ найдётся $y \in \sigma_G$, для которого $\varphi(x, y)$. По предположению такой $y$ единствен. Применив аксиому выделения, получим требуемое множество $Y \subset \sigma_G$.

*Аксиома выбора.* По теореме Цермело аксиома выбора равносильна утверждению, что *на каждом множестве существует отношение полного порядка.*

Существование полного порядка на множестве $X$ равносильно существованию ординала $\alpha$ и отображения $f\colon \alpha \overset{\text{на}}{\to} X$. Действительно, если они существуют, то отображение $g\colon X \to \alpha$, определённое правилом $g(x) = \min\{f^{-1}(x)\}$, инъективно, и полный порядок на $X$ можно определить правилом $x \leq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$.

Зафиксируем $X = \tau_G \in M[G]$. Пользуясь тем, что аксиома выбора верна в $M$, перенумеруем элементы $\operatorname{dom}(\tau)$ посредством принадлежащей $M$ биекции $f\colon \alpha \to \operatorname{dom}(\sigma)$ ($\alpha$ — ординал):

$$\operatorname{dom}(\tau) = \{\pi_\gamma : \gamma < \alpha\},$$

где $\pi_\gamma = f(\gamma)$. Положим

$$\sigma = \{\text{ПАРА}(\check{\gamma}, \pi_\gamma) : \gamma < \alpha\} \times \{\mathbf{1}\}.$$

Имеем $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ и $\sigma_G = \{(\gamma, \pi_{\gamma G}) : \gamma < \alpha\}$, так что $\sigma_G$ — отображение, $\operatorname{dom}(\sigma_G) = \alpha$ и $\tau_G \subset \operatorname{ran}(\sigma_G)$.

# Первая теорема о сохранении кардиналов

Пусть $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество.

**Определение 24.** Множество $A \subset P$ называется *антицепью*, если оно состоит из попарно несовместимых элементов. Множество $C \subset P$ называется *цепью*, если отношение $\leq$ индуцирует на нём линейный порядок.

В следующем определении слово «цепей» следовало бы заменить на «антицепей», но по устоявшейся традиции говорят именно о цепях.

**Определение 25.** Говорят, что ч.у.м. $\mathbb{P}$ удовлетворяет *условию счётности цепей (у.с.ц.)*, если $\mathbb{P}$ не содержит несчётных антицепей.

**Теорема 16 (первая теорема о сохранении кардиналов).** Пусть $M$ — СТМ и $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м. и $\kappa \in M$. Если

$$M \models (\kappa \text{ — кардинал и } \mathbb{P} \text{ удовлетворяет у.с.ц.}),$$

то $\mathbf{1} \Vdash (\check{\kappa}$ — кардинал), т.е. $\kappa$ остаётся кардиналом в $M[G]$ для любого генерического множества $G \subset P$.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть $G \subset P$ — генерическое множество и функция $f \in M[G]$ отображает некоторый ординал $\lambda < \kappa$ на $\kappa$. Тогда $f = \varphi_G$ для некоторого имени $\varphi$. По теореме об истинности для некоторого $p \in G$ имеем $p \Vdash (\varphi$ — функция из $\lambda$ на $\kappa)$.

Рассуждаем в $M$. Для каждого $\alpha < \lambda$ положим

$$A_\alpha = \{\beta < \kappa : \exists q \leq p (q \Vdash \varphi(\alpha) = \beta)\}.$$

Это множество действительно можно определить в $M$:

$$A_\alpha = \{\beta < \kappa : \exists q \leq p (q \Vdash^* \text{ПАРА}(\alpha, \beta) \in \varphi)\}.$$

Множество $A_\alpha$ можно представлять себе как совокупность всех возможных значений $\varphi(\alpha)$ при разных интерпретациях.

Для каждого $\beta \in A_\alpha$ выберем условие $q(\beta) \leq p$, вынуждающее $\varphi(\alpha) = \beta$. Для $\beta \neq \gamma$ условия $q(\beta)$ и $q(\gamma)$ несовместимы. Действительно, если $r \leq q(\beta)$ и $r \leq q(\gamma)$, то

$$r \Vdash (\varphi \text{ — функция из } \lambda \text{ на } \kappa) \wedge (\varphi(\alpha) = \beta) \wedge (\varphi(\alpha) = \gamma).$$

Из того, что $\mathbb{P}$ удовлетворяет у.с.ц. в $M$, следует, что $|A_\alpha|^M \leq \omega$ для каждого $\alpha < \lambda$. Положим $A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. Имеем $|A|^M \leq \omega$.

Возьмём любой ординал $\beta < \kappa$. В $M[G]$ имеем $\beta = f(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \lambda$. По теореме об истинности существует $q \in G$, для которого $q \Vdash (\varphi(\alpha) = \beta)$, причём можно считать, что $q \leq p$. Это означает, что $\beta \in A_\alpha \subset A$. Значит, $\kappa \subset A$. Из абсолютности отношения $\subset$ и того, что $\kappa, A \in M$, получаем $|A|^M \geq \kappa$. Противоречие. ∎

## Как это работает

**Предложение 6.** $\alpha$-коэновское ч.у.м. $\mathbb{P}$ удовлетворяет условию счётности цепей для любого ординала $\alpha$.

*Доказательство.* Предположим, что в $\alpha$-коэновском ч.у.м. $\mathbb{P}$ есть несчётная антицепь $A$. Для каждого конечного множества $F \subset \alpha \times \omega$ множество функций $F \to \{0, 1\}$ конечно. Значит, семейство $\mathscr{F} = \{\mathrm{dom}(p) : p \in A\}$ несчётно.

По лемме о $\Delta$-системе найдутся несчётное подсемейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ и конечное множество $R \subset \alpha \times \omega$ такие, что $\mathscr{F}'$ — $\Delta$-система с корнем $R$, т.е. $F' \cap F'' = R$ для любых различных $F', F'' \in \mathscr{F}'$. Поскольку число разных функций $R \to \{0, 1\}$ конечно, можно подобрать $p, q \in A$, для которых $\mathrm{dom}(p) \neq \mathrm{dom}(q)$, $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = R$ и $p|_R = q|_R$. Функция $r = p \cup q$ продолжает как $p$, так и $q$, т.е. $r \leq p$ и $r \leq q$ в $\mathbb{P}$ в противоречие с тем, что $A$ — антицепь. ∎

**Определение 26.** Семейство множеств $\mathscr{F}$ называется *$\Delta$-системой*, если существует множество $R$ такое, что $A \cap B = R$ для любых различных $A, B \in \mathscr{F}$. Множество $R$ называется *корнем* $\Delta$-системы $\mathscr{F}$.

**Лемма 6 (О $\Delta$-системе).** Любое несчётное семейство $\mathscr{F}$ конечных множеств содержит несчётную $\Delta$-систему.

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что все множества в $\mathscr{F}$ имеют одинаковую мощность $n$ и что все они — подмножества $\omega_1$.

Индукция по $n$. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Если существует $\alpha \in \omega_1$, для которого семейство
$$\mathscr{F}_\alpha = \{F \in \mathscr{F} : \min F = \alpha\}$$
несчётно, то надо рассмотреть
$$\mathscr{F}'' = \{F \setminus \{\alpha\} : F \in \mathscr{F}_\alpha\}$$
и применить индуктивное предположение. Если $\tilde{\mathscr{F}}'' \subset \mathscr{F}''$ — несчётная $\Delta$-система и $R''$ — её корень, то $\{F \cup \{\alpha\} : F \in \tilde{\mathscr{F}}''\} \subset \mathscr{F}$ — несчётная $\Delta$-система с корнем $R'' \cup \{\alpha\}$.

В противном случае по трансфинитной рекурсии легко построить отображение $f\colon \omega_1 \to \mathscr{F}$ такое, что
$$\left(\bigcup\nolimits_{\beta<\alpha} f(\beta)\right) \subset \min f(\alpha)$$
для всех $\alpha < \omega_1$. В этом случае $\mathscr{F}' = \{f(\alpha) : \alpha < \omega_1\} \subset \mathscr{F}$ — несчётная $\Delta$-система с корнем $R = \varnothing$. ■

## Совместимость континуум-гипотезы

Истинность CH в модели $M$ означает, что существует функция $f \in M$ из $\omega_1^M$ на $\mathscr{P}^M(\omega)$.

**Определение 27.** *Антикоэновским частично упорядоченным множеством* называется множество
$$P = \{p : p \text{ — частичная функция из } \omega_1 \text{ в } \mathscr{P}(\omega),\ |\operatorname{dom}(p)| \le \omega\},$$
упорядоченное обратно включению.

В антикоэновском ч.у.м. наибольший элемент $\mathbf{1}$ — это пустая функция.

# Лекция 6. Доказательство основных положений форсинга. Гипотеза Суслина о существовании линейно упорядоченного несепарабельного топологического пространства со свойством Суслина

**Предложение 7.** Пусть $\mathbb{P} \in M$ — антикоэновское ч.у.м., $G \subset \mathbb{P}$ — любое $\mathbb{P}$-генерическое множество и $g = \bigcup G$. Тогда $g \in M[G]$ и $g$ является сюръективной функцией из $\omega_1^M$ на $\mathscr{P}^M(\omega)$.

*Доказательство.* Любые два элемента $G$ совместимы $\iff$ любые две функции из $G$ имеют общее продолжение $\iff$ для любого $\alpha \in \omega_1$ и любых $p, q \in G$ имеем $p(\alpha) = q(\alpha)$ $\iff$ $g = \bigcup G$ — отображение из (подмножества) $\omega_1$ в $\mathscr{P}^M(\omega)$.

Пусть $\alpha \in \omega_1$. Множество

$$D = \{p \in P : \alpha \in \operatorname{dom} p\}$$

плотно в $P$ (для любого $q \in P$ либо $\alpha \in \operatorname{dom} q$, и тогда $q \in D$, либо $\alpha \notin \operatorname{dom} q$, и тогда $p = q \cup \{(\alpha, \varnothing)\} \in D$ и $p \leq q$). Значит, $G \cap D \neq \varnothing$, т.е. $G$ содержит функцию, определённую в точке $\alpha$ $\implies$ отображение $g$ определено в точке $\alpha$.

Пусть $N \in M$, $N \subset \omega$. Множество

$$D = \{p \in P : N \in \operatorname{ran} p\}$$

плотно в $P$ (для любого $q \in P$ существует $\alpha \notin \operatorname{dom} q$; имеем $p = q \cup \{(\alpha, N)\} \in D$ и $p \leq q$). Значит, $G \cap D \neq \varnothing$, т.е. $G$ содержит функцию, принимающую значение $N$ в некоторой точке $\implies$ отображение $g$ принимает значение $N$ в некоторой точке $\implies$ $g \colon \omega_1^M \to \mathscr{P}^M(\omega)$ сюръективно. ■

Чтобы доказать, что $M[G] \models \mathrm{CH}$ (т.е. что CH истинна в $M[G]$), надо проверить, что

$$\mathscr{P}^{M[G]}(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega) \quad \text{и} \quad \omega_1^M \text{ — кардинал в } M[G].$$

**Определение 28.** Частично упорядоченное множество $\mathbb{P}$ называется *$\omega$-замкнутым*, если для любой невозрастающей последовательности $(p_n)_{n\in\omega}$ условий из $P$ найдётся $p \in P$ такое, что $p \leq p_n$ для всех $n \in \omega$.

Очевидно, антикоэновское множество $\omega$-замкнуто.

**Теорема 17 (о сохранении функций).** Пусть $M$ — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м., $M \models (\mathbb{P}\ \omega\text{-замкнуто})$, $G$ — генерическое множество, $X \in M$ и $f \in M[G]$ — функция $\omega \to X$. Тогда $f \in M$.

*Доказательство.* Пусть $f \in M[G]$ — функция $\omega \to X$. Предположим, что $f \notin X^\omega \cap M$. Зафиксируем имя $\tau$, для которого $f = \tau_G$, и условие $p \in P$ такое, что

$$p \Vdash \tau \text{ — функция } \omega \to X \text{ и } \tau \notin (X^\omega).$$

Рассуждаем в $M$. По индукции построим последовательности $(p_n)_{n\in\omega}$ условий из $P$ и $(x_n)_{n\in\omega}$ точек из $X$ так, что

- $p_0 = p$,
- $p_{n+1} \leq p_n$ для $n \in \omega$,
- $p_{n+1} \Vdash \tau(n) = x_n$ для $n \in \omega$.

На $n$-м шаге точка $x_n$ и условие $p_{n+1}$ строятся так: поскольку $p_n \Vdash (\tau$ — функция $\omega \to X)$, имеем $p \Vdash \exists \pi \in X(\tau(n) = \pi)$. Поскольку все имена $\pi \in X$ имеют вид $x$ для $x \in X$, в силу следствия из основной теоремы, пункт 4, существуют $x_n \in X$ и $p_{n+1} \in P$, для которых $p_{n+1} \Vdash \tau(n) = x_n$.

Получили последовательность $g = (x_n)_{n\in\omega} = \{(n, x_n) : n \in \omega\} \in M$.

Это функция $\omega \to X$. $\mathbb{P}$ $\omega$-замкнуто $\implies$ $\exists\, p_\omega \in P$ такое, что $p_\omega \le p_n$ для $n \in \omega$. Для любого генерического множества $G' \ni p_\omega$ и любого $n \in \omega$ имеем $\tau_{G'}(n) = x_n$, откуда $\tau_{G'} = g \in X^\omega = (X^\omega)_{G'}$ в противоречие с предположением, что $p_0 \Vdash \tau \notin (X^\omega)$.

■

**Следствие 2.** Пусть $M$ — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м., $M \models (\mathbb{P}$ $\omega$-замкнуто$)$ и $G$ — генерическое множество. Тогда

1. $\mathscr{P}^{M[G]}(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega)$;
2. $\omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$.

*Доказательство.* 1. Если $A \in \mathscr{P}^{M[G]}(\omega) \setminus \mathscr{P}^M(\omega)$, то характеристическая функция $\chi_A \colon \omega \to \{0,1\}$ — контрпример к теореме.

2. Очевидно. ■

# Гипотеза Суслина

Пусть $(X, \le)$ — линейно упорядоченное множество, и пусть $L, R \subset X$, причём $L \cup R = X$ и $L < R$ (т.е. $x < y$ для любых $x \in L$ и $y \in R$). Пара $L, R$ называется

- *скачком*, если существуют $\max L \in L$ и $\min R \in R$;
- *дедекиндовым сечением*, если не существует $\min R$;
- *щелью*, если не существуют $\min R$ и $\max L$.

Пусть $(L, R)$ и $(L', R')$ — дедекиндовы сечения. Будем писать $(L, R) \le (L', R')$, если $L \subset L'$. Множество $\widehat{X}$ всех дедекиндовых сечений, так упорядоченное, не содержит щелей и содержит $X$ (каждый элемент $X$ отождествляется с $(L_x, R_x)$, где $L_x = \{y \in X : y \le x\}$ и $R_x = \{y \in X : x < y\}$). При этом $X$ *плотно* в $\widehat{X}$, т.е. любой непустой интервал в $\widehat{X}$ содержит точку из $X$. Множество $\widehat{X}$ называется *дедекиндовым пополнением* линейно упорядоченного множества $X$.

Линейно упорядоченное множество $X$ *связно*, если в нём нет скачков и щелей. Дедекиндово пополнение любого множества, в котором нет скачков, связно.

На каждом линейно упорядоченном множестве $(X, \le)$ естественно возникает *порядковая топология* $\mathscr{T}$: множество открыто $\iff$ оно является объединением произвольного семейства открытых интервалов. Множество $Y \subset X$ плотно в $X$ относительно этой топологии (т.е. его замыкание $\operatorname{cl} Y$ совпадает с $X$) $\iff$ $Y$ плотно в $X$ в смысле порядка. Топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ связно (т.е. его нельзя представить как объединение непересекающихся непустых открытых множеств) $\iff$ $(X, \le)$ связно в смысле порядка.

Вещественная прямая $\mathbb{R}$ — дедекиндово пополнение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Она связна и *сепарабельна* (т.е. содержит счётное всюду плотное множество). Кроме того, в $\mathbb{R}$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Хорошо известно и нетрудно показать, что всякое линейно упорядоченное множество, которое

- не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента,
- связно,

- сепарабельно

порядково изоморфно прямой $\mathbb{R}$.

**Определение 29.** Топологическое пространство обладает *свойством Суслина*, если в нём всякое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счётно.

**Замечание 6.**
1. Всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина.
2. Топология $\mathscr{T}$ (семейство всех открытых множеств) любого топологического пространства $X$ частично упорядочена отношением $\subset$. Пространство $X$ обладает свойством Суслина $\iff$ $\mathscr{T}$ удовлетворяет условию счётности цепей.

**Определение 30.** *Прямая Суслина* — это несепарабельное линейно упорядоченное пространство со свойством Суслина.

*Гипотеза Суслина* — это утверждение «прямых Суслина не существует». Обозначение: *SH*.

## Топологические произведения

*Декартово произведение семейства* множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ определяется так:

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall\alpha \in A(f(\alpha) \in X_\alpha)\}.$$

Элемент $f\colon A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ принято записывать не в виде отображения, а в специальном виде $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого $\alpha$. При этом $x_\alpha$ называется *$\alpha$-й координатой* элемента $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

*Канонической проекцией* произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ на сомножитель $X_\beta$, где $\beta \in A$, называется отображение $\pi_\beta\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

На декартовом произведении $X \times Y$ двух топологических пространств имеется естественная *топология произведения* — в ней открыты всевозможные объединения множеств вида

$$U \times V, \qquad \text{где } U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y.$$

*Топологическим произведением*, или просто *произведением*, двух топологических пространств называется их декартово произведение с этой топологией.

*Тихоновская топология*, или *топология произведения*, на декартовом произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ произвольного семейства топологических пространств — это самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны.

Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются *топологическими*, или *тихоновскими, произведениями*. Открытые множества — всевозможные объединения множеств вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое $U_\alpha$ — открытое подмножество $X_\alpha$ и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов $\alpha$.

В теории категорий произведение объектов $X_\alpha$, $\alpha \in A$, определяется как объект $X$ вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта $Y$ этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f\colon Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha \colon Y \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

**Теорема 18 (Хьюитт–Марчевский–Пондицери).** Произведение непустых неодноточечных топологических пространств $X_\alpha$, $\alpha \in A$, сепарабельно $\iff$ все $X_\alpha$ сепарабельны и $|A| \le 2^\omega$.

**Теорема 19.** Если семейство пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ таково, что для любого конечного множества индексов $F \subset A$ произведение $X = \prod\limits_{\alpha\in F} X_\alpha$ обладает свойством Суслина, то и всё произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ обладает этим свойством.

*Доказательство.* Пусть $\{W_\iota\}$ — несчётное семейство непустых открытых множеств в $X$. Имеем $W_\iota \supset \prod U^\iota_\alpha \ne \varnothing$, где $U^\iota_\alpha = X_\alpha$ для всех $\alpha \notin F_\iota$, $F_\iota \subset A$ конечно. Пусть $R$ — корень несчётной $\Delta$-системы, содержащейся в $\{F_\iota\}$. Произведение $\prod\limits_{\alpha\in R} X_\alpha$ со свойством Суслина $\implies$ существуют $\iota' \ne \iota''$ такие, что $F_{\iota'}$ и $F_{\iota''}$ попали в $\Delta$-систему и $\prod\limits_{\alpha\in R} U^{\iota'}_\alpha \cap \prod\limits_{\alpha\in R} U^{\iota''}_\alpha \ne \varnothing$. Поскольку $(F_{\iota'} \setminus R) \cap (F_{\iota''} \setminus R) = \varnothing$, имеем $W_{\iota'} \cap W_{\iota''} \ne \varnothing$. ■

**Предложение 8.** Квадрат прямой Суслина не обладает свойством Суслина.

*Доказательство.* Пусть $(X, \le)$ — прямая Суслина. Индукцией по $\alpha$ найдём точки $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$, $\alpha < \omega_1$, со свойствами

1. $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$;
2. $(a_\alpha, b_\alpha) \ne \varnothing$ и $(b_\alpha, c_\alpha) \ne \varnothing$;
3. $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\beta : \beta < \alpha\} = \varnothing$.

Пусть $I$ — множество всех изолированных точек в $X$. Оно счётно, так как $X$ обладает свойством Суслина и $\{x\}$ открыто для каждого $x \in I$. Выберем любые $a_0, b_0, c_0 \in X$ со свойствами 1 и 2.

Пусть $\alpha < \omega_1$ и $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ уже построены для всех $\beta < \alpha$. $X$ не сепарабельно $\implies$ множество $X \backslash \mathrm{cl}\, I \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ содержит непустой интервал $(a_\alpha, c_\alpha)$.

Он бесконечен (изолированные точки исключены) $\implies$ $\exists\, b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ со свойством 2.

Множества $(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$ непусты, открыты и попарно не пересекаются: если $\beta < \alpha$, то либо $b_\beta \le a_\alpha$, либо $b_\beta \ge c_\alpha$, т.е. либо $(a_\beta, b_\beta) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \varnothing$), либо $(b_\beta, c_\beta) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \varnothing$. ■

**Предложение 9.** Если существует прямая Суслина, то существует и прямая Суслина, которая

1. не имеет скачков (т.е. $(a, b) \ne \varnothing$ для $a < b$) и
2. не содержит сепарабельных открытых подмножеств.

*Идея доказательства.* Взяв любую прямую Суслина $(X, \le)$, определим отношение эквивалентности $\sim$ на $X$, полагая $x \sim y \iff$ интервал $(x, y)$ сепарабелен.

Каждый класс эквивалентности $[x]_\sim$ — выпуклое множество, т.е. если $y, z \in [x]_\sim$ и $y < z$, то $(y, z) \subset [x]_\sim$. Поэтому на множестве классов эквивалентности определён естественный порядок: $[x]_\sim \leq_\sim [y]_\sim \iff x \leq y$ (он не зависит от выбора представителей $x$ и $y$).

Факторпространство $X/\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ с порядком $\leq_\sim$ — прямая Суслина с нужными свойствами. ■

**Следствие 3.** Если существует прямая Суслина, то существует линейно упорядоченное множество, которое

- не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента,
- связно,
- обладает свойством Суслина

и не изоморфно прямой $\mathbb{R}$.

Этими свойствами обладает дедекиндово пополнение прямой Суслина из предыдущей теоремы, из которого выкинули наименьший и наибольший элементы (если они есть).

# Аксиома Мартина

**Определение 31.** Пусть $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество и $\mathscr{D}$ — любое семейство его подмножеств. Множество $F \subset P$ называется *$\mathscr{D}$-генерическим фильтром*, если

1. $\mathbf{1} \in F$;
2. для любых $p, q \in F$ существует $r \in F$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
3. если $p \in F$, $q \in P$ и $p \leq q$, то $q \in F$;
4. $F \cap D \neq \varnothing$ для любого $D \in \mathscr{D}$.

**Аксиома Мартина.** *Для любого ч.у.м. $\mathbb{P}$, удовлетворяющего условию счётности цепей, и любого семейства $\mathscr{D}$ плотных подмножеств $P$ мощности $|\mathscr{D}| < 2^\omega$ существует $\mathscr{D}$-генерический фильтр.*

**Замечание 7.** CH $\implies$ MA

**Определение 32.** Семейство множеств назвается *центрированным*, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

**Теорема 20 (MA + ¬CH).** Пусть $X$ — топологическое пространство со свойством Суслина и $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых подмножеств $X$. Тогда найдётся несчётное множество $A \subset \omega_1$, для которого семейство $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ центрировано.

*Доказательство.* Для каждого $\alpha < \omega_1$ положим $V_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma > \alpha} U_\gamma$. Для любых $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega$ имеем $V_{\alpha_1} \supset V_{\alpha_2}$. Существует $\alpha_0 < \omega_1$ такое, что

$$\forall \beta > \alpha_0 (\overline{V}_\beta = \overline{V}_{\alpha_0}) \tag{$\star$}$$

(черта сверху — замыкание). Действительно, в противном случае мы могли бы найти возрастающую несчётную последовательность ординалов $(\alpha_\xi)_{\xi < \omega_1}$ такую, что $\operatorname{cl} V_{\alpha_{\xi+1}} \neq \operatorname{cl} V_{\alpha_\xi}$, т.е. $V_{\alpha_\xi} \setminus \operatorname{cl} V_{\alpha_{\xi+1}} \neq \varnothing$, для каждого $\xi$. Множества $V_{\alpha_\xi} \setminus \operatorname{cl} V_{\alpha_{\xi+1}}$ открыты и попарно не пересекаются. Свойство Суслина $\implies$ все они, кроме счётного числа, должны быть пустыми.

Зафиксируем $\alpha_0 < \omega_1$, для которого выполнено условие $(\star)$, и положим

$$P = \{p \subset V_{\alpha_0} : p \text{ открыто и } p \neq \varnothing\}.$$

Упорядочим $P$ по включению. Максимальный элемент $\mathbf{1}$ — это $V_{\alpha_0}$. $\mathbb{P}$ удовлетворяет у.с.ц., так как $X$ обладает свойством Суслина. Для $\alpha < \omega_1$ положим

$$D_\alpha = \{p \in P : \exists \beta > \alpha (p \subset U_\beta)\}.$$

Множество $D_\alpha$ плотно: если $p \in P$, то $p \cap V_\alpha \neq \varnothing$ в силу $(\star)$, и из того, что $V_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma > \alpha} U_\gamma$, следует, что $p \cap U_\gamma \neq \varnothing$ для некоторого $\gamma > \alpha$. Имеем $p \cap U_\gamma \in D_\alpha$ и $p \cap U_\gamma \leq p$.

Положим $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. $\neg$CH $\implies$ $\omega_1 < 2^\omega$. MA $\implies$ $\exists\, \mathscr{D}$-генерический фильтр $F$ (семейство открытых подмножеств $X$). Семейство $F$ центрировано, так как любые два $p, q \in F$ совместимы в $F$, т.е. их пересечение содержит элемент $F$. Положим

$$A = \{\beta < \omega_1 : \exists p \in F (p \subset U_\beta)\}.$$

$F$ центрировано $\implies$ $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. $F$ пересекает все $D_\alpha$ $\implies$ $A$ неограничено в $\omega_1$, а значит, несчётно. ∎

**Следствие 4 (MA + $\neg$CH).** Топологическое произведение любого семейства пространств со свойством Суслина обладает свойством Суслина.

*Доказательство.* В силу теоремы о свойстве Суслина топологического произведения, все конечные подпроизведения которого обладают свойством Суслина, достаточно проверить, что если $X$ и $Y$ — два топологических пространства со свойством Суслина, то $X \times Y$ обладает свойством Суслина.

Пусть $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых множеств в $X \times Y$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ выберем непустые открытые множества $U_\alpha$ в $X$ и $V_\alpha$ в $Y$, удовлетворяющие условию $U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Пользуясь теоремой, найдём несчётное $A \subset \omega_1$, для которого $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. Семейство $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ не может состоять из попарно непересекающихся множеств, так как $Y$ обладает свойством Суслина. Пусть $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ и $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. Поскольку $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ (в силу центрированности), имеем

$$W_\alpha \cap W_\beta \supset (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) \neq \varnothing.$$

∎

**Следствие 5 (MA + $\neg$CH).** Прямых Суслина не существует.

**Теорема 21.** Аксиома Мартина равносильна утверждению:

> Если $X$ — любой компакт со свойством Суслина и $\mathscr{U}$ — любое семейство всюду плотных открытых подмножеств $X$ мощности $|\mathscr{U}| < 2^\omega$, то $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

**Теорема 22.** MA $\implies$ всякое подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$, являющееся объединением $< 2^\omega$ нигде не плотных множеств, является множеством первой категории в $\mathbb{R}$.

**Теорема 23.** MA $\implies$ в любом компакте мощности $< 2^\omega$ всякая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

### Проблема Уайтхеда

Назовём *группой Уайтхеда* абелеву группу $A$ такую, что если $B$ — любая другая абелева группа и существует эпиморфизм $f\colon B \to A$ с ядром, изоморфным $\mathbb{Z}$, то существует гомоморфизм $h\colon A \to B$, для которого $f \circ h = \mathrm{id_A}$.

Хорошо известно, что всякая свободная абелева группа является группой Уайтхеда.
*Проблема Уайтхеда:* верно ли обратное?

В модели Гёделя $V = L$ всякая группа Уайтхеда свободна, в MA + ¬CH существуют несвободные группы Уайтхеда (Шелах).

# Лекция 7. Комбинаторные следствия аксиомы Мартина

## Непротиворечивость MA и CH

Существует модель ZFC, в которой истинны MA и $\neg$CH. Идея построения:

Пусть $M$ — счётная СТМ, $M \models 2^\omega = \omega_2$, и пусть $\mathbb{P}, \mathscr{D} \in M$. Будем говорить, что пара $(\mathbb{P}, \mathscr{D})$ — *контрпример для MA* в $M$, если

$$M \models (\mathbb{P} \text{ — ч.у.м., удовлетворяющее у.с.ц.,}$$

$$\mathscr{D} \text{ — семейство плотных подмножеств } P,\ |\mathscr{D}| = \omega_1$$

$$\text{и не существует } \mathscr{D}\text{-генерического фильтра в } M).$$

$M \models \text{MA} \iff$ в $M$ нет контрпримеров для MA.

Если $(\mathbb{P}, \mathscr{D}) \in M$ — контример для MA и множество $G$ $\mathbb{P}$-генерическое, то тем более $G$ является $\mathscr{D}$-генерическим фильтром, так что в $M[G]$ пара $(\mathbb{P}, \mathscr{D})$ уже не является контрпримером, причём поскольку $\mathbb{P}$ удовлетворяет условию счётности цепей, в $M$ и $M[G]$ одни и те же кардиналы, так что $M[G] \models \neg$CH. Многократно (бесконечное число раз) применяя генерическое расширение, можно «убить» все контрпримеры для MA. При этом приходится следить, чтобы при расширениях не появлялись новые контрпримеры.

## Комбинаторные следствия аксиомы Мартина

### Малые несчётные кардиналы

- Множество $A$ *почти содержится* во множестве $B$, если $A \setminus B$ конечно. Обозначение: $A \subset^* B$.
- Семейство множеств $\mathscr{F}$ *центрировано* (*сильно центрировано*), если для любых $F_1, \ldots, F_k \in \mathscr{F}$ пересечение $F_1 \cap \cdots \cap F_k$ непусто (бесконечно).
- *Псевдопересечением* семейства множеств $\mathscr{F}$ называется бесконечное множество $A$ такое, что $A \subset^* F$ для всех $F \in \mathscr{F}$.
- Семейство $\mathscr{S}$ подмножеств $\omega$ называется *расщепляющим*, если для любого бесконечного множества $A \subset \omega$ найдётся $S \in \mathscr{S}$ такое, что $|A \cap S| = |A \setminus S| = \omega$.
- Семейство множеств *почти дизъюнктно*, если все попарные пересечения его элементов конечны.
- Порядок $\leq^*$ на множестве $\omega^\omega$ функций $\omega \to \omega$ определяется так: $f \leq^* g$, если множество $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ конечно.
- Множество $X \subset \omega^\omega$ *ограничено*, если $\exists g \in \omega^\omega \forall f \in X (f \leq^* g)$.
- Множество $X \subset \omega^\omega$ *доминирующее*, если $\forall f \in \omega^\omega \exists g \in X (f \leq^* g)$.

**Определение 33.** Семейство всех бесконечных подмножеств $\omega$ обозначается $[\omega]^\omega$.

- $\mathfrak{a} = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset [\omega]^\omega$ — максимальное бесконечное почти дизъюнктное семейство$\}$
- $\mathfrak{b} = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subset \omega^\omega\ \leq^*\text{-неограничено}\}$
- $\mathfrak{d} = \min\{|\mathscr{D}| : \mathscr{D} \subset \omega^\omega\ \leq^*\text{-доминирующее}\}$

- $\mathfrak{s} = \min\{|\mathscr{S}| : \mathscr{S} \subset [\omega]^\omega$ — расщепляющее семейство$\}$
- $\mathfrak{p} = \min\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P} \subset [\omega]^\omega$ сильно центрировано,
  но не имеет псевдопересечения$\}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathfrak{b} & \leqslant & \begin{matrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{d}\end{matrix} & \leq & 2^\omega\\
 & & & \rotatebox{30}{$\leqslant$} & & \rotatebox{30}{$\leqslant$} & & & \\
\omega_1 & \leq & \mathfrak{p} & \leqslant & \mathfrak{s} & & & &
\end{array}$$

Понятно, что в предположении CH все эти кардиналы совпадают и равны $2^\omega$.

**Теорема 24 (Booth).** MA $\implies \mathfrak{p} = 2^\omega$.

*Доказательство.* Пусть $\kappa < 2^\omega$ — бесконечный кардинал и $\mathscr{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset [\omega]^\omega$ — сильно центрированное семейство. Пусть $P = \{(s, E) : s \subset \omega$ конечно, $E \subset \kappa$ конечно$\}$, и пусть

$$(s, E) \leq (t, F) \iff (t \subset s) \wedge (F \subset E) \wedge (s \setminus t \subset \bigcap\{X_\alpha \in \mathscr{F} : \alpha \in F\}).$$

$P$ удовлетворяет у.с.ц.: если $A \subset P$ несчётно, то $\exists\, s, E, F$ такие, что $(s, E), (s, F) \in A$ (так как множество конечных подмножеств $\omega$ счётно). Имеем $(s, E \cup F) \leq (s, E)$ и $(s, E \cup F) \leq (s, F)$.

Для $\alpha \in \kappa$ и $n \in \omega$ положим

$$D_{\alpha,n} = \{(s, E) \in P : \alpha \in E,\ |s| > n\}.$$

Каждое $D_{\alpha,n}$ плотно: если $(t, F) \in P$, $E = F \cup \{\alpha\}$ и $s$ — это $t$ плюс $n$ точек из $\bigcap_{\alpha \in F} X_\alpha$, то $(s, E) \leq (t, F)$ и $(s, E) \in D_{\alpha,n}$. Положим

$$\mathscr{D} = \{D_{\alpha,n} : \alpha \in \kappa,\ n \in \omega\}.$$

Имеем $|\mathscr{D}| < 2^\omega$. Пусть $G$ — $\mathscr{D}$-генерический фильтр на $P$ и

$$X_G = \bigcup\{s \subset \omega : s \text{ конечно, } \exists E \subset \kappa \text{ такое, что } (s, E) \in G\}.$$

$X_G$ бесконечно. $G$ пересекает все $D_{\alpha,n} \in \mathscr{D} \implies$ для каждого $\alpha \in \kappa$ существует $(s, E) \in G$ такое, что $\alpha \in E$. Элементы $G$ попарно совместимы $\implies$ для любого $(s', E') \in G$ существует $(s'', E'') \in X_G$ такое, что $(s'', E'') \leq (s', E')$ (так что $s'' \supset s'$) и $(s'', E'') \leq (s, E)$ (так что $X_\alpha \supset \bigcap_{\beta \in E} X_\beta \supset s'' \setminus s \supset s' \setminus s$). Значит, $X_G \setminus s \subset X_\alpha$, т.е. $X_G \subset^* X_\alpha$. ■

Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек топологического пространства $X$ *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности $U$ точки $x$ множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$ конечно. В случае, когда все точки $x_n$ различны, это означает, что $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset^* U$.

Последовательность *нетривиальна*, если она содержит бесконечное число попарно различных элементов.

Даже счётное пространство может быть недискретным, но не содержать нетривиальных сходящихся последовательностей.

**Определение 34.** Точка $x$ топологического пространства $X$ называется *точкой Фреше–Урысона*, если

$$x \text{ является точкой прикосновения множества } A \subset X \iff$$

$$\iff \text{к } x \text{ сходится некоторая последовательность точек из } A.$$

*База окрестностей* точки $x \in X$ — семейство $\mathscr{U}$ окрестностей $x$ с тем свойством, что в любой окрестности $x$ содержится $U \in \mathscr{U}$.

Ясно, что если точка $x$ обладает счётной базой окрестностей $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, то она является точкой Фреше–Урысона: если $x \in \mathrm{cl}\, A$, то, выбрав точку $a_n \in A \cap U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, мы получим последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к $x$.

Из теоремы Буса вытекает

**Следствие 6 (MA).** Если точка $x$ в счётном топологическом пространстве $X$ обладает базой окрестностей $\mathscr{U}$ мощности меньше $2^\omega$, то $x$ является точкой Фреше–Урысона.

*Доказательство.* Пусть $A \subset X$ и $x \in \operatorname{cl} A$ (т.е. любая окрестность $x$ пересекается с $A$). Тогда либо пересечение некоторой окрестности $x$ с $A$ конечно (и тогда можно выбрать тривиальную последовательность точек $A$, сходящуюся к $x$), либо пересечения $U \cap A$, $U \in \mathscr{U}$, образуют сильно центрированную систему. Точки любого её псевдопересечения составляют последовательность, сходящуюся к $x$. ■

**Определение 35.** *Фильтром* на множестве $X$ называется семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ со свойствами

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
2. $A, B \in \mathscr{F} \implies A \cap B \in \mathscr{F}$;
3. $A \in \mathscr{F}, A \subset B \subset \omega \implies B \in \mathscr{F}$.

Семейство $\mathscr{F}$ — фильтр на $X \iff \mathscr{F}$ является множеством всех проколотых окрестностей точки $*$ в пространстве $X_{\mathscr{F}} = X \cup \{*\}$, в котором $*$ — единственная неизолированная точка.

**Определение 36.** Максимальный (по включению) фильтр называется *ультрафильтром*.

Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве $X$ является ультрафильтром $\iff$ для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

**Замечание 8.** Пространство $\omega_{\mathscr{U}}$ не содержит нетривиальных сходящихся последовательностей ни для какого ультрафильтра $\mathscr{U}$ на $\omega$.

Действительно, нетривиальная последовательность может сходиться только к $*$. Из существования нетривиальной сходящейся последовательности вытекает существование сходящейся последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, в которой все элементы различны. $\mathscr{U}$ — ультрафильтр $\implies$ либо $U = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$, либо $V = \omega \setminus \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$. В первом случае $U \cup \{*\}$ — окрестность, которая не содержит бесконечно много элементов последовательности (а именно, всех элементов с нечётными номерами), а во втором — $V \cup \{*\}$.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется *главным*, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.
На понятии ультрафильтра основана популярная модель нестандартного анализа:

Пусть $\mathscr{U}$ — любой неглавный ультрафильтр на $\omega$. На множестве $\mathbb{R}^\omega$ последовательностей вещественных чисел введём отношение эквивалентности $\sim$:

$$(a_n)_{n\in\omega} \sim (b_n)_{n\in\omega} \iff \{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathscr{U}.$$

На фактормножестве $\mathbb{R}/\sim$ возникает естественный порядок:

$$[(a_n)_{n\in\omega}]_\sim \leq [(b_n)_{n\in\omega}]_\sim \iff \{n \in \omega : a_n \leq b_n\} \in \mathscr{U}.$$

Классы постоянных последовательностей отождествляются с вещественными числами. Классы последовательностей, сходящихся к 0 (к $\infty$), трактуются как бесконечно малые (бесконечно большие) величины. Они отличаются по скорости сходимости.

Через $[X]^k$ обозначается $k$-я *симметрическая степень* множества $X$ — семейство всех $k$-элементных подмножеств $X$.

**Теорема 25 (Теорема Рамсея).** Для любого бесконечного множества $X$ и любой раскраски $\chi\colon [X]^2 \to \{0,1\}$ существует бесконечное $\chi$-*однородное* множество $H \subset X$, т.е. такое, что $\chi|_{[H]^2} = \text{const}$.

*Доказательство.* Будем считать без потери общности, что $X = \omega$. Построим три последовательности $(H_n)_{n\in\omega}$, $(c_n)_{n\in\omega}$ и $(h_n)_{n\in\omega}$ такие, что $H_{n+1} \subset H_n \subset \omega$, $c_n \in \{0,1\}$ и $h_n \in \omega$, $h_{n+1} > h_n$, для всех $n \in \omega$.

Положим $h_0 = 0$ и $H_0 = \omega$. Пусть $h_n$ и $H_n$ уже определены. Выберем $c_n \in \{0,1\}$, для которого множество $H_{n+1} = \{k \in H_n \setminus (h_n+1) : \chi(h_n, k) = c_n\}$ бесконечно, и положим $h_{n+1}$ равным наименьшему элементу множества $H_{n+1}$.

Выберем бесконечное множество $I \subset \omega$ и число $c \in \{0,1\}$ такие, что $c_i = c$ для всех $i \in I$, и положим $H = \{h_i : i \in I\}$. Если $h_i, h_j \in H$ и $h_i < h_j$, то $h_j \in H_{i+1}$, так что $\chi(\{h_i, h_j\}) = c_i = c$. ■

**Определение 37.** Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\omega$ называется *рамсеевским*, если для любой раскраски $\chi\colon [\omega]^2 \to \{0,1\}$ существует $\chi$-однородный элемент $\mathscr{U}$ (т.е. $U \in \mathscr{U}$, для которого $\chi|_{[U]^2} = \mathrm{const}$).

**Теорема 26.** MA $\implies$ $\exists$ неглавный рамсеевский ультрафильтр на $\omega$.

*Доказательство.* Число возможных раскрасок множества $[\omega]^2$ равно $2^\omega$. Занумеруем все раскраски: $\chi_\alpha$, $\alpha < 2^\omega$. Построим сильно центрированное семейство $\chi_\alpha$-однородных множеств $H_\alpha$. Положим $H_0$ равным любому бесконечному $\chi_0$-однородному множеству. Пусть $\beta < 2^\omega$ и все $H_\alpha$, $\alpha < \beta$, построены. Поскольку $\mathfrak{p} = 2^\omega$, существует бесконечное псевдопересечение $H \subset \omega$ построенных множеств: $H \subset^* H_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$. Полагаем $H_\beta$ равным любому бесконечному $\chi_\beta$-однородному подмножеству множества $H$.

Ясно, что семейство $\mathscr{H} = \{H_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ центрировано. По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathscr{U} \supset \mathscr{H}$. Это рамсеевский ультрафильтр. ■

Из доказанной теоремы следует, что отрицание аксиомы Мартина совместимо с ZFC, поскольку существуют модели, в которых нет рамсеевских ультрафильтров на $\omega$.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\omega$ рамсеевский

$\Updownarrow$

$\mathscr{U}$ *селективный*, т.е. если $\omega = \bigsqcup_{n\in\omega} A_n$, $A_n \notin \mathscr{U}$, то $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \le 1$ для всякого $n \in \omega$

$\Updownarrow$

если $(U_n)_{n\in\omega}$ — последовательность элементов $\mathscr{U}$, то в каждом $U_n$ можно выбрать по точке $u_n$ так, что $\{u_n : n \in \omega\} \in \mathscr{U}$

$\Updownarrow$

для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ существует либо элемент $U \in \mathscr{U}$, на котором $f$ постоянна, либо элемент $U \in \mathscr{U}$, на котором $f$ взаимно однозначна

**Теорема 27 (Solovay).** Пусть $\kappa \le 2^\omega$ — бесконечный кардинал, $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset [\omega]^\omega$, $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| = \kappa$ и пересечение $A \cap B$ любых множеств $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{B}$ конечно.

MA $\implies$ существует множество $C \subset \omega$ такое, что для каждого $A \in \mathscr{A}$ $C \cap A$ конечно и для каждого $B \in \mathscr{B}$ $C \cap B$ бесконечно.

*Доказательство.* Пусть $P = \{(s, E) : s \subset \omega \text{ бесконечно}, E \subset \mathscr{A} \text{ конечно}\}$ с порядком

$$(s, E) \le (t, F) \iff (t \subset s) \wedge (F \subset E) \wedge ((s \setminus t) \cap \bigcap F = \varnothing);$$

у.с.ц. выполнено. Для $X \in \mathscr{A}$ положим $D_X = \{(s, E) \in P : X \in E\}$. Это множество плотно в $P$. Для $X \in \mathscr{B}$ и $k \in \mathbb{N}$ положим $D_{X,k} = \{(s, E) \in P : |s \cap X| \ge k\}$. Это множество тоже плотно в $P$. Пусть

$$\mathscr{D} = \{D_X : X \in \mathscr{A}\} \cup \{D_{X,k} : X \in \mathscr{B},\ k \in \omega\},$$

и пусть $G$ — $\mathscr{D}$-генерический фильтр. Тогда

$$C = \bigcup \{s \subset \omega : s \text{ конечно}, \exists \text{ конечное } E \subset \mathscr{A} \text{ такое, что } (s, E) \in G\},$$

обладает нужными свойствами. ■

**Теорема 28.** MA $\implies$ $2^\kappa = 2^\omega$ для любого бесконечного кардинала $\kappa < 2^\omega$.

*Доказательство.* Зафиксируем почти дизъюнктное семейство $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset [\omega]^\omega$. Его можно построить так. Перенумеруем все рациональные числа: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$. Зафиксируем в $\mathbb{R}$ множество $S$ мощности $\kappa$ и перенумеруем его элементы тоже: $S = \{s_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Для каждого $\alpha \in \kappa$ выберем последовательность рациональных чисел, сходящуюся к $s_\alpha$, и возьмём в качестве $A_\alpha$ множество номеров рациональных чисел, попавших в эту последовательность.

Для каждого $X \in \mathscr{P}(\kappa)$ положим

$$\mathscr{A}_X = \{A_\alpha : \alpha \notin X\} \qquad \text{и} \qquad \mathscr{B}_X = \{A_\alpha : \alpha \in X\}.$$

Пользуясь теоремой Соловея, найдём $C_X \subset \omega$, для которого $|C_X \cap A_\alpha| = \omega \iff \alpha \in X$. Ясно, что $C_X \neq C_Y$ для $X \neq Y$. Значит, отображение $\mathscr{P}(\kappa) \to \mathscr{P}(\omega)$, определённое правилом $X \mapsto C_X$, инъективно, так что $2^\kappa \leq 2^\omega$. Обратное неравенство очевидно. ■

## Гипотеза Лузина (LH)

$2^\omega = 2^{\omega_1}$

Из доказанной теоремы следует, что MA + ¬CH $\implies$ LH.

Отрицание гипотезы Лузина ($2^\omega < 2^{\omega_1}$) равносильно каждому из утверждений:

- Любой компакт мощности $\leq 2^\omega$ содержит всюду плотное подпространство с первой аксиомой счётности (т.е. такое, что каждая его точка имеет счётную базу окрестностей).
- Любой компакт мощности $\leq 2^\omega$, являющийся непрерывным образом обобщённого канторова дисконтинуума $\{0,1\}^\kappa$ (где $\kappa$ — любой кардинал), метризуем.
- Во всяком сепарабельном нормальном пространстве любое несчётное множество имеет предельную точку.

# Лузинские множества

## Гипотеза Бореля

Множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет *строгую меру 0*, если для любой последовательности $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ положительных чисел существует последовательность $(I_n)_{n\in\omega}$ интервалов такая, что $|I_n| < \varepsilon_n$ для каждого $n$ и $\bigcup\limits_{n\in\omega} I_n \supset X$.

*Гипотеза Бореля* состоит в том, что все множества строгой меры 0 счётны.

Подмножество $Y$ топологического пространства $X$ *нигде не плотно*, если всякое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит непустое открытое подмножество, не пересекающее $Y$. Другими словами, $Y$ нигде не плотно, если $X \setminus Y$ содержит открытое всюду плотное множество.

**Определение 38.** Подмножество вещественной прямой называется *лузинским множеством*, если его пересечение с каждым нигде не плотным множеством не более чем счётно.

Каждое лузинское множество имеет строгую меру 0.

В 1914 г. Лузин построил несчётное лузинское множество в предположении CH. (Следовательно, если выполняется CH, то гипотеза Бореля неверна.)

В предположении $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ не существует лузинских множеств, так как в этом случае всякое подмножество прямой мощности $< 2^\omega$ имеет первую категорию. (Однако $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH} \implies$ всякое множество мощности меньше $2^\omega$ имеет строгую меру 0, так что гипотеза Бореля всё равно неверна.)

В 1976 г. Лэйвер построил модель ZFC, в которой всякое множество строгой меры 0 счётно. Таким образом, истинность гипотезы Бореля не зависит от аксиом ZFC.

# Лекция 8. Существование несчётных лузинских множеств и несчётных множеств внешней меры нуль

## Свойства форсинга Коэна

### Существование лузинских множеств в предположении $\neg$CH

Напомним, что для ординала $\alpha$ *$\alpha$-коэновское частично упорядоченное множество* — это множество $\mathbb{P}_\alpha = (P_\alpha, \leq, \mathbf{1})$, где

$$P_\alpha = \{p \subset (\alpha \times \omega) \times \{0,1\} : p \text{ — конечная функция}\},$$

упорядоченное обратно включению.

Если $M$ — СТМ и $G \subset P_\alpha$ — генерическое множество, то $g = \bigcup G$ — функция $\alpha \times \omega \to \{0,1\}$ в $M[G]$, которая определяет $\alpha$ новых множеств $S_\beta \subset \omega$ и функций $\chi_\beta = \chi(S_\beta)\colon \omega \to \{0,1\}$ в $M[G]$: для $\beta < \alpha$

$$S_\beta = \{n \in \omega : g(\beta, n) = 1\}, \qquad \chi_\beta(n) = g(\beta, n).$$

**Определение 39.** Условие $p \in \mathbb{P}_\alpha$ называется *минимально вынуждающим* утверждение $\varphi$, если $p \Vdash \varphi$ и никакое $q > p$ не вынуждает $\varphi$.

**Предложение 10.** Для любого утверждения множество минимально вынуждающих его условий не более чем счётно.

*Доказательство.* Пусть множество $M$ условий, минимально вынуждающих некоторое утверждение $\varphi$, несчётно. Лемма о $\Delta$-системе $\implies$ $\exists$ несчётное $M' \subset M$ и конечная частичная функция $R$ из $\alpha \times \omega$ в $\{0,1\}$ такие, что для любых различных $p, q \in M'$ $p \cap q = R$, т.е. $\operatorname{dom} R \subset \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q$, $p\big((\alpha,n)\big) = q\big((\alpha,n)\big) = R\big((\alpha,n)\big)$ для $(\alpha,n) \in R$ и $p\big((\alpha,n)\big) \neq q\big((\alpha,n)\big)$ для $(\alpha,n) \in \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q \setminus \operatorname{dom} R$. Имеем $R > p\ \forall p \in M' \setminus \{R\}$. Значит, $R \nVdash \varphi$; $\implies \exists r \leq R$ такое, что $r \Vdash \neg\varphi$ (см. следствие из основной теоремы форсинга, 1). Условие $r$ несовместимо со всеми $p \in M' \implies \forall p \in M'\ \exists (\beta(p), n(p)) \in \operatorname{dom} p$, для которых $(\beta(p), n(p)) \in \operatorname{dom} r$ и $p(\beta(p), n(p)) \neq r(\beta(p), n(p))$. $\operatorname{dom} r$ конечна $\implies$ $\exists\ s, t \in M'$, $s \neq t$, такие, что $(\beta(s), n(s)) = (\beta(t), n(t))$. Пусть для определённости $r(\beta(s), n(s)) = 0$. Тогда $\big((\beta(s), n(s)), 1\big) \in s \cap t = R$ в противоречие с тем, что $\big((\beta(s), n(s)), 0\big) \in r$ и $r \leq R$. ■

*Канторово множество*

*Канторово множество*, или *канторов дисконтинуум*, $C$ — это подмножество отрезка $[0,1]$, которое строится по индукции так:

Мы полагаем $C_0 = [0,1]$ и на первом шаге удаляем из отрезка $[0,1]$ среднюю треть, т.е. интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся множество (обозначим его $C_1$) замкнуто и состоит из двух отрезков: $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Из каждого из этих отрезков удалим среднюю треть. Оставшееся множество $C_2$ замкнуто и состоит уже из четырёх отрезков: $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность замкнутых множеств $C_n \subset [0,1]$, причём для каждого $n$ множество $C_n$ является объединением $2^n$ отрезков и $C_{n+1}$ получается из $C_n$ удалением средних третей (без концов) из всех отрезков в этом объединении. Семейство $\{C_n : n \in \omega\}$ представляет собой центрированное семейство замкнутых подмножеств компакта $[0,1]$, поэтому оно имеет непустое пересечение. Это пересечение и есть канторово множество: $C = \bigcap_{n\in\omega} C_n$. Оно компактно, будучи замкнутым подмножеством компакта $[0,1]$.

Канторов дисконтинуум — классический пример совершенного (т.е. замкнутого и не содержащего изолированных точек) нигде не плотного подмножества прямой. Он гомеоморфен счётной топологической степени $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ двухточечного дискретного пространства $\{0,1\}$: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\varphi \subset^{\mathbb{N}} \times\{0,1\} : \varphi \text{ — функция}\} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} (x_n \in \{0,1\})\}$.

Топология: всякая окрестность любой функции $\varphi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ содержит каноническую окрестность вида

$$U_n(\varphi) = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f(k) = \varphi(k) \, \forall k \le n\}.$$

Множество открыто $\iff$ оно является объединением некоторых (канонических) окрестностей своих точек.

Каждое число $x \in C$ допускает троичную запись, не содержащую 1, причём именно такая троичная запись у каждого $x \in C$ единственна. Значит, отображение $f\colon C \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, определённое правилом $f(x) = \big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ для $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^n}$, инъективно (и сюръективно). Легко проверить, что оно непрерывно. Поскольку $C$ — компакт, это гомеоморфизм.

Для конечной частичной функции $\psi$ из $\omega$ в $\{0,1\}$ положим

$$V(\psi) = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f \supset \psi\},$$

т.е.

$$V(\psi) = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f|_{\operatorname{dom}\psi} = \psi\}.$$

Ясно, что если при этом $\operatorname{dom}\psi = \{1,\dots,n\}$, то для любой функции $\varphi\colon \omega \to \{0,1\}$, совпадающей с $\psi$ на $\{1,\dots,n\}$, имеем $U_n(\varphi) = V(\psi)$.

Таким образом, множество открыто в $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\iff$ оно является объединением некоторого (произвольного) семейства множеств вида $V(\psi)$ для некоторых конечных функций $\psi$ из $\omega$ в $\{0,1\}$, т.е. множества вида $V(\psi)$ образуют базу топологии пространства $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Их счётное число.

**Теорема 29.** Пусть $M$ — СТМ, $\kappa$ — несчётный кардинал в $M$ и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$ пересечение множества $X = \{\chi_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \{0,1\}^\omega$ с любым нигде не плотным подмножеством компакта $C = \{0,1\}^\omega$ не более чем счётно.

*Доказательство.* Рассуждаем в $M[G]$. Пусть $U \subset C$ открыто и плотно. Тогда $U$ есть объединение счётного семейства подмножеств компакта $C$, каждое из которых определяется конечной частичной функцией $\varphi_n$ из $\omega$ в $\{0,1\}$:

$$U = \bigcup_{n\in\omega} V(\varphi_n), \qquad \text{где} \quad V(\varphi) = \{f \in \{0,1\}^\omega : f \supset \varphi\}$$

(см. описание топологии $\{0,1\}\mathbb{N} = \{0,1\}^\omega$ перед теоремой). Нам надо доказать, что $\chi_\beta \in U$ для всех, кроме счётного числа, ординалов $\beta \in \kappa$.

Пусть $\Omega$ — имя, для которого $U = \Omega_G$, и условие $p \in G$ вынуждает всё сказанное об $\Omega$.

По доказанному предложению для каждой конечной частичной функции $\varphi \in \Phi$ множество $M_\varphi$ всех условий $p \in P_\kappa$, минимально вынуждающих утверждение «$V(\varphi) \subset \Omega$», не более чем счётно (возможно, пусто). Значит, счётно и множество

$$M = \bigcup \{M_\varphi : \varphi \text{ — конечная функция из } \omega \text{ в } \{0,1\}\}.$$

Рассмотрим

$$\operatorname{Ord}(U) = \{\alpha \in \kappa : (\exists p \in M)(\exists n \in \omega)(\alpha, n) \in \operatorname{dom} p\}.$$

Это счётное множество ординалов. Покажем, что $\chi_\beta \in U$ для $\beta \in \kappa \setminus \operatorname{Ord}(U)$.

Пусть $\beta \in \kappa \setminus \operatorname{Ord}(U)$. Для каждого $q \in P_\kappa$ обозначим через $q_\beta$ конечную функцию $\omega \to \{0,1\}$ с областью определения $\operatorname{dom} q_\beta = \{n \in \omega : (\beta, n) \in q\}$, определённую правилом $q_\beta(n) = q(\beta, n)$ для $n \in \operatorname{dom} q_\beta$. Без ограничения общности будем считать, что $p_\beta \ne \varnothing$ (иначе заметим, что множество $D$ функций $f \in P_\kappa$, для которых $f_\beta \ne \varnothing$, плотно в $P_\kappa$ и возьмём вместо $p$ условие $p' \in G \cap D$, $p' \le p$).

Пусть $p \in P_\kappa$, $p' \le p$ (т.е. $p' \supset p$, другими словами, $p'$ продолжает $p$, откуда $p'_\beta \ne \varnothing$). Поскольку $p' \le p$, условие $p'$ вынуждает всё то, что вынуждает $p$, в частности, что $\Omega$ плотно и открыто в $\{0,1\}^\omega$, а значит, что $\Omega \cap V(p'_\beta)$ непусто и открыто в $\{0,1\}^\omega$, т.е. оно вынуждает существование конечной функции $\varphi$ из $\omega$ в $\{0,1\}$, продолжающей $p'_\beta$, для которой $V(\varphi) \subset \Omega$.

В силу следствия из основной теоремы форсинга, пункт 4, существуют конечная функция $\varphi$ из $\omega$ в $\{0,1\}$, продолжающая $p'_\beta$, и условие $q \le p'$ такие, что $q \Vdash (V(\varphi) \subset \Omega)$.

Определим $r \in P_\kappa$ условиями:

- $\operatorname{dom} r = \operatorname{dom} q \cup \{\beta\} \times \operatorname{dom} \varphi$;
- $r(\alpha, n) = q(\alpha, n)$ для всех $(\alpha, n) \in \operatorname{dom} q$, $\alpha \ne \beta$;
- $r(\beta, n) = \varphi(n)$ для всех $n \in \operatorname{dom} \varphi$.

Имеем $r \le p'$, потому что $r \cap \{\alpha\} \times \omega = q \cap \{\alpha\} \times \omega \supset p' \cap \{\alpha\} \times \omega$ для $\alpha \ne \beta$ и $r_\beta = \varphi \supset p'_\beta$. ■

Кроме того, $r \Vdash (V(\varphi) \subset \Omega)$. Действительно, $q \Vdash (V(\varphi) \subset \Omega)$, а значит, $q \le t$ для некоторого условия $t$, минимально вынуждающего утверждение «$V(\varphi) \subset \Omega$». По определению множества $M$ имеем $t \subset (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\}$. С другой стороны, $r \cap (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\} = q \cap (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\} \le t \cap (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\} = t$, так что $r \le t$, а значит, условие $r$ вынуждает всё то, что вынуждает $t$.

Вспомним, что $\chi_\beta(n) = g(\beta, n)$ для $n \in \omega$. Пусть $\tau$ — имя $\chi_\beta$. Если $G'$ — любое генерическое множество и $r \in G'$, то $r \subset g$. Значит, в этом случае $g(\beta, n) = \varphi(n)$ для всех $n \in \operatorname{dom} \varphi$, так что $\chi_\beta \in V(\varphi) \subset U$ в $M[G']$. Это означает, что $r \Vdash (\chi_\beta \in \Omega)$.

Мы показали, что для любого условия $p' \le p$ существует условие $r \le p'$, вынуждающее утверждение «$\tau \in \Omega$», т.е. множество $E = \{r \in P_\kappa : r \Vdash (\tau \in \Omega)\}$ плотно ниже $p$ (это множество принадлежит исходной модели $M$, поскольку отношение $\Vdash$ определимо в $M$ по основной теореме форсинга). В силу леммы (1) в начале раздела «Вынуждение» $E \cap G \ne \varnothing$. Значит, некоторое условие $s \in G$ вынуждает утверждение «$\tau \in \Omega$», так что в модели $M[G]$ имеем $\tau_G \in \Omega_G$, т.е. $\chi_\beta \in U$.

**Следствие 7.** Пусть $M$ — СТМ, $\kappa$ — несчётный кардинал в $M$ и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$ существует лузинское множество мощности $\kappa$ в отрезке $[0,1]$ и на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

*Доказательство.* Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon C = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, которое каждой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нулей и единиц ставит в соответствие число, имеющее двоичную запись $0,x_1x_2x_3\ldots$ , т.е. действует по правилу

$$f\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot 2^{-(n+1)}$$

(«склеивает» концы интервалов, выкинутых при построении $C$).

Пусть $X$ — лузинское множество в $C$, $Y = f(X)$ и $N \subset [0,1]$ — нигде не плотное множество в $[0,1]$. Тогда $f^{-1}(N)$ нигде не плотно в $C$ (это легко увидеть, заметив, что $f^{-1}(\operatorname{cl} N)$ замкнуто и не может содержать непустых открытых множеств). Поскольку $X \cap f^{-1}(N)$ счётно, $Y \cap N$ тоже счётно.

Утверждение об $\mathbb{R}$ вытекает из того, что $\mathbb{R} \cong (0,1) \subset [0,1]$. ■

**Следствие 8.** Пусть $M$ — СТМ, $\kappa$ — несчётный кардинал в $M$ и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$

- любой компакт без изоливанных точек содержит лузинское подмножество мощности $\kappa$;
- никакой компакт без изолированных точек не является объединением $< \kappa$ нигде не плотных подмножеств, и любой такой компакт содержит множества второй категории любой несчётной мощности $\le 2^\omega$.

**Следствие 9.** С аксиомами ZFC совместимо существование в любом компакте без изолированных точек лузинских подмножеств мощности $2^\omega$, и при этом $2^\omega$ может быть алефом с любым номером.

# Лекция 9. Принцип Йенсена

## Принцип Йенсена

**Определение 40.** Пусть $\kappa$ — кардинал. Множество $X \subset \kappa$ *стационарно*, если оно пересекается с каждым замкнутым (в порядковой = интервальной топологии) неограниченным множеством $A \subset \kappa$.

Для $\kappa = \omega_1$ неограниченность = несчётность.

**Теорема 30 (Принцип Йенсена ($\Diamond$)).** Существуют множества $A_\alpha \subset \alpha$, $\alpha < \omega_1$, такие, что

$$\forall A \subset \omega_1 \text{ множество } \{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ стационарно.}$$

Последовательность $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ называется *$\Diamond$-последовательностью.*

$\Diamond \implies$ CH: если $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ — $\Diamond$-последовательность, то $\forall A \subset \omega\, \exists \alpha > \omega (A = A_\alpha)$, откуда $\{A_\alpha : A_\alpha \subset \omega\} = \mathscr{P}(\omega)$.

Из $\Diamond$ следует также существование прямой Суслина.

**Теорема 31.** Пусть $M$ — CTM,

$$P = \{f \subset \omega_1 \times \{0,1\} : f \text{ — функция, } |f| \leq \omega\}^M$$

с порядком, обратным включению, и $G$ — генерическое множество. Тогда $\mathscr{P}(\omega)^{M[G]} = \mathscr{P}(\omega)^M$, $\omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$ и $M[G] \models \Diamond$.

*Доказательство.* Первые два утверждения немедленно вытекают из второй теоремы о сохранении кардиналов и того, что $\mathbb{P}$ $\omega$-замкнуто.

Для доказательства утверждения $M[G] \models \Diamond$ вместо ч.у.м. $\mathbb{P}$ мы будем использовать ч.у.м. $\mathbb{Q}$, которое порядково изморфно множеству $\mathbb{P}$ в модели $M$. Так можно: если $i\colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ — изоморфизм (и $i \in M$), то $G$ является $\mathbb{Q}$-генерическим множеством $\iff$ $i^{-1}(G)$ является $\mathbb{P}$-генерическим множеством. Наименьшая модель, содержащая $M$ и $G$ (т.е. $M[G]$), содержит также и изоморфизм $i$, а значит, и $i^{-1}(G)$, и обратно, наименьшая модель, содержащая $M$ и $i^{-1}(G)$, обязана содержать $G$.

Положим

$$I = \{(\alpha,\xi) : \xi < \alpha < \omega_1\}, \quad Q = \{f \subset I \times \{0,1\} :\ f \text{ — функция, } |f| \leq \omega\}.$$

Как обычно, упорядочим $Q$ обратно включению.

Пусть $A\colon I \to \{0,1\}$. Для $\alpha < \omega_1$ пусть $A_\alpha(\xi) = A(\alpha,\xi)$, $\xi < \alpha$. Если $G$ — $\mathbb{Q}$-генерическое множество, то $g = \bigcup G$ — функция из $I$ в $\{0,1\}$. Мы покажем, что в модели $M[G]$ $(g_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ — $\Diamond$-последовательность в $\omega_1$ (мы отождествляем подмножества $\omega_1$ и их характеристические функции). Другими словами, мы покажем, что если $A \in M[G]$ и $A\colon \omega_1 \to \{0,1\}$, то множество $\{\alpha \in \omega_1 : A|_\alpha = g_\alpha\}$ стационарно в $M[G]$.

Предположим, что это не так. Тогда найдутся имя $\tau$ (для множества $A$), имя $\sigma$ (для замкнутого неограниченного множества) и условие $p \in G$ такие, что

$$p \Vdash ((\tau \subset \omega_1) \wedge (\sigma \subset \omega_1) \wedge (\sigma \text{ замкнуто и неограничено}) \wedge \forall \alpha \in \sigma (\tau|_\alpha \neq (\textstyle\bigcup \Gamma)|_\alpha)))$$

(напомним, что $\Gamma = \{(q,q) : q \in Q\}$ — имя для любого генерического множества в $\mathbb{Q}$).

Рассуждаем в $M$. Для каждого $q \in \mathbb{Q}$ обозначим через $\operatorname{supt}(q)$ наименьший $\beta \in \omega_1$, для которого $\operatorname{dom} q \subset \{(\alpha,\xi) : \xi < \alpha < \beta\}$. Определим по индукции $p_n$, $\beta_n$, $\delta_n$ и $a_n$, $n \in \omega$, так, что

1. $p_0 = p$; 2. $\beta_n = \operatorname{supt}(p_n)$; 3. $\delta_n > \beta_n$;
4. $p_{n+1} \le p_n$; 5. $p_{n+1} \Vdash \delta_n \in \sigma$; 6. $\operatorname{supt}(p_{n+1}) = \beta_{n+1} > \delta_n$;
7. $a_n \colon \beta_n \to \{0,1\}$ и $p_{n+1} \Vdash (\tau|_{\beta_n} = a_n)$.

Пусть $p_n$ и $\beta_n$ уже построены. Поскольку $p_n \le p$ и $p_n \Vdash$ ($\sigma$ неограничено),

$$p_n \Vdash \exists x \in \omega_1 (x > \beta_n \wedge x \in \sigma)).$$

Значит, существуют $q \le p_n$ и $\delta_n < \omega_1$, для которых

$$q \Vdash (\delta_n > \beta_n \wedge \delta_n \in \sigma),$$

т.е. $\delta_n > \beta_n$ и $q \Vdash (\delta_n \in \sigma)$. Пусть $r$ — любое условие такое, что $r \le q$ и $\operatorname{supt}(r) > \delta_n$. Чтобы обеспечить выполнение 7, положим $F = \{0,1\}^{\beta_n}$. Тогда $r \Vdash \tau|_{\beta_n} \in F$ (потому что генерическое расширение с помощью $G$ не добавляет новых функций $\beta_n \to \{0,1\}$, поскольку $\mathbb{Q}$ $\omega$-замкнуто). Значит, существуют $a_n \in F$ и $p_{n+1} \le r$ такие, что $p_{n+1} \Vdash (\tau|_{\beta_n} = a_n)$.

Итак, не покидая $M$, мы построили $\beta_0 < \delta_0 < \beta_1 < \delta_1 < \dots$. Положим

$$\gamma = \sup\{\beta_n : n \in \omega\} = \sup\{\delta_n : n \in \omega\} \quad \text{и} \quad p_\omega = \bigcup_{n\in\omega} p_n.$$

Имеем $p_\omega \in Q$ и $\operatorname{supt}(p_\omega) = \gamma$. Из того, что $p_\omega \le p_{n+1}$, следует, что $p_\omega \Vdash (\tau|_{\beta_n} = a_n)$ для $n \in \omega$. Таким образом, все функции $a_n$ согласованы, $a_\omega = \bigcup_{n\in\omega} a_n$ — функция $\gamma \to \{0,1\}$ и $p_\omega \Vdash (\tau|_\gamma = a_\omega)$.

Ни одна пара вида $(\gamma, \xi)$ не принадлежит $\operatorname{dom} p_\omega$. Значит, $p_\omega$ можно продолжить до функции $s \colon I \to \{0,1\}$ такой, что

$$s(\gamma, \xi) = a_\omega(\xi) \qquad \text{для всех} \quad \xi < \gamma.$$

Имеем $s \Vdash \big((\bigcup \Gamma)_\gamma = a_\omega\big)$, так что $s \Vdash \big(\tau|_\gamma = (\bigcup \Gamma)_\gamma\big)$. Кроме того, $s \Vdash (\gamma \in \sigma)$, потому что $s \Vdash$ ($\sigma$ замкнуто) и $s \Vdash (\delta_n \in \sigma)$ для всех $n \in \omega$. Значит,

$$s \Vdash \big(\exists x \in \sigma (\tau|_x = (\textstyle\bigcup \Gamma)_x\big).$$

Это противоречит неравенству $s \le p$. ■

# Деревья

**Определение 41.** *Дерево* — это частично упорядоченное множество $(T, \le)$ такое, что для каждого $x \in T$ множество $\{y \in T : y < x\}$ вполне упорядочено.

Для $x \in T$ порядковый тип множества $\{y \in T : y < x\}$ называется *высотой* элемента $x$ в $T$ и обозначается $\mathrm{ht(x, T)}$.

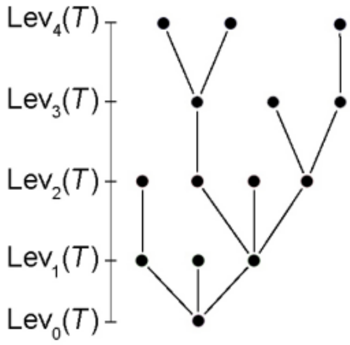
Для ординала $\alpha$ множество $\{x \in T : \mathrm{ht(x,T)} = \alpha\}$ называется *$\alpha$-м уровнем* дерева $T$ и обозначается $\mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$.

*Высота* $\mathrm{ht(T)}$ дерева $T$ — это наименьший ординал $\alpha$, для которого $\mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T}) = \varnothing$. Он равен $\mathrm{sup\{ht(x, T) + 1 : x \in T\}}$.

*Поддерево* $T'$ дерева $T$ — это множество $T' \subset T$ с индуцированным порядком, удовлетворяющее условию

$$(\forall x \in T')(\forall y \in T)\big((y < x) \to (y \in T')\big).$$

Если $T'$ — поддерево дерева $T$, то $\mathrm{ht(x, T')} = \mathrm{ht(x, T)}$ для всякого $x \in T'$.




**Определение 42.** *Цепью* в дереве $T$ называется любое линейно упорядоченное множество $C \subset T$. Максимальные цепи называются *ветвями*, а максимальные элементы — *листьями.*

*Антицепь* в $T$ — это множество $A \subset T$ такое, что

$$\forall x, y \in A\big((x \neq y) \to ((x \not\leq y) \wedge (y \not\leq x))\big).$$

Пусть $\alpha$ — предельный ординал (т.е. $\alpha \neq \beta + 1$). Его *конфинальность* $\mathrm{cf}(\alpha)$ — это наименьший ординал $\beta$, для которого существует функция $f\colon \beta \to \alpha$ со свойством $\alpha = \sup\limits_{\gamma<\beta} f(\gamma)$, т.е. наименьший $\beta$ такой, что $\alpha$ является объединением $\beta$ ординалов, строго меньших ординала $\alpha$.

Кардинал $\kappa$ называется *регулярным*, если $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

**Определение 43.** Для регулярного кардинала $\kappa$ *$\kappa$-деревом* называется любое дерево высоты $\kappa$, в котором все уровни имеют мощность $< \kappa$.

**Определение 44.** Для бесконечного кардинала $\kappa$ *$\kappa$-деревом Суслина* называется дерево мощности $\kappa$, в котором все цепи и антицепи имеют мощность $< \kappa$.

Для регулярного кардинала $\kappa$ каждое $\kappa$-дерево Сулина $T$ является $\kappa$-деревом. Действительно, $\mathrm{Lev}_\kappa(\mathrm{T}) = \varnothing$, так как если $x \in \mathrm{Lev}_\kappa(\mathrm{T})$, то $\{y : y < x\}$ — цепь мощности $\kappa$. Значит, $\mathrm{ht(T)} \leq \kappa$. Все уровни — антицепи $\implies$ их мощности $< \kappa$. $|T| = \kappa$, $T = \bigcup\{\mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T}) : \alpha < \mathrm{ht(T)}\}$ и $\kappa$ регулярен $\implies$ $\mathrm{ht(T)} = \kappa$.

**Теорема 32.** Существование прямой Суслина равносильно существованию $\omega_1$-дерева Суслина.

*Схема доказательства.* Пусть $T$ — дерево Суслина. Положим

$$L = \{C \subset T : C \text{ — максимальная цепь}\}.$$

Подправив $T$ (если нужно), можно считать, что максимальные цепи не содержат наибольших элементов. Тогда для каждого $C \in L$ существует ординал $h(C)$ такой, что $C$ содержит (ровно один) элемент каждого $\alpha$-уровня для $\alpha < h(C)$ и ни одного элемента $\alpha$-уровней для $\alpha \geq h(C)$. $T$ — дерево Суслина $\implies$ $h(C) < \omega_1$. Для $\alpha < h(C)$ пусть $\alpha(C)$ — единственный элемент в $C \cap \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$.

Упорядочим $L$. Зафиксируем любой линейный порядок $\preccurlyeq$ на $T$. Для $C, D \in L$, $C \neq D$, положим $d(C, D) = \min\{\alpha : C(\alpha) \neq D(\alpha)\}$. Имеем $d(C, D) \leq \min\{h(C), h(D)\}$. Положим $C \leq D$, если $C(d(C, D)) \preccurlyeq D(d(C, D))$.

$(L, \leq)$ — прямая Суслина.

*$L$ обладает свойством Суслина:*

Пусть $\{(C_\xi, D_\xi) : \xi < \omega_1\}$ — семейство непустых попарно непересекающихся интервалов.

Для каждого $\xi < \omega_1$ возьмём $E_\xi \in (C_\xi, D_\xi)$ и выберем $\alpha_\xi$ так, что

$$\max\{d(C_\xi, E_\xi), d(E_\xi, D_\xi)\} < \alpha_\xi < h(E_\xi).$$

$\{E_\xi(\alpha_\xi) : \xi < \omega_1\}$ — несчётная антицепь в $T$. Противоречие.

*Пространство $L$ не сепарабельно:*

Достаточно проверить, что для каждого $\gamma < \omega_1$ множество $\{C : h(C) < \gamma\}$ не плотно в $L$. Подправив $T$ при необходимости, можно считать, что для каждого $t \in T$ множество $\{s \in T : s > t\}$ пересекает все уровни над $t$. Выберем $x \in \mathrm{Lev}_\gamma(\mathrm{T})$. Множество $\{y \in T : y > x\}$ пересекает все уровни над $x$ и не может быть цепью $\implies$ $\exists \delta > \gamma$ такое, что $\mathrm{Lev}_\delta(\mathrm{T})$ содержит разные $y', y'' > x$. Повторив то же рассуждение для $y'$, найдём $\alpha > \delta$ и $y, z \in \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$ такие, что $y \neq z$ и $y, z > y'$. Возьмём $w \in \mathrm{Lev}_\alpha$, $w > y''$. Ясно, что $w \neq y$ и $w \neq z$. Пусть $D, E, F \in L$, $y \in D$, $z \in E$ и $w \in F$. Предположим для определённости, что $D \leq E \leq F$. Тогда интервал $(D, F)$ непуст , но $x \in D \cap F \implies (D, F)$ не содержит элементов $C \in L$, для которых $h(C) < \gamma$.

Обратно, пусть $(L, \leq)$ — прямая Суслина. В разделе о гипотезе Суслина было доказано, что если существует какая-то прямая Суслина, то существует и прямая Суслина, в которой нет непустых сепарабельных открытых множеств. Будем считать, что $(L, \leq)$ такова.

Пусть $(\mathscr{I}, \leq)$ — семейство непустых открытых интервалов в $L$, упорядоченное обратно включению. По трансфинитной индукции для каждого $\alpha < \omega_1$ построим подсемейство $\mathscr{I}_\alpha \subset \mathscr{I}$ со свойствами

1. элементы $\mathscr{I}_\alpha$ попарно дизъюнктны,
2. $\bigcup \mathscr{I}_\alpha$ плотно в $L$,
3. если $\beta < \alpha$, $I \in \mathscr{I}_\beta$ и $J \in \mathscr{I}_\alpha$, то либо (a) $I \cap J = \varnothing$, либо (б) $J \subset I$ и $I \setminus \mathrm{cl}\, J \neq \varnothing$ (черта сверху — замыкание).

После этого положим $T = \bigcup \mathscr{I}_\alpha$. В силу 1–3 $T$ — дерево и $\mathscr{I}_\alpha = \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$ для $\alpha < \omega_1$. Если $A \subset T$ — антицепь, то интервалы-элементы $A$ попарно дизъюнктны, так что $|A| \leq \omega$. Если бы $T$ содержало несчётную цепь $\{I_\xi : \xi < \omega_1\}$ (упорядоченную так, что $I_\xi \leq I_\zeta$ для $\xi < \zeta$) , то в силу 3(б) мы бы имели $I_\xi \setminus \mathrm{cl}\, I_\zeta \neq \varnothing$ для $\xi < \zeta$, так что семейство $\{I_\xi \setminus \mathrm{cl}\, I_{\xi+1} : \xi < \omega_1\}$ противоречило бы свойству Суслина $L$. Наконец, $|T| = \omega_1$, так как $\mathscr{I}_\alpha \neq \varnothing$ для $\alpha < \omega_1$ в силу 2. ■

## Построение дерева Суслина в предположении $\diamondsuit$

Скажем, что дерево $(T, \leq)$ *всегда ветвится*, если $\forall x \in T$ множество $\{y \in T : y > x\}$ не линейно упорядочено.

**Лемма 7.** Всякое всегда ветвящееся дерево, в котором все максимальные антицепи счётны, является деревом Суслина.

*Доказательство.* Пусть $T$ — всегда ветвящееся дерево. По лемме Цорна любая антицепь содержится в максимальной $\implies$ все антицепи счётны. Пусть $C$ — максимальная несчётная цепь. Тогда $C$ пересекает все уровни (поскольку вместе с каждым элементом содержит всех его предшественников). $T$ всегда ветвится $\implies$ $\forall x \in T\ \ \exists f(x) > x$ такое, что $f(x) \notin C$. Выберем по индукции $x_\alpha \in C$ для $\alpha < \omega_1$ так, что $\mathrm{ht}(\mathrm{x}_\alpha, \mathrm{T}) > \sup\{\mathrm{ht}(\mathrm{f}(\mathrm{x}_\beta), \mathrm{T}) : \beta < \alpha\}$. Получим несчётную антицепь $\{f(x_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$. Противоречие $\implies$ все максимальные цепи счётны $\implies$ все цепи счётны. ■

Будем строить дерево Суслина вида $T = (\omega_1, \lhd)$, где $\lhd$ — специальный порядок.

Для дерева $T$ и ординала $\alpha$ положим $T_\alpha = \bigcup\{\mathrm{Lev}_\beta(\mathrm{T}) : \beta < \alpha\}$ (это поддерево).

**Лемма 8.** Пусть $T = (\omega_1, \lhd)$ — $\omega_1$-дерево. Тогда

1. $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha\}$ замкнуто и неограничено в $\omega_1$;
2. если $A \subset \omega_1$ — максимальная антицепь в $T$, то

$$\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha,\ \ A \cap T_\alpha \text{ — максимальная антицепь в } T_\alpha\}$$

замкнуто и неограничено в $\omega_1$.

*Доказательство.* 1: Замкнутость очевидна. Докажем неограниченность. Для $\alpha < \omega_1$ положим $f(\alpha) = \mathrm{ht}(\alpha, \mathrm{T})$ и $g(\alpha) = \sup\{\beta : \beta \in \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})\}$. Ясно, что если $f(\beta) < \alpha$ и $g(\beta) < \alpha$ для всех $\beta < \alpha$, то $T_\alpha = \alpha$.

Значит, надо показать, что множество таких $\alpha$ неограничено. Для каждого $\xi < \omega_1$ выберем $\varphi(\xi) > \xi, f(\xi), g(\xi)$. Для любого фиксированного $\xi_0$ ординал $\alpha = \sup_n \varphi^n(\xi_0)$ ($\varphi^n$ — $n$-я итерация $\varphi$) обладает нужными свойствами , и $\alpha > \xi_0$.

2: Антицепь $A$ в $T$ максимальна $\iff$ каждый элемент $x \in T \setminus A$ сравним с некоторым элементом $A$.

Замкнутость очевидна. Проверим неограниченность. Ясно, что $A \cap T_\alpha$ — антицепь в $T_\alpha$ для любого $\alpha$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ выберем элемент $h(\alpha) \in A$, сравнимый с $\alpha$ (для $\alpha \in A$ полагаем $h(\alpha) = \alpha$). В пункте 1 мы определили отображения $f$ и $g$. Добавим к ним $h$ и для $\xi < \omega_1$ определим $\varphi(\xi)$ так, что $\varphi(\xi) > \xi, f(\xi), g(\xi), h(\xi)$. Для любого фиксированного $\xi_0$ ординал $\alpha = \sup_n \varphi^n(\xi_0)$ удовлетворяет условиям $f(\beta) < \alpha$ и $g(\beta) < \alpha$ для всех $\beta < \alpha$. Значит, $T_\alpha = \alpha$. Кроме того, $h(\beta) \in \alpha = T_\alpha$ для всех $\beta < \alpha$, так что каждый элемент $\beta \in T_\alpha \setminus A$ сравним с некоторым элементом (а именно, $h(\beta)$) из $A \cap T_\alpha$. Значит, антицепь $A \cap T_\alpha$ максимальна в $T_\alpha$. При этом ординал $\alpha$ больше произвольно выбранного $\xi_0$. ∎

**Лемма 9.** Пусть $T = (\omega, \lhd)$ — всегда ветвящееся $\omega_1$-дерево и $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ — $\Diamond$-последовательность. Предположим, что для каждого предельного ординала $\alpha < \omega_1$ с тем свойством, что $T_\alpha = \alpha$ и $A_\alpha$ — максимальная антицепь в $T_\alpha$, выполнено условие

$$\forall x \in \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})\ \exists \mathrm{y} \in \mathrm{A}_\alpha \text{ такой, что } y \lhd x. \tag{$\star$}$$

Тогда $T$ — $\omega_1$-дерево Суслина.

*Доказательство.* Лемма 7 $\implies$ достаточно проверить, что любая максимальная антицепь $A$ в $T$ счётна. Лемма 8 $\implies$ множество

$$C = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ предельный, } T_\alpha = \alpha \text{ и } A \cap T_\alpha \text{ — максимальная антицепь в } T_\alpha\}$$

замкнуто и неограничено в $\omega_1$. Поскольку множество $\{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ стационарно, найдётся $\alpha_0 \in C$ такое, что $A \cap \alpha_0 = A_{\alpha_0}$. Из ($\star$) следует, что если $z \in T$ и $\mathrm{ht}(\mathrm{z}, \mathrm{T}) \geq \alpha_0$, то для некоторого $y \in A_{\alpha_0} = A \cap \alpha_0$ имеем $y \lhd z$, так что $z \notin A$ (поскольку $A$ — антицепь). Значит, $A = A_{\alpha_0}$. ∎

# Лекция 10. Фильтр $\mathrm{club}(\kappa)$ и измеримые кардиналы

**Теорема 33 ($\diamondsuit$).** Существует дерево Суслина.

(Ординалы $\alpha < \omega_1$ записываются в виде $\omega \cdot \beta + n$, и порядок $\lhd$ определяется индукцией по $\beta$ и $n$ так, чтобы выполнялось $(\star)$.)

*Некоторые другие следствия* $\diamondsuit$

- Существует пространство Остащевского:

  несчётное регулярное счётно компактное не компактное пространство, в котором всякое замкнутое множество либо не более чем счётно, либо имеет не более чем счётное дополнение. (Несуществование таких пространств совместимо с ZFC + CH.)

- Существует наследственно сепарабельный компакт мощности $2^{2^\omega}$ без сходящихся последовательностей.

- Существует пространство $X$ со следующими свойствами:

  – $X$ локально компактно;

  – $X$ локально счётно;

  – $X$ наследственно сепарабельно;

  – $X$ нормально;

  – $X \times [0,1]$ не нормально.

## Фильтр $\mathrm{club}(\kappa)$

Пусть $\kappa$ — кардинал (или предельный ординал).

**Определение 45.** Множество $C \subset \kappa$ *замкнуто* в $\kappa$, если всякий ординал $\alpha < \kappa$, для которого $\sup(C \cap \alpha) = \alpha \neq 0$, принадлежит $C$ ($\iff$ $C$ замкнуто в порядковой топологии на $\kappa$).

Множество $C \subset \kappa$ *неограничено* в $\kappa$, если для всякого ординала $\alpha < \kappa$ существует $\beta \in C$ такой, что $\beta > \alpha$.

Множество $C \subset \kappa$, замкнутое и неограниченное в $\kappa$, называется *club*ом. Семейство всех множеств, каждое из которых содержит некоторый club в $\kappa$, является фильтром (будет доказано). Этот фильтр обозначается $\mathrm{club}(\kappa)$.

Если $\kappa$ — регулярный кардинал, то множество $C \subset \kappa$ неограничено в $\kappa \iff |C| = \kappa$.

а(Действительно, пусть $C = \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$, где $\lambda \leq \kappa$ и $c_\alpha < c_\beta$ для $\alpha < \beta$ (а значит, $c_\alpha \geq \alpha$ для всех $\alpha < \lambda$). Имеем $|c_\alpha| < \kappa$ для каждого $\alpha < \lambda$ (так как $\kappa$ — кардинал). Если $C$ неограничено, т.е. $\sup C = \bigcup_{\alpha<\lambda} c_\alpha = \kappa$, то $|C| = \lambda = \kappa$ в силу регулярности кардинала $\kappa$. Обратно, если $\lambda = \kappa$, то $\sup C = \sup_{\alpha<\lambda} c_\alpha \geq \sup_{\alpha<\kappa} \alpha = \kappa$.)

**Теорема 34 ($\kappa$-полнота фильтра $\mathrm{club}(\kappa)$).** Если $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал, то пересечение $< \kappa$ clubов в $\kappa$ является clubом.

*Доказательство.* Пусть $\lambda < \kappa$ и $C_\alpha$, $\alpha < \lambda$, — clubы в $\kappa$. Очевидно, пересечение $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ замкнуто в $\kappa$. Покажем, что оно неограничено. Возьмём любой ординал $\beta_0 < \kappa$. Пусть $(\beta_{0\alpha})_{\alpha<\lambda}$ — последовательность ординалов со свойствами

- $\beta_{00} > \beta_0$,
- $\beta_{0\alpha} < \beta_{0\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{0\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

Такая последовательность существует, так как все $C_\alpha$ неограничены.

Предположим, что $n > 0$ и мы уже построили последовательность $(\beta_{(n-1)\alpha})_{\alpha<\lambda}$ ординалов $< \kappa$. Положим $\beta_n = \sup_{\alpha<\lambda} \beta_{(n-1)\alpha}$. Имеем $\beta_n < \kappa$, так как $\kappa$ регулярен. Выберем последовательность $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ со свойствами

- $\beta_{n0} > \beta_n$,
- $\beta_{n\alpha} < \beta_{n\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

В результате мы получим последовательности $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ для всех $n < \omega$. Для каждого $\alpha < \lambda$ положим $\beta^*_\alpha = \sup_{n<\omega} \beta_{n\alpha}$. Каждое $C_\alpha$ замкнуто, $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha \implies \beta^*_\alpha \in C_\alpha$. Поскольку $\beta_n < \beta_{n\alpha} < \beta_{n+1}$, имеем $\beta^*_\alpha = \sup_{n<\omega} \beta_n$ для всякого $\alpha < \lambda$. Значит, $\sup_{n<\omega} \beta_n \in \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$, и $\sup_{n<\omega} \beta_n > \beta_0$. ■

**Теорема 35 (о диагональном пересечении).** Если $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал, то для любой последовательности clubов $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *диагональное пересечение*

$$\mathop{\Delta}_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \{\beta < \kappa : \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\}$$

является clubом.

*Доказательство.* Заметим, что $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$. Действительно, если $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$, то тем более $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$, и при этом $\beta \in [0,\gamma] \subset C_\gamma \cup [0,\gamma]$ для всякого $\gamma \geq \beta$. Значит, $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha \subset \bigcap_{\alpha<\kappa}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$. Обратно, если $\beta \in \bigcap_{\alpha<\kappa}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$, то $\beta \in C_\alpha \cup [0,\alpha]$ для каждого $\alpha < \beta$, и из того, что $\beta \notin \bigcup_{\alpha<\beta}[0,\alpha]$, следует, что $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$.

Вывод: диагональное пересечение $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Покажем, что оно неограничено. Возьмём $\alpha < \kappa$ и рассмотрим последовательность $(\xi_n)_{n\in\omega}$, где

$$\xi_0 = \alpha \quad \text{и} \quad \xi_{n+1} = \min\Big(\bigcap\nolimits_{\beta<\xi_n} C_\beta \cap (\xi_n, \kappa)\Big).$$

Положим $\xi = \sup_{n\in\omega} \xi_n$. Для каждого $\beta < \xi$ имеем $\beta < \xi_k$ для некоторого $k$, поэтому все элементы последовательности $(\xi_n)_{n\in\omega}$, кроме конечного их числа, принадлежат $C_\beta$. Все $C_\beta$ замкнуты $\implies$ $\xi \in C_\beta$ для каждого $\beta < \xi \implies \xi \in \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Ясно, что $\xi > \alpha$. ■

**Следствие 10.** Семейство всех clubов в регулярном несчётном кардинале $\kappa$ замкнуто относительно конечных пересечений.

Таким образом, семейство

$$\mathrm{club}(\kappa) = \{\mathrm{A} \subset \kappa : A \text{ содержит некоторый club в } \kappa\}$$

является фильтром. Мы увидим, что он почти никогда не является ультрафильтром (т.е. максимальным по включению фильтром).

**Определение 46.** Подмножество регулярного несчётного кардинала $\kappa$ *стационарно*, если оно пересекается со всеми clubами в $\kappa$.

Ясно, что все стационарные множества неограничены.

Пусть $\kappa$ — любой кардинал. Кардинал, непосредственно следующий за ним, обозначается $\kappa^+$:

$$\kappa^+ = \min\{\lambda : \lambda \text{ — кардинал}, \kappa < \lambda\}.$$

В частности, $n^+ = n+1$, $\omega^+ = \omega_1$, …, $\omega^+_\alpha = \omega_{\alpha^+}$.

**Замечание 9.** Всякий кардинал вида $\kappa^+$ регулярен.

Утверждение, что всякий регулярный кардинал имеет вид $\kappa^+$, совместимо с ZFC.

**Теорема 36 (Улам).** Пусть $\kappa$ — любой бесконечный кардинал.

Всякое стационарное подмножество кардинала $\kappa^+$ можно представить как объединение $\kappa^+$ штук попарно непересекающихся стационарных множеств.

**Определение 47.** Пусть $\kappa$ — кардинал. Для каждого $\beta < \kappa^+$ зафиксируем инъекцию $f_\beta\colon \beta \to \kappa$. Для $\iota < \kappa$ и $\alpha < \kappa^+$ положим

$$A^\iota_\alpha = \{\beta < \kappa^+ : \alpha < \beta \text{ и } f_\beta(\alpha) = \iota\}.$$

Получившееся семейство множеств $A^\iota_\alpha$, $\iota < \kappa$, $\alpha < \kappa^+$, называется *матрицей Улама* на $\kappa^+$.

Свойства матрицы Улама:

1. Если $\iota \neq \eta$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\eta_\alpha = \varnothing$ для всякого $\alpha < \kappa^+$.
2. Если $\alpha \neq \gamma$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\iota_\gamma = \varnothing$ для всякого $\iota < \kappa$, потому что все $f_\beta$ инъективны.
3. $\bigcup\limits_{\iota<\kappa} A^\iota_\alpha = \{\beta < \kappa^+ : \alpha < \beta\}$ для каждого $\alpha < \kappa^+$.

*Доказательство теоремы Улама.* Для $\alpha < \kappa^+$ положим

$$\mathrm{stat}(\alpha) = \{\iota < \kappa : A^\iota_\alpha \text{ стационарно}\}.$$

Множество $\bigcup_{\iota\in\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ содержит club. (Действительно, иначе $\bigcup_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ стационарно. Для $\iota \notin \mathrm{stat}(\alpha)$ пусть $C_\iota$ — club, не пересекающий $A^\iota_\alpha$. Теорема о $\kappa^+$-полноте $\implies$ $C = \bigcap_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} C_\iota$ — club, однако $C$ не пересекает множество $\bigcup_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$, которое по предположению стационарно.) Значит, для некоторого $\iota < \kappa$ имеем $|\{\alpha : \iota \in \mathrm{stat}(\alpha)\}| = \kappa^+$. ■

Пусть $\kappa$ — кардинал и $A \subset \kappa$. Скажем, что функция $f\colon A \to \kappa$ *регрессивна*, если $f(\alpha) < \alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Следующая теорема (*лемма Фодора*, или *pressing down lemma*) утверждает, что всякая регрессивная функция на стационарном множестве постоянна на некотором стационарном подмножестве этого множества.

**Теорема 37 (Фодора).** Пусть $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал, $S \subset \kappa$ — стационарное множество и $f\colon S \to \kappa$ — регрессивная функция. Тогда существуют стационарное множество $S_0 \subset S$ и ординал $\gamma < \kappa$ такие, что $f(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$.

*Доказательство.* Будем считать, что $0 \notin S$. Предположим, что найдутся стационарное множество $S \subset \kappa$ и регрессивная функция $f\colon S \to \kappa$ такие, что для всякого $\gamma < \kappa$ множество $f^{-1}(\gamma)$ не стационарно, т.е. не пересекается с некоторым clubом $C_\gamma$. Положим $C = \Delta_{\gamma<\kappa} C_\gamma$. Для $\alpha \in C$ имеем $\alpha \in C_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha \notin f^{-1}(\beta)$ для каждого $\beta < \alpha$. Значит, $f(\alpha) \geq \alpha$ — противоречие. ■

**Теорема 38.** Пусть $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал. Тогда для любой функции $f\colon \kappa \to \kappa$ множество

$$A = \{\alpha < \kappa : \forall \beta < \alpha (f(\beta) < \alpha)\}$$

содержит club.

*Доказательство.* Предположим, что $A$ не содержит club. Тогда $S = \kappa \setminus A$ стационарно. Для каждого $\alpha \in S$ положим

$$\varphi(\alpha) = \min\{\beta < \alpha : f(\beta) \geq \alpha\}.$$

Получили регрессивную функцию $\varphi\colon S \to \kappa$. По лемме Фодора существуют ординал $\gamma < \kappa$ и стационарное множество $S_0 \subset S$ такие, что $\varphi(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$. Получается, что $f(\gamma) \geq \alpha$ для всех $\alpha \in S_0$. Этого не может быть, так как $S_0$ неограничено. ■

**Следствие 11.** Если $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал, то множество неподвижных точек любой непрерывной (относительно порядковой топологии) возрастающей функции $\kappa \to \kappa$ содержит club.

# Измеримые кардиналы

## Недостижимые кардиналы

Недостижимые кардиналы — это кардиналы, которые нельзя получить из меньших кардиналов применением операций кардинальной арифметики.

**Определение 48.** Несчётный кардинал $\kappa$ *сильно недостижим*, или просто *недостижим*, если он регулярен и для всякого $\lambda < \kappa$ имеем $2^\lambda < \kappa$.

**Определение 49.** Кардинал $\kappa$ называется *предельным*, если у него нет непосредственного предшественника.

Непредельные кардиналы — это в точности все кардиналы вида $\kappa^+$. Если выполнена *обобщённая континуум-гипотеза* $2^\kappa = \kappa^+$ для всех кардиналов $\kappa$, то всякий регулярный предельный кардинал недостижим.

Несуществование недостижимых кардиналов совместимо с ZFC, тогда как совместимость их существования нельзя доказать в принципе.

Иерархия фон Неймана разбивает класс $V$ всех множества на подклассы $V_\alpha$, где $\alpha$ пробегает класс всех ординалов. Классы $V_\alpha$ определяются по трансфинитной рекурсии:

- $V_0 = \varnothing$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $V_\alpha = \mathscr{P}(V_\beta)$
- если $\alpha$ — предельный ординал, то $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$

Если кардинал $\kappa$ недостижим, то $V_\kappa$ — модель теории множеств, в которой нет недостижимых кардиналов, так что несуществование таких кардиналов совместимо с ZFC. Однако если бы существовало доказательство непротиворечивости существования недостижимого кардинала, то оно являлось бы одновременно доказательством непротиворечивости ZFC, которое не может существовать по второй теореме Гёделя о неполноте.

Для множества $X$ положим

$$\mathrm{Def}(X) = \big\{\{y : y \in X \text{ и } (X, \in) \models \varphi(y, z_1, \dots, z_n)\} : \varphi \text{ — формула первого порядка и } z_1, \dots, z_n \in X\big\}.$$

*Конструктивный универсум Гёделя* $L$ является объединением классов $L_\alpha$, где $\alpha$ пробегает класс всех ординалов. Классы $L_\alpha$ определяются по трансфинитной рекурсии:

- $L_0 = \varnothing$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $L_\alpha = \mathrm{Def}(L_\beta)$
- если $\alpha$ — предельный ординал, то $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$

Предположение $V = L$ совместимо с ZFC. Из него вытекает обобщённая континуум гипотеза , а значит, и недостижимость всякого предельного регулярного несчётного кардинала. Если $\kappa$ — такой кардинал, то $L_\kappa$ — модель теории множеств, в которой таких кардиналов нет, так что их несуществование совместимо с ZFC. Однако доказать непротиворечивость существования предельных регулярных несчётных кардиналов невозможно в принципе (по второй теореме Гёделя о неполноте).

**Определение 50.** *Измеримый кардинал* — это несчётный кардинал такой, что на $\mathscr{P}(\kappa)$ существует $\kappa$-аддитивная нетривиальная $\{0, 1\}$-значная мера.

*Измеримый по Уламу кардинал* — это несчётный кардинал такой, что на $\mathscr{P}(\kappa)$ существует $\sigma$-аддитивная нетривиальная $\{0, 1\}$-значная мера.

При этом $\{0, 1\}$-значная мера *$\kappa$-аддитивна*, если каковы бы ни были кардинал $\lambda < \kappa$ и семейство попарно непересекающихся множеств $A_\alpha \subset \kappa$, $\alpha < \lambda$, имеем $\mathrm{mes} \bigcup \mathrm{A}_\alpha = \sum_{\alpha<\lambda} \mathrm{mes} \mathrm{A}_\alpha$ (это означает, в частности, что $\mathrm{mes}\mathrm{A}_\alpha$ может равняться 1 не более чем для одного $\alpha < \lambda$). Мера *нетривиальна*, если $\mathrm{mes}\kappa = 1$ и $\mathrm{mes}\{\alpha\} = 0$ для всякого $\alpha \in \kappa$.

Другими словами, несчётный кардинал $\kappa$ измерим, если на $\kappa$ существует $\kappa$-полный неглавный ультрафильтр.

(Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\kappa$ *неглавный*, если $\bigcap \mathscr{U} = \varnothing$, и *$\kappa$-полный*, если пересечение любого семейства $< \kappa$ его элементов принадлежит $\mathscr{U}$.)

# Лекция 11. Проблема существования экстремально несвязных групп

**Теорема 39.** Любой измеримый кардинал недостижим.

*Доказательство.* Если на кардинале $\kappa$ существует нетривиальная $\kappa$-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера, то любое одноэлементное множество имеет меру $0 \implies$ любое множество мощности $< \kappa$ имеет меру $0 \implies$ объединение $< \kappa$ таких множеств имеет меру $0 \implies \kappa$ регулярен.

Предположим, что существует $\lambda < \kappa$, для которого $2^\lambda \geq \kappa$. Отождествим $\kappa$ с каким-нибудь множеством $K \subset 2^\lambda$ (посредством биекции). Элементы $K$ (как и всего множества $2^\lambda$) — это функции $\lambda \to \{0,1\}$. Для каждого $\alpha < \lambda$ имеем

$$\mathrm{mes}\{f \in K : f(\alpha) = 0\} = 1 \quad \text{или} \quad \mathrm{mes}\{f \in K : f(\alpha) = 1\} = 1.$$

В первом случае положим $c_\alpha = 0$, во втором — $c_\alpha = 1$. В силу $\kappa$-аддитивности меры имеем

$$\mathrm{mes} \bigcap \Big\{ \{f \in K : f(\alpha) = c_\alpha\} : \alpha \in \lambda \Big\} = 1,$$

однако это пересечение содержит лишь одну точку — функцию $f\colon \alpha \mapsto c_\alpha$, $\alpha \in \lambda$. ∎

**Теорема 40.** Наименьший измеримый по Уламу кардинал измерим.

*Доказательство.* Пусть $\kappa$ — наименьший измеримый по Уламу кардинал и mes — $\sigma$-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера на $\mathscr{P}(\kappa)$.

Предположим, что эта мера не $\kappa$-аддитивна. Пусть $\lambda < \kappa$, $A_\alpha \subset \kappa$ для $\alpha < \lambda$, $\mathrm{mes} A_\alpha = 0$ для $\alpha < \lambda$ и $\mathrm{mes}\big(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\big) = 1$. Можно считать, что $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \kappa$ — иначе заменим $A_0$ на $A_0 \cup \big(\kappa \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\big)$.

Рассмотрим отображение $f\colon \kappa \to \lambda$, определённое правилом $f(\alpha) = \beta \iff \beta \in A_\alpha$. Определим на $\mathscr{P}(\lambda)$ функцию $\mu$, положив $\mu(X) = \mathrm{mes}(f^{-1}(X))$ для $X \subset \lambda$. Функция $\mu$ является $\sigma$-аддитивной мерой на $\mathscr{P}(\lambda)$ , поскольку $\mu(\varnothing) = \mathrm{mes}(f^{-1}(\varnothing)) = \mathrm{mes}(\varnothing) = 0$ и для любых попарно непересекающихся множеств $X_n \subset \lambda$, $n \in \omega$, имеем $f^{-1}(X_i) \cap f^{-1}(X_j) = \varnothing$ для $i \neq j$, $f^{-1}(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(X_n)$ и

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\omega} X_n\Big) = \mathrm{mes}\Big(\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(X_n)\Big) = \\ = \sum_{n\in\omega} \mathrm{mes}\big(f^{-1}(X_n)\big) = \sum_{n\in\omega} \mu\big(f^{-1}(X_n)\big).$$

Существование $\mu$ противоречит минимальности измеримого по Уламу кардинала $\kappa$. ∎

Кардинал $\kappa$ называется *рамсеевским*, если для всякой раскраски $\chi\colon [\kappa]^{<\omega} \to \{0,1\}$ существует $\chi$-однородное множество мощности $\kappa$ (множество $A \subset \kappa$ *$\chi$-однородно*, если $\chi|_{[A]^{<\omega}} = \mathrm{const}$).

**Теорема 41.** Любой измеримый кардинал является рамсеевским.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\kappa$ называется *нормальным*, если он замкнут относительно диагональных пересечений, т.е. для любого семейства $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ элементов $\mathscr{U}$ диагональное пересечение $\Delta_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ принадлежит $\mathscr{U}$.

**Теорема 42.** Кардинал $\kappa$ измерим $\iff$ на $\kappa$ существует неглавный $\kappa$-полный нормальный ультрафильтр.

## Проблема существования экстремально несвязных групп

### Категории

*Теория категорий* изучает свойства отношений между объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов.

**Определение 51.** Говорят, что задана *категория* $\mathtt{C}$, если

- задан класс *объектов* $\mathrm{Ob}_{\mathtt{C}}$;
- для каждой пары объектов $A, B$ задано множество *морфизмов* (*стрелок*) $\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A,B)$, причём каждому морфизму соответствуют единственные объекты $A$ и $B$;
- для пары морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A,B)$ и $g \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A,B)$ определена композиция $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A,C)$;

- для каждого объекта $A$ задан тождественный морфизм $\mathrm{id_A} \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{A})$,

причём выполняются аксиомы

- операция композиции ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- тождественный морфизм действует тривиально:

$$f \circ \mathrm{id_A} = \mathrm{id_B} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f} \quad \forall \mathrm{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Стандартный способ описания утверждений теории категорий — коммутативные диаграммы. *Коммутативная диаграмма* — это ориентированный граф, в вершинах которого находятся объекты, а стрелками являются морфизмы, причём результат композиции стрелок не зависит от выбранного пути. Например, аксиомы теории категорий можно записать с помощью диаграмм:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h\circ g\circ f"'] \arrow[dr] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl] \\ D & C \arrow[l, "h"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id_A}"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "f"] \\ B & B \arrow[l, "\mathrm{id_B}"] \end{tikzcd}$$

**Пример 3.**
- $\mathtt{Set}$ — категория множеств: объекты — множества, морфизмы — отображения множеств
- $\mathtt{Top}$ — категория топологических пространств: объекты — пространства, морфизмы — непрерывные отображения
- $\mathtt{Grp}$ — категория групп: объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы
- каждому ч.у.м. соответствует категория, объекты которой — элементы ч.у.м., морфизмы — $\leq$

Как уже упоминалось, в теории категорий произведение объектов $X_\alpha$, $\alpha \in A$, определяется как объект $X$ вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта $Y$ этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f \colon Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В категории $\mathtt{Top}$ топологических пространств объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения. В этой категории условие из определния произведения означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha \in A} f_\alpha \colon Y \to \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

**Определение 52.** Морфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A, B)$ называется

- *изоморфизмом*, если существует морфизм $g \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(B, A)$ такой, что $g \circ f = \mathrm{id_A}$ и $f \circ g = \mathrm{id_B}$;
- *эндоморфизмом*, если $A = B$;
- *автоморфизмом*, если это изоморфизм и эндоморфизм;
- *эпиморфизмом*, если $\forall g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(B, X)$ из $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует $g_1 = g_2$;
- *мономорфизмом*, если $\forall g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X, A)$ из $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует $g_1 = g_2$;
- *биморфизмом*, если это мономорфизм и эпиморфизм.

Любой изоморфизм является биморфизмом, но не наоборот.

**Определение 53.** Объект $P$ в категории $\mathtt{C}$ называется *проективным*, если для любых эпиморфизма $e \colon Y \to X$ и морфизма $f \colon P \to X$ существует морфизм $\bar{f} \colon P \to Y$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "e"] \\ P \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $e \circ \bar{f} = f$).

**Пример 4.** • Аксиома выбора $\iff$ все объекты в категории `Set` множеств и отображений проективны.

- В категории (топологических) групп и (непрерывных) гомоморфизмов проективные объекты — свободные (топологические) группы.
- В категории `Comp` компактов и непрерывных отображений проективные объекты — экстремально несвязные компакты.

## Булевы алгебры и пространства Стоуна

**Определение 54.** *Булева алгебра* — это непустое множество $B$ с двумя бинарными операциями $\vee$ (супремум) и $\wedge$ (инфимум), одной унарной операцией $\neg$ (дополнение) и двумя выделенными элементами 0 и 1, удовлетворяющими аксиомам:

для любых $a, b, c \in B$

$$\begin{aligned}
&a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c && a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \\
&a \vee b = b \vee a && a \wedge b = b \wedge a \\
&a \vee (a \wedge b) = a && a \wedge (a \vee b) = a \\
&a \vee 0 = a && a \wedge 1 = a \\
&a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
&a \vee \neg a = 1 && a \wedge \neg a = 0
\end{aligned}$$

**Пример 5.** 1. Для множества $X$ семейство $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств $X$ с операциями $\vee = \cup$, $\vee = \cap$, $\neg = X \setminus \bullet$ и выделенными элементами $0 = \varnothing$ и $1 = X$.

2. Для топологического пространства $X$ семейство $\mathrm{CO}(X)$ всех открыто-замкнутых подмножеств $X$ с теми же операциями.

3. Для топологического пространства $X$ семейство $\mathrm{RO}(X)$ всех канонически открытых подмножеств $X$ с операциями
$$U \wedge V = U \cap V, \qquad U \vee V = \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{U} \cup \mathrm{V}}), \qquad \neg \mathrm{U} = \mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{U}}$$
и выделенными элементами $0 = \varnothing$ и $1 = X$.

   (Канонически открытые множества = внутренности замкнутых: $U \in \mathrm{RO}(X)$, если $U = \mathrm{Int}\,\mathrm{cl}\, U$.)

4. Булева алгебра $\mathrm{RC}(X)$ канонически замкнутых множеств (замыканий открытых) с $0 = \varnothing$, $1 = X$ и операциями
$$F \wedge G = \overline{\mathrm{Int}(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})}, \qquad F \vee G = F \cup G, \qquad \neg F = X \setminus \mathrm{IntF}.$$

**Теорема 43 (Стоуна).** Любая булева алгебра $B$ изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств некоторого вполне несвязного компакта $S(B)$.

Точки компакта $S(B)$ — ***ультрафильтры*** на $B$, т.е. гомоморфизмы в булеву алгебру $\{0, 1\}$. Его топология порождена базой $\{X \in S(B) : b \in X\}$, где $b \in B$.

Соответствие $S$ — отображение из категории булевых алгебр и гомоморфизмов булевых алгебр в категорию `Comp` компактов и непрерывных отображений.

Это соответствие является контравариантным функтором, т.е. любому гомоморфизму булевых алгебр $A \to B$ естественным образом соответствует непрерывное отображение $S(B) \to S(A)$.

**Определение 55.** Булева алгебра $B$ *полна*, если для любого множества $X \subset B$ определены $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ (считается, что $\bigvee \varnothing = 0$ и $\bigwedge \varnothing = 1$).

Булева алгебра $B$ полна $\iff$ пространство Стоуна $S(B)$ экстремально несвязно.

## Экстремально несвязные пространства

**Определение 56.** Топологическое пространство $X$ *экстремально несвязно*, если замыкание любого открытого множества в нём открыто.

*Равносильные условия*

- внутренность любого замкнутого множества в $X$ замкнута
- если $U, V \subset X$ открыты и $U \cap V = \varnothing$, то $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$
- любое всюду плотное множество $Y \subset X$ $C^*$-вложено в $X$, т.е. всякая непрерывная функция $Y \to [0,1]$ продолжается до непрерывной функции $X \to [0,1]$
- любое открытое множество $U \subset X$ $C^*$-вложено в $X$
- стоун-чеховская (максимальная) компактификация $\beta X$ — проективный объект категории `Comp`
- булева алгебра $\mathrm{CO}(X)$ образует базу топологии $X$ и полна

**Теорема 44 (Фролик).** Если $X$ — экстремально несвязное пространство и $f\colon X \to X$ — гомеоморфизм, то множество $\operatorname{Fix} f$ неподвижных точек отображения $f$ открыто (и замкнуто) в $X$.

**Следствие 12.** Всякое хаусдорфово пространство, квадрат которого экстремально несвязен, дискретно.

*Доказательство.* Для автогомеоморфизма $f\colon X^2 \to X^2$, определённого правилом $f(x,y) = (y,x)$, множество неподвижных точек — диагональ в $X^2$. Диагональ в квадрате хаусдорфова пространства открыта $\iff$ это пространство дискретно. ■

Топологическое пространство $X$ *однородно*, если для любых различных $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f\colon X \to X$ такой, что $f(x) = y$.

Всякий однородный экстремально несвязный компакт конечен.

**Замечание 10.** Пространство $X \cup \{*\}$ с единственной неизолированной точкой $*$ экстремально несвязно $\iff$ фильтр $\mathscr{F}$ проколотых окрестностей точки $*$ является ультрафильтром на $X$.

*Доказательство.* Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно, докажем $\Rightarrow$. Пусть $A$ — любое подмножество $X$. Надо показать, что либо $A$, либо $X \setminus A$ является проколотой окрестностью точки $*$. Множества $A$ и $X \setminus A$ открыты в $X \cup \{*\}$. Значит, $*$ принадлежит замыканию ровно одного из этих множеств. Пусть для определённости $* \in \operatorname{cl} A$. Имеем $\operatorname{cl} A = A \cup \{*\}$ (и $\operatorname{cl} X \setminus A = X \setminus A$) — иначе $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} X \setminus A \neq \varnothing$. Значит, множество $A \cup \{*\}$ открыто и $A$ — проколотая окрестность точки $*$. ■

Экстремальная несвязность наследуется открытыми, всюду плотными и счётными подпространствами и сохраняется открытыми непрерывными отображениями.

## Экстремально несвязные группы

*Топологическая группа* — это группа с топологией, относительно которой обе групповые операции $(x,y) \mapsto x \cdot y$ и $x \mapsto x^{-1}$ непрерывны.

Если топологическая группа $G$ удовлетворяет аксиоме отделимости $T_0$, то она вполне регулярна. В этом случае говорят, что $G$ отделима.

В противном случае пересечение $H$ всех окрестностей единицы является открыто-замкнутой подгруппой группы $G$, и топологическая факторгруппа $G/H$ отделима, а в остальном обладает теми же топологическими свойствами, что и группа $G$. В дальнейшем будем предполагать все рассматриваемые топологические группы отделимыми.

**Проблема 1 (Архангельский, 1967).** Существует ли в ZFC недискретная экстремально несвязная топологическая группа?

**Теорема 45 (СирОта, $\approx 1967$).** CH $\implies$ существует недискретная счётная экстремально несвязная группа

**Определение 57.** Группа $G$ с единицей 1 называется *булевой*, если в ней выполнено тождество $x^2 = 1$ для всех $x \in G$.

- Любая булева группа абелева.
- Любая булева группа является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$. В частности, у неё есть базис, который её свободно порождает.
- Булева группа $B(X)$ с базисом $X$ — не что иное как множество $[X]^{<\omega}$ всех конечных подмножеств $X$ с операцией симметрической разности: для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B(X)$ $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \triangle \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{y}) \setminus (\boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y})$. Ноль — пустое множество.

**Пример 6.** Канторов дисконтинуум $C \cong \{0,1\}^\omega$ — компактная булева топологическая группа. Она содержит счётную группу

$$B(\omega) = [\omega]^{<\omega} = \{f \in \{0,1\}^\omega : |f^{-1}(1)| < \omega\}$$

в качестве подгруппы.

**Теорема 46 (Малыхин).** Любая экстремально несвязная группа содержит открытую булеву подгруппу.

*Доказательство.* Пусть $G$ — экстремально несвязная группа. Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi\colon G \to G$, $\varphi(g) = g^{-1}$. По теореме Фролика $\operatorname{Fix}\varphi$ открыто в $G$. Это открытая окрестность единицы. Пусть $U$ — открытая окрестность единицы, для которой $U \cdot U \subset \operatorname{Fix}\varphi$ (её существование вытекает из равенства $1 \cdot 1 = 1$ и непрерывности умножения в точке $(1,1) \in G \times G$). Пусть $H$ — подгруппа, порождённая множеством $U$. Она открыта: для $h \in H$ имеем $h \cdot U \subset h \cdot H \subset H$, и $h \cdot U$ — открытая окрестность точки $h$ в силу непрерывности умножения.

Покажем, что подгруппа $H$ булева. Для любых $u, v \in U$ имеем $u \cdot v \in \operatorname{Fix}\varphi$, откуда

$$v \cdot u = v \cdot u \cdot (u \cdot v \cdot u \cdot v) = (v \cdot (u \cdot u) \cdot v) \cdot u \cdot v = u \cdot v.$$

Любой элемент $h \in H$ есть произведение $u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, где $u_i \in U$. Значит, $h^2 = u_1^2 \cdot \ldots \cdot u_n^2 = 0$. ■

**Следствие 13.** Если существует недискретная экстремально несвязная группа, то существует и булева недискретная экстремально несвязная группа.

**Пример Сироты**

Напомним: если $\mathscr{F}$ — фильтр на $\omega$, то $\omega_{\mathscr{F}}$ — пространство $\omega \cup \{*\}$ с единственной неизолированной точкой $*$, в котором проколотые окрестности $*$ — элементы $\mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на $\omega$, и пусть $B_{\mathscr{F}}(\omega)$ — булева группа $B(\omega) = [\omega]^{<\omega}$ с топологией, в которой базу окрестностей нуля составляют подгруппы $\langle F \rangle$, порождённые множествами $F \in \mathscr{F}$. СирОта

- ввёл определение рамсеевского (селективного) ультрафильтра на $\omega$ в эквивалентной форме;
- доказал, что из CH следует существование рамсеевского ультрафильтра;
- доказал, что если $\mathscr{U}$ — рамсеевский ультрафильтр на $\omega$, то топологическая группа $B_{\mathscr{U}}(\omega)$ экстремально несвязна.

## Незамкнутые дискретные множества в группах

В группе Сироты $B_{\mathscr{U}}(\omega)$ есть счётное незамкнутое дискретное множество $\omega$ с единственной предельной точкой 0. В экстремально несвязном пространстве два таких множества не могут иметь общую предельную точку, поскольку экстремальная несвязность наследуется счётными подпространствами. Естественные вопросы:

- Существует ли модель ZFC, в которой всякая недискретная булева топологическая группа содержит непересекающиеся дискретные множества с общей единственной предельной точкой?
- Верно ли, что во всякой (счётной) недискретной топологической группе имеется дискретное подмножество с ровно одной предельной точкой?
- Существует ли недискретная счётная группа, в которой все дискретные подмножества замкнуты?

**Определение 58.** Скажем, что множество $M$ в группе $G$ *жирное*, если $1 \in M$ и $\exists m \in \mathbb{N}$ (*жирность* $M$) такое, что для любого $m$-элементного множества $F \subset G$ существуют различные $x, y \in F$ с тем свойством, что $x^{-1} \cdot y \in M$ и $y^{-1} \cdot x \in M$.

**Пример 7.**
- Любая подгруппа конечного индекса — жирное множество.
- Если $W \subset G$ и $W \cap W^{-1} \cdot W = \varnothing$, то $G \setminus W$ — жирное множество (и $m = 4$).

**Теорема 47.** В любой группе $G$ семейство жирных множеств является фильтром на $G$.

**Определение 59.** Фильтр $\mathscr{F}$ на $\omega$ — называется *$Q$-фильтром*, если каково бы ни было разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все $F_n$ конечны, существует $A \in \mathscr{F}$ со свойством $|A \cap F_n| \leq 1$ для всех $n \in \omega$.

**Определение 60.** Фильтр $\mathscr{F}$ на $\omega$ называется *быстрым* (или *слабым $Q$-фильтром*), если для любой функции $f \colon \omega \to \omega$ найдётся $A = \{a_0 < a_1 < \ldots\} \in \mathscr{F}$ со свойством $a_n > f(n)$ для всех $n$.

**Предложение 11.** Фильтр $\mathscr{F}$ быстрый $\iff$ каково бы ни было разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все $F_n$ конечны, существует $A \in \mathscr{F}$ со свойством $|A \cap F_n| < n$ для всех $n \in \omega$.

**Замечание 11.** Фильтр $\mathscr{F}$ на $\omega$ небыстрый $\iff$ для любой последовательности натуральных чисел $(m_n)_{n\in\omega}$ существует разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все $F_n$ конечны, такое, что для всякого $A \in \mathscr{F}$ имеем $|A \cap F_n| > m_n$ при некотором $n$.

**Теорема 48.** Пусть $G$ — счётная группа, $\mathscr{F}$ — небыстрый свободный фильтр на $G$ и $(M_n)_{n\in\omega}$ — последовательность жирных множеств. Тогда существует множество $S \subset G \setminus \{1\}$ со свойствами

1. $S \setminus M_n$ конечно для всех $n$;
2. во всяком $A \in \mathscr{F}$ найдутся различные $a, b \in A$ такие, что $a^{-1} \cdot b \in S$.

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что $M_{n+1} \subset M_n$ и $M_n^{-1} = M_n$. Пусть $m_n$ — жирность $M_n$. Фильтр $\mathscr{F}$ небыстрый $\implies$ $\exists$ последовательность $(F_n)_{n\in\omega}$ конечных подмножеств $G$ с тем свойством, что для всякого $A \in \mathscr{F}$ имеем $|A \cap F_n| > m_n$ при некотором $n$. Положим

$$S_n = \{g^{-1} \cdot h : g, h \in F_n, g \neq h, g^{-1} \cdot h \in M_n\} \quad \text{и} \quad S = \bigcup S_n.$$

Проверим 1: множества $S_k$ конечны, $S_k \subset M_k$, $M_{k+1} \subset M_k \implies S \setminus M_n \subset \bigcup_{k<n} S_k$ конечно для каждого $n$.

Проверим 2: Пусть $A \in \mathscr{F}$. Имеем $|A \cap F_n| > m_n$ для некоторого $n$. Множество $M_n$ жирное, $m_n$ — его жирность $\implies$ $\exists$ различные $a, b \in A \cap F_n$, для которых $a^{-1} \cdot b \in M_n$. По определению $a^{-1} \cdot b \in S_n$. ■

**Следствие 14.** Любая счётная недискретная топологическая группа $G$, в которой фильтр $\mathscr{F}$ проколотых окрестностей единицы небыстрый, содержит незамкнутое дискретное множество с единственной предельной точкой 1.

*Доказательство.* Пусть $G = \{1, g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$. Для каждого $n \in \omega$ возьмём окрестность единицы $U_n$ такую, что $g_n \notin U_n$. Пусть $V_n$ — открытая окрестность единицы, $V_n^{-1} \cdot V_n \cdot V_n^{-1} \subset U_n$. Тогда $g \cdot V_n \cap V_n^{-1} \cdot V_n = \varnothing$. Значит, множество $M_n = G \setminus (g_n \cdot V_n)$ жирное (и замкнутое), причём $\bigcap M_n = \{1\}$. Возьмем $S$ как в теореме. Каждая точка $g \in G \setminus \{1\}$ не принадлежит некоторому $M_n \implies G \setminus M_n$ — её открытая окрестность, содержащая лишь конечное число точек из $S \implies$ множество $S$ дискретно , и точки $g \neq 1$ не являются предельными для $S$. Для любой окрестности 1 $U$ существует окрестность 1 $V$ такая, что $V^{-1} \cdot V \subset U$, и любая окрестность содержит проколотую окрестность. Значит, любая окрестность 1 содержит $A^{-1} \cdot A$ для некоторого $A \in \mathscr{F} \implies$ пересекает $S$. ■

Существует модель ZFC, в которой нет быстрых фильтров.

**Следствие 15.** С ZFC совместимо утверждение: любая счётная недискретная топологическая группа содержит незамкнутое дискретное множество, единственной предельной точкой которого является единица группы.

**Теорема 49.** Предположим, что не существует быстрых фильтров. Тогда в любой счётной недискретной булевой топологической группе содержатся два непересекающихся дискретных множества, единственной предельной точкой каждого из которых является 0.

**Следствие 16.** Несуществование счётных недискретных экстремально несвязных групп совместимо с ZFC.

## Несчётные экстремально несвязные группы

**Теорема 50.** Пусть $\kappa$ — любой кардинал и $\mathscr{U}$ — рамсеевский ультрафильтр на $\kappa$. Тогда булева топологическая группа $B_{\mathscr{U}}(\kappa) = [\kappa]^{<\omega}$, в которой базу окрестностей нуля составляют подгруппы $\langle A\rangle$, $A \in \mathscr{U}$, экстремально несвязна.

Если ультрафильтр $\mathscr{U}$ неглавный, то группа $B_{\mathscr{U}}(\kappa)$ недискретна.

Рамсеевский ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\kappa$ неглавный и равномерный (все его элементы имеют мощность $\kappa$) $\iff$ $\mathscr{U}$ нормален (замкнут относительно диагональных пересечений) и $\kappa$-полон. Следовательно, на $\kappa$ существует неглавный рамсеевский ультрафильтр, все элементы которого несчётны, $\iff$ $\kappa$ измерим.

**Следствие 17.** Если существует измеримый кардинал, то существует и недискретная экстремально несвязная группа.

На прямое обобщение теоремы о несуществовании недискретных счётных экстремально несвязных групп на регулярные несчётные кардиналы рассчитывать не приходится:

**Предложение 12.** Пусть $\kappa$ — несчётный регулярный кардинал и $f\colon \kappa \to \kappa$ — функция с тем свойством, что прообраз $f^{-1}(\alpha)$ каждой точки $\alpha \in \kappa$ не стационарен. Тогда существует club $C$, сужение функции $f$ на который инъективно.

*Доказательство.* Предположим, что множество $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ стационарно. Тогда по лемме Фодора существует стационарное множество $S \subset \kappa$, для которого $f|_S = \mathrm{const}$, а это противоречит условию. Значит, $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ нестационарно, так что множество $A = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \geq \alpha\}$ содержит club. Множество $B = \{\alpha \in \kappa : f(\beta) < \alpha$ для всех $\beta < \alpha\}$ тоже содержит club по доказанной раньше теореме. Пусть $C$ — club, $C \subset A \cap B$. Если $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$, то $\beta \in B \implies f(\alpha) < \beta$ и $\beta \in A \implies f(\beta) \geq \beta$. ■

Можно придумать несколько естественных обобщений понятия $Q$-фильтра на несчётные кардиналы. Самое сильное: скажем, что фильтр $\mathscr{F}$ на $\kappa$ является $\kappa$-$Q$-фильтром, если каково бы ни было разбиение $\kappa = \sqcup F_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, где $|F_\alpha| < \kappa$ для всех $\alpha$, существует $A \in \mathscr{F}$ со свойством $|A \cap F_\alpha| \leq 1$ для всех $\alpha \in \kappa$. Всякий $\kappa$-$Q$-фильтр является $\kappa$-быстрым фильтром (какое бы обобщение быстроты ни рассматривалось).

Все стационарные подмножества регулярного кардинала $\kappa$ имеют мощность $\kappa$ $\implies$

**Следствие 18.** Любой фильтр $\mathscr{F}$ на регулярном несчётном кардинале $\kappa$, содержащий club($\kappa$), является неглавным $\kappa$-$Q$-фильтром.

# Лекция 12. Итерированный форсинг. Теорема Истона. Булевозначные модели

## Итерированный форсинг

**Определение 61.** Пусть $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q, \mathbf{1}_Q)$ и $\mathbb{R} = (P, \leq_R, \mathbf{1}_R)$ — частично упорядоченные множества. *Прямым произведением* $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ называется частично упорядоченное множество $\mathbb{P} = (P, \leq_P, \mathbf{1})$, где $P = Q \times R$, $\mathbf{1} = (\mathbf{1}_Q, \mathbf{1}_R)$ а частичный порядок определяется так: $(q, r) \leq_P (q', r')$, если $q \leq_Q q'$ и $r \leq_R r'$. Наибольшим элементом множества $\mathbb{P}$ является $\mathbf{1} = (\mathbf{1}_Q, \mathbf{1}_R)$.

**Теорема 51 (Первая теорема о произведении).** *Пусть $M$ — CTM, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ — частично упорядоченные множества, $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ и $G$ — $\mathbb{P}$-генерическое множество над $M$. Пусть*

$$H = \{q \in Q : \exists r \in R((q, r) \in G)\},$$

$$K = \{r \in R : \exists q \in Q((q, r) \in G)\}.$$

*Тогда $H$ — $\mathbb{Q}$-генерическое множество над $M$, $K$ — $\mathbb{R}$-генерическое множество над $M[H]$ и $G = H \times K$.*

*Доказательство.* Если $(q, r) \in G$, то $(\mathbf{1}_Q, r), (q, \mathbf{1}_Q) \in G$ (так как они больше $(q, r)$). Значит,

$$H = \{q \in Q : (q, \mathbf{1}_R) \in G\} \quad \text{и} \quad K = \{r \in R : (\mathbf{1}_Q, r) \in G\}.$$

Докажем, что $H$ $\mathbb{Q}$-генерическое над $M$. Пусть $D \in M$ плотно в $\mathbb{Q}$. Тогда $D \times R$ плотно в $\mathbb{P}$. Значит, $\exists (q, r) \in (D \times R) \cap G$. Имеем $q \in D \cap H$.

Докажем, что $K$ $\mathbb{R}$-генерическое над $M[G]$. Пусть $D \in M[G]$ плотно в $\mathbb{R}$, и пусть $\tau$ — $\mathbb{Q}$-имя, для которого $D = \tau_H$. Некоторое условие $q_0 \in P$ вынуждает, что $\tau$ плотно. Положим

$$E = \{(q, r) : (q \leq_Q q_0) \wedge (q \Vdash r \in \tau)\}$$

($E \in M$ по теореме об определимости). Покажем, что $E$ плотно ниже $(q_0, \mathbf{1}_R)$ в $\mathbb{P}$.

Если $(q, r) \leq (q_0, \mathbf{1}_R)$, то $q \Vdash$ ($\tau$ плотно в $\mathbb{R}$), откуда

$$q \Vdash \exists x \in R((\text{УПОР.ПАРА}(x, r) \in \leq_R) \wedge (x \in \tau))$$

(здесь УПОР.ПАРА(имя, имя) — имя, которое всегда интерпретируется как упорядоченная пара интерпретаций имён в скобках).

Значит, существуют $q' \leq_Q q$ и $\sigma \in \operatorname{dom} R$ такие, что

$$q' \Vdash ((\text{УПОР.ПАРА}(r', r) \in \leq_R) \wedge (\sigma \in \tau))$$

$\implies$ существуют $q' \leq_Q q$ и $r' \in R$, для которых

$$q' \Vdash \text{УПОР.ПАРА}(r', r) \in \leq_R \quad \text{и} \quad q' \Vdash r' \in \tau,$$

т.е. $r' \leq_R r$ и $q' \Vdash r' \in \tau$, откуда $(q', r') \leq_P (q, r)$ и $(q', r') \in E$.

Лемма (1) 2 $\implies \exists (q, r) \in E \cap G$. Имеем $r \in K$, а поскольку $q \Vdash r \in \tau$, имеем также $r \in D$. Значит, $K \cap D \neq \varnothing$. Мы доказали, что $K$ — $\mathbb{R}$-генерическое множество.

Покажем, что $H \times K = G$. Если $q \in H$ и $r \in K$, то $p_0 = (q, \mathbf{1}_R)$ и $p_1 = (\mathbf{1}_Q, r)$ принадлежат $G$, так что $\exists p' = (q', r') \in G$ такое, что $p' \leq_P p_0, p_1$. Ясно, что $(q, r) \geq_P p'$. Значит, $(q, r) \in G$. ■

Верна и обратная теорема: если $H$ — $\mathbb{Q}$-генерическое множество над $M$ и $K$ — $\mathbb{R}$-генерическое множество над $M[H]$, то $H \times K$ — $\mathbb{P}$-генерическое множество над $M$.

Эти теоремы позволяют сводить однократное генерическое расширение к двукратному и наоборот в случае, когда $\mathbb{R} \in M$. Они применимы и к бесконечнократным расширениям.

В случае $\mathbb{R} \in M[H] \setminus M$ верна модификация первой теоремы о произведении, но она доказывается значительно сложнее.

В применении итерированного форсинга ключевую роль играет следующая лемма. В ней $\lambda$-замкнутость означает, что любая убывающая последовательность длины $\leq \lambda$ имеет нижнюю грань, а $\kappa$-условие антицепей — отсутствие антицепей (множеств попарно несовместимых элементов) мощности $\geq \kappa$.

**Лемма 10 (О сохранении кардиналов при двукратном расширении).** Пусть частично упорядоченные множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ принадлежат СТМ $M$, $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ и $\kappa$ — кардинал в $M$. Предположим, что

$$M \models (\kappa \text{ регулярен } \wedge \forall \lambda < \kappa(\mathbb{Q}\ \lambda - \text{замкнуто}) \wedge \mathbb{R} \text{ удовлетворяет } \kappa\text{-условию антицепей})$$

Тогда $\mathbf{1}_P \models (\kappa$ — кардинал) (т.е. $\kappa$ остаётся кардиналом в любом $\mathbb{P}$-генерическом расширении $M$).

**Теорема 52 (Об обратном неравенстве).** Пусть $M$ — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м. и $\kappa$, $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ — кардиналы в $M$. Предположим, что

$$M \models ((\nu = \kappa^{\lambda\mu}) \wedge (|P| = \kappa) \wedge (\mathbb{P} \text{ уд-ет } \lambda^+\text{-условию антицепей})).$$

Тогда $\mathbf{1}_P \models 2^\mu \leq \nu$.

**Теорема 53 (Истона).** Существует СТМ, в которой $2^{\omega_n} = \omega_{n+2}$ для всех $n \in \omega$.

*Доказательство.* Для каждого $n \in \omega$ рассмотрим множество

$$P_n = \{p : p - \text{функция} \wedge \operatorname{dom} p \subset \omega_{n+2} \times \omega_n \wedge \operatorname{ran} p \subset \{0,1\} \wedge |\operatorname{dom} p| < \omega_n\},$$

упорядоченное обратно включению. Положим

$$Q_n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) : p_i \in P_i \text{ для } i \leq n\},$$

$$Q^n = \{(p_{n+1}, p_{n+2}, \dots) : p_i \in P_i \text{ для } i > n\}.$$

Упорядочим множества $Q_n$ и $Q^n$ покомпонентно: $(p_0, \dots, p_n) \leq (p'_0, \dots, p'_n)$ в $Q_n$, если $p_i \leq p'_i$ в $P_i$ для всех $i \leq n$, и аналогично для $Q^n$.

Если верна GCH ($2^\lambda = \lambda^+$ для всех кардиналов $\lambda$), то каждое $\mathbb{Q}_n$ удовлетворяет $\omega_{n+1}$-условию антицепей (это доказывается так же, как то, что коэновское множество удовлетворяет у.с.ц., с использованием общей леммы о $\Delta$-системы) , а каждое множество $\mathbb{Q}^n$ $\omega_n$-замкнуто (очевидно). Ясно, что множества $\mathbb{Q}_n \otimes \mathbb{Q}^n$ и $\mathbb{Q}_m \otimes Q^m$ порядково изоморфны для всех $n$ и $m$. Множество $\mathbb{Q}_0 \otimes \mathbb{Q}^0$ называется *частично упорядоченным множеством Истона.*

Пусть $M$ — СТМ, $M \models$ GCH, $\mathbb{P}$ — ч.у.м. Истона и $G$ — генерическое множество. Поскольку ч.у.м. Истона изоморфно всем $\mathbb{Q}_n \otimes \mathbb{Q}^n$, лемма о сохранении кардиналов при двукратном расширении $\implies$ все кардиналы модели $M$ сохраняются в $M[G]$. Нетрудно показать, что множество $\{q \in P_n : q - n$-я компонента некоторого $p \in G\}$ порождает семейство мощности $\omega_{n+2}$ подмножеств $\omega_n$ (по аналогии с доказательством $\neg$CH в коэновской модели).

Таким образом, $M[G] \models 2^{\omega_n} \geq \omega_{n+2}$ для всех $n \in \omega$. Покажем, что имеет место равенство. Возьмём $n \in \omega$. Положим $\lambda = \omega_n^M$ и $\kappa = \omega_{n+2}^M$. Это кардиналы в $M[G]$.

Представим модель $M[G]$ в виде $M[G^n][G_n]$, где

$$G_n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) : (p_0, p_1, \dots) \in G\},$$

$$G^n = \{(p_{n+1}, p_{n+2}, \dots) : (p_0, p_1, \dots) \in G\}.$$

Поскольку $\mathbb{Q}^n$ $\lambda$-замкнуто в $M$, из общей второй теоремы о сохранении кардиналов (которая формулируется и доказывается для всех кардиналов точно так же, как для $\omega$) следует, что каждое множество $X \subset \kappa$, которое принадлежит модели $M[G^n]$ и имеет мощность $\lambda$ в $M[G^n]$, принадлежит исходной модели $M$ и имеет в ней мощность $\lambda$.

*Вывод* 1: Если $\mathbb{Q}' \in M[G^n]$ таково, что $M[G^n] \models (\mathbb{Q}'$ — ч.у.м. Истона) и $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'_n \otimes \mathbb{Q}'^n$ внутри $M[G^n]$, то $\mathbb{Q}'_n = \mathbb{Q}_n$. Следовательно, ч.у.м. $\mathbb{Q}_n$ удовлетворяет $\lambda^+$-условию антицепей в $M[G^n]$ (и при этом $\lambda^+ = \omega_{n+1}^M = \omega_{n+1}^{M[G]}$).

*Вывод* 2: $(\kappa^\lambda)^{M[G]} = (\kappa^\lambda)^M = \kappa$.

Следовательно, к модели $M[G^n]$ и ч.у.м. $\mathbb{Q}_n \in M[G^n]$ применима теорема об обратном неравенстве с $\nu = \kappa$ и $\mu = \lambda$. Она даёт

$$M[G^n][G_n] \models 2^\lambda \leq \kappa,$$

что и требовалось. ■

# Булевозначные модели

Рассмотрим *все возможные утверждения* языка теории множеств, а потом решим, какие из них для нас желательны. Выбор должен подчиняться естественным ограничениям: например, если $\varphi$ и $\psi$ выполняются, то $\varphi \wedge \psi$ тоже должно выполняться и т.п. Естественный инструмент для их отслеживания — булева алгебра.

**Определение 62.** *Булева алгебра* — это непустое множество $B$ с двумя бинарными операциями $\vee$ (супремум) и $\wedge$ (инфимум), одной унарной операцией $\neg$ (дополнение) и двумя выделенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, удовлетворяющими аксиомам: $\forall a, b, c \in B$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a \qquad a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee \mathbf{0} = a \qquad a \wedge \mathbf{1} = a \qquad a \vee \neg a = \mathbf{1} \qquad a \wedge \neg a = \mathbf{0}$$

На любой булевой алгебре имеется естественный частичный порядок: $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

## Построение булевозначной модели $M^{\mathbb{B}}$

Имеется естественное соответствие между операциями $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ в булевой алгебре и логике, а также между элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ булевой алгебры и значениями И («истина») и Л («ложь») истинностных оценок высказываний.

Предположим, что мы хотим, чтобы некоторые высказывания были истинны и не уверены насчёт других. Зафиксируем наше частичное знание выбором подходящей булевой алгебры $\mathbb{B}$ и отображением каждого высказывания $\varphi$ в некоторый элемент $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}$. Если $\varphi$ совершенно точно истинно (например, это аксиома ZFC), полагаем $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$, а если совершенно точно ложно — полагаем

Ясно, что отображение $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ должно удовлетворять условиям

1. $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$
2. $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$
3. $[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!]$

(отсюда вытекает, что $[\![\varphi \to \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$).

В теории множеств атомными формулами являются $[\![x = y]\!]$ и $[\![x \in y]\!]$ $\implies$ придётся рассматривать «нечёткие множества».

Обычное множество можно отождествить с функцией, принимающей значения в тривиальной булевой алгебре $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, которая отображает элементы множества (которые тоже являются множествами) в $\mathbf{1}$, а не элементы — в $\mathbf{0}$. В случае произвольной $\mathbb{B}$ «нечёткое множество» $x$ состоит из «потенциальных элементов» (которые тоже являются «нечёткими множествами») и отождествляется с функцией, которая переводит каждый «потенциальный элемент» $y$ в элемент булевой алгебры $\mathbb{B}$, соответствующий «степени принадлежности» элемента $y$ множеству $x$. Таким образом, будем рассматривать $\mathbb{B}$-*значные множества* — функции из множества $\mathbb{B}$-значных множеств в $\mathbb{B}$.

Начнём с модели ZFC $M$. Зафиксируем соответствие $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ (удовлетворяющее условиям типа 1–3 и переводящее аксиомы ZFC в $\mathbf{1}$) и обозначим множество всех $\mathbb{B}$-значных множеств в $M$ через $M^{\mathbb{B}}$. Получившаяся структура называется *булевозначной моделью ZFC*. Чтобы превратить её в настоящую модель, нужно будет избавиться от нечёткости. Это достигается факторизацией $M^{\mathbb{B}}$ по ультрафильтру.

Чтобы полностью определить соответствие $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$, нужно определить его для атомных формул и понять, что происходит при соединении атомов в более сложные формулы с помощью логических связок и кванторов $\exists$ и $\forall$ (у которых нет прямых аналогов в формализме булевых алгебр). Объединение при помощи связок подчиняется условиям 1–3. Рассмотрим $\exists$.

Существование $x$, для которого имеет место $\varphi(x)$, можно выразить так: «либо $\varphi(a)$, либо $\varphi(b)$, либо $\varphi()$, ...» (надо перечислить все элементы вселенной). Таким образом, следует положить

4. $[\![\exists x \varphi(x)]\!] = \bigvee\limits_{a \in M^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(a)]\!]$

и, аналогично,

5. $[\![\forall x\varphi(x)]\!] = \bigwedge\limits_{a\in M^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(a)]\!]$.

Чтобы эти определения имели смысл, нужно потребовать, чтобы булева алгебра $\mathbb{B}$ была *полной*, т.е. чтобы для любого (настоящего) множества $X \subset B$ были определены $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ (считается, что $\bigvee \varnothing = \mathbf{0}$ и $\bigwedge \varnothing = \mathbf{1}$).

Осталось позаботиться об атомах $[\![x \in y]\!]$ и $[\![x = y]\!]$.

Во-первых, мы хотим, чтобы выполнялась аксиома объёмности, т.е.

$$[\![x = y]\!] = [\![\forall z((z \in x) \to (z \in y)) \land \forall z((z \in y) \to (z \in x))]\!].$$

Другая разумная формула —

$$[\![x \in y]\!] = [\![\exists z((z \in y) \land (z = x))]\!].$$

Естественно также потребовать, чтобы выражение $[\![\exists z((z \in x) \land \varphi(z))]\!]$ зависело от значений $[\![\varphi(z)]\!]$ только для тех $z$, которые и в самом деле принадлежат области определения $\operatorname{dom} x$ $\mathbb{B}$-значного множества $x$, причём значение $[\![z \in x]\!] \in \mathbb{B}$ должно быть тесно связано со значением $x(z) \in \mathbb{B}$ (напомним, что $x$ — $\mathbb{B}$-значная функция от $\mathbb{B}$-значных функций). Приходим к требованиям

$$[\![\exists z((z \in x) \land (\varphi(z))]\!] = \bigvee_{z\in \operatorname{dom} x} \big(x(z) \land [\![\varphi(z)]\!]\big)$$

и

$$[\![\forall z((z \in x) \to (\varphi(z))]\!] = \bigwedge_{z\in \operatorname{dom} x} \big(x(z) \to [\![\varphi(z)]\!]\big).$$

Все эти выражения приводят к определениям

6. $[\![x \in y]\!] = \bigvee\limits_{z\in \operatorname{dom} y} \big(y(z) \land [\![x = z]\!]\big)$

7. $[\![x = y]\!] = \bigwedge\limits_{z\in \operatorname{dom} y} \big(x(z) \to [\![z \in y]\!]\big) \land \bigwedge\limits_{z\in \operatorname{dom} x} \big(y(z) \to [\![z \in x]\!]\big)$

Это индуктивные определения по аналогу ранга для булевозначных множеств.

Требование выполнения аксиом ZFC в $M^{\mathbb{B}}$ накладывает дополнительные ограничения на $\mathbb{B}$. В качестве примера рассмотрим аксиому множества подмножеств. Для данного «нечёткого множества» $x$ в $M^{\mathbb{B}}$ естественно определить «множество» $y$ всех его подмножеств в $M^{\mathbb{B}}$, полагая

$$\operatorname{dom} y = \mathbb{B}^{\operatorname{dom} x}$$

т.е. определяя «потенциальные элементы» $y$ как отображения $\operatorname{dom} x \to \mathbb{B}$. При этом для каждого $z \in \operatorname{dom} y$ должно выполняться условие $[\![z \subset x]\!]$. Однако если алгебра $\mathbb{B}$ не принадлежит модели $M$, то отображения из $\operatorname{dom} x$ в $\mathbb{B}$ не обязательно являются $\mathbb{B}$-значными множествами. Поэтому будем требовать, чтобы $\mathbb{B}$ принадлежала $M$. Вместо полноты алгебры $\mathbb{B}$ достаточно требовать, чтобы она была полна в $M$, т.е. чтобы $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ существовали для $X \subset B$ из $M$.

**Определение 63.** Пусть $M$ — модель ZFC. Предположим, что $\mathbb{B} \in M$ — полная (в $M$) булева алгебра и $[\![\cdot]\!]$ — отображение из множества всех формул языка теории множеств в $\mathbb{B}$, удовлетворяющее условиям 1–7. Множество $M^{\mathbb{B}}$ всех $\mathbb{B}$-значных множеств в $M$ вместе с соответствием $[\![\cdot]\!]$ называется *булевозначной моделью* теории множеств.

Осталось проверить, что в $M^{\mathbb{B}}$ выполнены аксиомы ZFC (т.е. для всякой аксиомы $\varphi$ имеем $[\![\varphi]\!] = \mathbf{1}$), и что правила логического вывода работают в $M^{\mathbb{B}}$ должным образом (т.е. что если $[\![\varphi]\!] = \mathbf{1}$ и $\psi$ — логическое следствие формулы $\varphi$, то $[\![\psi]\!] = \mathbf{1}$). Проверка несложная, хотя в некоторых случаях требует длинных выкладок. Она подробно проведена в книге

John L. Bell, *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2005).

## Факторизация по ультрафильтру

Булевозначная модель $M^{\mathbb{B}}$ превращается в обычную модель ZFC с помощью факторизации.

Выберем множество $U \subset B$ (возможно, $U \notin M$), которое содержит образы $[\![\varphi]\!]$ тех утверждений, истинности которых мы добиваемся; оно будет играть роль истинностной оценки, так что для произвольного $\varphi$ $U$ должно содержать либо $[\![\varphi]\!]$, либо $\neg[\![\varphi]\!]$.

Другими словами, для любого $x \in B$ должно быть либо $x \in U$, либо $\neg x \in U$ ($\neg$ в смысле $\mathbb{B}$). Кроме того, поскольку мы хотим трактовать принадлежность множеству $U$ как истинность, должны выполняться условия:

1. $\mathbf{1} \in U$
2. $\mathbf{0} \notin U$
3. если $x \in U$ и $y \in U$, то $x \wedge y \in U$
4. если $x \in U$ и $x \leq y$ (т.е. $x \wedge y = x$), то $y \in U$
5. для каждого $x \in B$ либо $x \in U$, либо $\neg x \in U$

Подмножество булевой алгебры (и любого ч.у.м.) с этими свойствами называется *ультрафильтром* (а со свойствами 1–4 — *фильтром*; всякий фильтр содержится в ультрафильтре).

После того как выбран ультрафильтр $U$, строится *фактормодель* $M^{\mathbb{B}}/U$. Её элементы — классы эквивалентности элементов $M^{\mathbb{B}}$ относительно отношения эквивалентности

$$x \sim_U y \iff [\![x = y]\!] \in U.$$

Класс эквивалентности элемента $x \in M^{\mathbb{B}}$ будем обозначать $x^U$. На $M^{\mathbb{B}}/U$ возникает предикат $\in_U$:

$$x^U \in_U y^U \iff [\![x \in y]\!] \in U.$$

$M^{\mathbb{B}}/U$ с этим предикатом — модель ZFC.

Модель $M^{\mathbb{B}}/U$ не обязана быть стандартной (роль отношения принадлежности играет $\in_U$). Чтобы получить СТМ, нужно начать с СТМ $M$ и в качестве $U$ взять *генерический* ультрафильтр, т.е. ультрафильтр, являющийся генерическим множеством в $B$. Модель $M^{\mathbb{B}}/U$, которая получается в результате, обычно обозначается $M[U]$.

Имеется стандартная процедура пополнения любого ч.у.м. до полной булевой алгебры. Таким образом, чтобы построить СТМ, в которой нарушается CH, достаточно взять счётную СТМ $M$, коэновское ч.у.м. $\mathbb{P} \in M$, пополнить $\mathbb{P}$ до полной (в $M$) булевой алгебры $\mathbb{B} \in M$ и факторизовать $M^{\mathbb{B}}$ по генерическому ультрафильтру $U \subset B$ ($U \notin M$).

## Причём тут вынуждение

Заметим, что ультрафильтр $U$ выполняет сразу две функции: это генерическое множество, добавляемое к $M$, и список высказываний, истинных в $M[U]$. По определению ультрафильтра если $p \leq [\![\varphi]\!]$, то высказывание $\varphi$ должно быть истинным в $M[U]$ для любого ультрафильтра $U \ni p$, так что отношение $p \Vdash \varphi$ можно формально определить так:

$$p \Vdash \varphi, \quad \text{если} \quad p \leq [\![\varphi]\!].$$

Таким образом, при булевозначном подходе можно обойтись вообще без символа $\Vdash$.

Булевозначный и коэновский подходы более или менее равноценны. Имена и интерпретиации в коэновском подходе — аналог «нечётких множеств» и факторизации. Определение отношения $\Vdash^*$ соответствует определению соответствия $[\![\cdot]\!]$ формулами 1–7. Эти формулы проще формул в определении $\Vdash$, зато в коэновском подходе можно иметь дело непосредственно с частично упорядоченными множествами и генерическими фильтрами, не пополняя их до булевых алгебр и ультрафильтров.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ