Линейная алгебра и геометрия

Лекция 20. Тензоры в евклидовом пространстве. Опускание и поднятие индексов. Симметрирование и альтернирование.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Тензоры в евклидовом пространстве

Опускание и поднятие индексов

Если V — евклидово пространство, то между V и V^* имеется канонический изоморфизм $\varphi\colon V \to V^*$, действующий по правилу $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ для всякого $\boldsymbol{x} \in V$. Обратный изоморфизм φ^{-1} действует по правилу $\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{f}}$, где $(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Пусть
$$\boldsymbol{t}\colon \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз}} \to K$$
— полилинейная функция (тензор типа (p, q)). Заменим ковекторы $\boldsymbol{f} \in V^*$ соответствующими векторами $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{f}} \in V$. Получим полилинейную функцию
$$\boldsymbol{t}'\colon \underbrace{V \times \dots \times V}_{p+q \text{ раз}} \to K,$$
зависящую от $p + q$ векторов.

Пусть $t^{m_1 \dots m_q}_{k_1 \dots k_p} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{m_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{m_q})$ — координаты тензора $\boldsymbol{t}$ и $t'_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_{p+q}} = \boldsymbol{t}'(\boldsymbol{e}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_p}, \boldsymbol{e}_{k_{p+1}}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_{p+q}})$ — координаты тензора $\boldsymbol{t}'$. Если базис $\boldsymbol{E}$ ортонормированный, то $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^i} = \boldsymbol{e}_i$, поэтому в этом случае
$$t'_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_{p+q}} = t^{k_{p+1} \dots k_{p+q}}_{k_1 \dots k_p}.$$

В случае произвольного базиса скалярное произведение определяется формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \ldots, x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где G — матрица Грама скалярного произведения: $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Скалярное произведение — тензор типа $(2, 0)$, который называется метрическим тензором, и g_{ij} — его компоненты.

Поскольку канонический изоморфизм $\varphi\colon V \to V^*$ определяется правилом $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$, имеем $\varphi(\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = g_{ij}x^j$. Значит, координаты функционала $\varphi(\boldsymbol{e}_i)$ во взаимном базисе суть $g_{i1}, \ldots, g_{in}$, т.е. $G = G^T$ — матрица изоморфизма φ, а G^{-1} — матрица обратного изоморфизма φ^{-1}:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = g_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}^j \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{e}_i = g_{ij}\varphi^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}^j) = g_{ij}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^j}.$$

Таким образом, скалярное произведение на сопряжённом пространстве, относительно которого φ — изоморфизм евклидовых пространств (т.е. $(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$), имеет матрицу G^{-1}:

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = (\varphi^{-1}(\boldsymbol{f}), \varphi^{-1}(\boldsymbol{g})) = (f_1, \ldots, f_n)(G^{-1})^T G G^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_n) G^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

так что координаты g^{ij} соответствующего метрического тензора равны координатам матрицы G^{-1}.

Отождествляя векторы $\boldsymbol{v_f}$ с ковекторами $\boldsymbol{f}$, подставим вместо последних q векторов $\boldsymbol{e}_i$ их выражения $\boldsymbol{e}_i = g_{ij}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^j}$ и заменим $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^j}$ на $\boldsymbol{\varepsilon}^j = \varphi(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^j})$:

$$t'_{k_1\ldots k_p k_{p+1}\ldots k_{p+q}} = \boldsymbol{t}'(\boldsymbol{e}_{k_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{k_p},\boldsymbol{e}_{k_{p+1}},\ldots,\boldsymbol{e}_{k_{p+q}}) =$$
$$= \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_{k_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{k_p}; g_{k_{p+1}i_1}\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1},\ldots,g_{k_{p+q}i_q}\boldsymbol{\varepsilon}^{i_q}) = g_{k_{p+1}i_1}\cdot\ldots\cdot g_{k_{p+q}i_q}\cdot t^{i_1\ldots i_q}_{k_1\ldots k_p}.$$

Правило $\boldsymbol{t}\mapsto\boldsymbol{t}'$ определяет изоморфизм

$$T^q_p \rightleftarrows T_{p+q}, \qquad \text{т.е.} \qquad \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{p \text{ раз}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{q \text{ раз}} \rightleftarrows \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{p+q \text{ раз}},$$

при котором каждому тензору с координатами $t^{k_{p+1}\ldots k_{p+1}}_{k_1\ldots k_p}$ соответствует тензор с координатами $t'_{k_1\ldots k_p k_{p+1}\ldots k_{p+q}} = g_{i_1k_{p+1}}\cdot\ldots\cdot g_{i_qk_{p+q}}\cdot t^{i_1\ldots i_q}_{k_1\ldots k_p}$. Он называется опусканием индексов.

Аналогично определяется операция поднятия индексов $T^q_p \to T^{p+q}$. Координаты меняются по формуле $t'^{k_1\ldots k_p k_{p+1}\ldots k_{p+1}} = g^{k_1i_1}\cdot\ldots\cdot g^{k_pi_p}\cdot t^{k_{p+1}\ldots k_{p+q}}_{i_1\ldots i_p}$, где $g^{ij} = (\boldsymbol{\varepsilon}^i,\boldsymbol{\varepsilon}^j)$ — компоненты матрицы G^{-1}.

Поднимать и опускать индексы можно не все, а некоторую часть, например, только один индекс. Заменяя один из сомножителей в $(V^*)^q$ на V, мы сомножитель V перемещаем в произведение V^p, часто на последнее место, но не обязательно.

Опускание одного индекса определяется контравариантным индексом β, который опускается в α-ый ковариантный индекс. Положим

$$\Phi\colon V^{p+1}\times(V^*)^{q-1} \to V^p\times(V^*)^q, \quad (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha-1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{\alpha+1}, \ldots, \boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{\beta-1}, \boldsymbol{f}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_q) \mapsto$$

После опускания контравариантного β-го индекса в ковариантный α-ый индекс тензора $\boldsymbol{t}$ типа (p, q) получаем тензор $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} \circ \Phi$ типа $(p+1, q-1)$:

$$\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha-1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{\alpha+1}, \ldots, \boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{\beta-1}, \boldsymbol{f}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_q) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{\beta-1}, \varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{f}$$

Тензорное произведение евклидовых пространств

Пусть E_1 и E_2 — два евклидовых пространства размерностей n_1 и n_2. На $E_1 \otimes E_2$ определим функцию от двух аргументов. Положим

$$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})_1 \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})_2.$$

Для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k \otimes \boldsymbol{y}_k$ и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m \otimes \boldsymbol{v}_m$ положим

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{v}_j).$$

Эта функция определена корректно (принимает равные значения на равных векторах) и является скалярным произведением.

Пространство $E_1 \otimes E_2$ с таким скалярным произведением называется тензорным произведением евклидовых пространств E_1 и E_2.

Если $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n_1}\}$ и $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n_2}\}$ — ортонормированные базисы в E_1 и E_2, то $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : i \leqslant n_1, j \leqslant n_2\}$ — ортонормированный базис в $E_1 \otimes E_2$.

Дальше всегда предполагается, что V — n-мерное векторное пространство над полем K, хотя почти все конструкции и утверждения без изменений переносятся на бесконечномерные пространства. Предположение конечномерности действительно нужно только в тех местах, где упоминаются сопряжённые пространства.

Симметрирование и альтернирование

Будем рассматривать только тензоры типа $(p,0)$ (и $(0,q)$ — по аналогии) и поле характеристики 0.

Пусть $\boldsymbol{t}$ — произвольный тензор типа $(p,0)$ и $\pi \in S_p$ — подстановка. Положим

$$\boldsymbol{t}_\pi(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\pi(1)},\dots,\boldsymbol{x}_{\pi(p)}).$$

Получили отображение

$$\vartheta_\pi \colon T^0_p(V) \to T^0_p(V), \qquad \boldsymbol{t} \mapsto \boldsymbol{t}_\pi.$$

Это невырожденный линейный оператор на $T^0_p(V)$. Имеем $\vartheta_\pi \circ \vartheta_\sigma = \vartheta_{\pi\sigma}$, так что $\pi \mapsto \vartheta_\pi$ — действие группы S_p на $T^0_p(V)$.

Определение

Тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(p,0)$ называется симметричным (или симметрическим), если $\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}$ для всех $\pi \in S_p$.

Множество симметричных тензоров в пространстве $T_p^0(V)$ образует подпространство. Обозначим его $ST_p(V)$.

Если $\boldsymbol{t}$ — симметричный тензор типа $(p,0)$, то его координаты в любом базисе *симметричны*, т.е. не меняются при любой перестановке индексов: $t_{i_1\dots i_p} = t_{\pi(i_1)\dots\pi(i_p)}$ для всех $\pi \in S_p$.

Замечание

Тензор симметричен $\iff$ его координаты в некотором (любом) базисе симметричны.

Определение

Симметрирование (или симметризация) тензоров из $T_p^0(V)$ — это линейный оператор Sym на $T_p^0(V)$, определённый правилом

$$\mathrm{Sym}\colon \boldsymbol{t} \mapsto \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \vartheta_\pi(\boldsymbol{t}).$$

Другими словами, $\mathrm{Sym}\,\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\pi(1)},\dots,\boldsymbol{x}_{\pi(p)})$. Координаты в любом базисе вычисляются по тому же правилу: $(\mathrm{Sym}\,t)_{i_1\dots i_p} = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\pi\in S_p} t_{\pi(1)\dots\pi(p)}$.

Предложение

1. $\operatorname{Im}\mathrm{Sym} = ST_p(V)$, 2. $\mathrm{Sym}^2 = \mathrm{Sym}$.

Доказательство. Для $\boldsymbol{\sigma} \in S_p$ и $\boldsymbol{t} \in T_p^0(V)$ имеем

$$\vartheta_\sigma(\mathrm{Sym}\,\boldsymbol{t}) = \vartheta_\sigma\Big(\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\vartheta_\pi(\boldsymbol{t})\Big) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\vartheta_{\sigma\pi}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}\vartheta_\tau(\boldsymbol{t}) = \mathrm{Sym}\,\boldsymbol{t}.$$

Для любого $\boldsymbol{t} \in ST_p(V)$ имеем $\mathrm{Sym}\,\boldsymbol{t} = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$. $\square$

Предложение

$\dim ST_p(V) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$ *(число сочетаний с повторениями из n по p).*

Доказательство. Базис в $ST_p(V)$ составляют элементы $\mathrm{Sym}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{i_p})$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n$, поскольку система всех таких элементов полна (так как она состоит из образов элементов базиса в $T_p^0(V)$) и линейно независима — это доказывается с помощью леммы о линейной независимости точно так же, как линейная независимость всех элементов вида $\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{i_p}$ в $T_p^0(V)$. $\square$

Определение

Тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(p,0)$ называется кососимметричным (кососимметрическим, антисимметричным, знакопеременным), если при перестановке любых двух аргументов функция $\boldsymbol{t}$ меняет знак: $\boldsymbol{t}(\dots,\boldsymbol{v},\dots,\boldsymbol{u},\dots) = -\boldsymbol{t}(\dots,\boldsymbol{u},\dots,\boldsymbol{v},\dots)$.

Равносильное условие: $\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn}\pi\,\boldsymbol{t}$ для всех $\pi \in S_p$.

Поскольку поле K имеет характеристику $0 \neq 2$, тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(p,0)$ кососимметричен $\iff$ значение $\boldsymbol{t}$ в наборе аргументов, среди которых есть хотя бы два совпадающих, равно нулю: $\boldsymbol{t}(\dots,\boldsymbol{v},\dots,\boldsymbol{v},\dots) = 0$.

Множество кососимметричных тензоров в пространстве $T_p^0(V)$ образует подпространство. Обозначим его $\bigwedge T_p(V)$.

Если $\boldsymbol{t}$ — кососимметричный тензор типа $(p,0)$, то при перестановке индексов его координаты в любом базисе умножаются на ± 1 (в зависимости от знака перестановки): $t_{i_1\dots i_p} = \operatorname{sgn}\pi \cdot t_{\pi(i_1)\dots\pi(i_p)}$ для всех $\pi \in S_p$. Всякая координата с двумя одинаковыми индексами равна нулю.

Замечание

Тензор $\boldsymbol{t}$ кососимметричен $\iff$ его координаты в некотором (любом) базисе подчиняются правилу $t_{i_1\dots i_p} = \operatorname{sgn}\pi \cdot t_{\pi(i_1)\dots\pi(i_p)}$ для всех $\pi \in S_p$.

Определение

Альтернирование тензоров из $T^0_p(V)$ — это линейный оператор Alt на $T^0_p(V)$, определённый правилом

$$\mathsf{Alt}\colon \boldsymbol{t} \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \, \vartheta_\pi(\boldsymbol{t}).$$

Другими словами, $\mathsf{Alt}\, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\pi(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\pi(p)})$.
Координаты в любом базисе вычисляются по тому же правилу:

$$(\mathsf{Alt}\, t)_{i_1 \ldots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \, t_{\pi(1) \ldots \pi(p)}.$$

Предложение

1. $\operatorname{Im}\operatorname{Alt} = \bigwedge T_p(V)$,
2. $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt}$,
3. $\operatorname{Alt}\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn}\pi\operatorname{Alt}\boldsymbol{t}$ *для всех* $\pi \in S_p$ *и* $\boldsymbol{t} \in T_p^0(V)$.

Доказательство. 1 и 2: Для $\sigma \in S_p$ и $\boldsymbol{t} \in T_p^0(V)$ имеем

$$\vartheta_\sigma(\operatorname{Alt}\boldsymbol{t}) = \vartheta_\sigma\left(\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sgn}\pi\vartheta_\pi(\boldsymbol{t})\right) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sgn}\pi\vartheta_\sigma(\vartheta_\pi(\boldsymbol{t})) =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}(\operatorname{sgn}\sigma)^2\operatorname{sgn}\pi\vartheta_{\sigma\pi}(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn}\sigma\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\pi\vartheta_{\sigma\pi}(\boldsymbol{t}) =$$
$$= \operatorname{sgn}\sigma\frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}\operatorname{sgn}\tau\vartheta_\tau(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{Alt}\boldsymbol{t}.$$

Для любого $\boldsymbol{t} \in \bigwedge T_p(V)$ имеем $\operatorname{Alt}\boldsymbol{t} = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sgn}\pi\vartheta_\pi(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}(\operatorname{sgn}\pi)^2\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$.

3:
$$\operatorname{Alt}\vartheta_\sigma(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sgn}\pi\vartheta_\pi(\vartheta_\sigma(\boldsymbol{t})) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sgn}\pi(\operatorname{sgn}\sigma)^2\vartheta_\pi(\vartheta_\sigma(\boldsymbol{t})) =$$
$$= \operatorname{sgn}\sigma\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\sigma\vartheta_\pi(\vartheta_\sigma(\boldsymbol{t})) = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}\operatorname{sgn}\tau\vartheta_\tau(\boldsymbol{t}) = \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{Alt}\boldsymbol{t}.$$

□

Предложение

$\dim \bigwedge T_p(V) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *(число сочетаний из n по p).*

Доказательство. Базис в $\bigwedge T_p(V)$ составляют элементы $\mathrm{Alt}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{i_p})$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$. □

Замечание

Операции симметрирования и альтернирования являются проектированиями пространства $T_p^0(V)$ на подпространства $ST_p(V)$ и $\bigwedge T_p(V)$ соответственно.

Упражнения

1. Докажите, что $T_2(V) = ST_2(V) \oplus \bigwedge T_2(V)$.
2. Покажите, что для $p > 2$ $T_p(V) \neq ST_p(V) + \bigwedge T_p(V)$.

Предложение

Операции Sym *и* Alt *ассоциативны и дистрибутивны.*

Лемма

Для любых тензоров $\boldsymbol{f} \in T^0_k(V)$ *и* $\boldsymbol{g} \in T^0_m(V)$

1. $\operatorname{Sym}((\operatorname{Sym} \boldsymbol{f}) \otimes \boldsymbol{g}) = \operatorname{Sym}(\boldsymbol{f} \otimes (\operatorname{Sym} \boldsymbol{g})) = \operatorname{Sym}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})$,
2. $\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} \boldsymbol{f}) \otimes \boldsymbol{g}) = \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f} \otimes (\operatorname{Alt} \boldsymbol{g})) = \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})$.

Доказательство. Докажем первую половину 2 (остальное аналогично). По определению $\operatorname{Alt} \boldsymbol{f} = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi \, \vartheta_\pi(\boldsymbol{f})$. Линейность альтернирования $\Longrightarrow$

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} \boldsymbol{f}) \otimes \boldsymbol{g}) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{Alt}(\vartheta_\pi(\boldsymbol{f}) \otimes \boldsymbol{g}).$$

Пусть $\pi \in S_k$. Положим $\tilde{\pi}(i) = \pi(i)$ для $i \leqslant k$, $\tilde{\pi}(i) = i$ для $k < i \leqslant k + m$. Имеем $\vartheta_\pi(\boldsymbol{f}) \otimes \boldsymbol{g} = \vartheta_{\tilde{\pi}}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})$. Получаем

$$\operatorname{Alt}(\vartheta_\pi(\boldsymbol{f}) \otimes \boldsymbol{g}) = \operatorname{Alt}(\vartheta_{\tilde{\pi}}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})) = \operatorname{sgn} \tilde{\pi} \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) \qquad \Longrightarrow$$

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} \boldsymbol{f}) \otimes \boldsymbol{g}) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \tilde{\pi} \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) = \operatorname{Alt}(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}). \quad \square$$

* * *

Для тензоров типа $(0, q)$ теория совершенно аналогична.