Линейная алгебра и геометрия

Лекция 19. Свёртка.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Свёртка

Пусть $V_1, \dots, V_m$ векторные пространства, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha \neq \beta$ и $V_\beta = V_\alpha^*$. Отображение

$$V_1 \times \dots \times V_m \to V_1 \otimes \dots \otimes V_{\alpha-1} \otimes V_{\alpha+1} \times \dots \times V_{\beta-1} \otimes V_{\beta+1} \otimes \dots \otimes \dots \otimes V_m,$$

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \mapsto \mathbf{x}_\beta(\mathbf{x}_\alpha)\ \mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\alpha-1} \otimes \mathbf{x}_{\alpha+1} \times \dots \otimes \mathbf{x}_{\beta-1} \otimes \mathbf{x}_{\beta+1} \otimes \dots \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_m$$

полилинейно, поэтому существует единственное линейное отображение

$$\mathcal{C} \colon V_1 \otimes \dots \otimes V_m \to V_1 \otimes \dots \otimes V_{\alpha-1} \otimes V_{\alpha+1} \times \dots \times V_{\beta-1} \otimes V_{\beta+1} \otimes \dots \otimes \dots \otimes V_m,$$

$$\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_m \mapsto \mathbf{x}_\beta(\mathbf{x}_\alpha)\ \mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\alpha-1} \otimes \mathbf{x}_{\alpha+1} \times \dots \otimes \mathbf{x}_{\beta-1} \otimes \mathbf{x}_{\beta+1} \otimes \dots \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_m.$$

Пусть $p, q > 0$, $\alpha \in \{1, \dots, p\}$ и $\beta \in \{1, \dots, q\}$. Отображение

$$\mathcal{C}^{\alpha}_{\beta} \colon T^q_p(V) \to T^{q-1}_{p-1}(V), \;\; \boldsymbol{f}^1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{f}^p \otimes \boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_q$$
$$\mapsto \boldsymbol{f}^{\alpha}(\boldsymbol{x}_{\beta})\; \boldsymbol{f}^1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{f}^{\alpha-1} \otimes \boldsymbol{f}^{\alpha+1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{f}^p \otimes \boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_{\beta-1} \otimes \boldsymbol{x}_{\beta+1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_q$$

линейно.

Пусть $\boldsymbol{t}$ — тензор типа (p, q), то есть $\boldsymbol{t} \in T^q_p(V)$. Тензор $\bar{\boldsymbol{t}} = \mathcal{C}^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{t})$ называется свёрткой тензора $\boldsymbol{t}$ по α-му ковариантному индексу и β-му контравариантному индексу. Это тензор типа $(p-1, q-1)$.

Пусть
$$\boldsymbol{t} = t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q}.$$
Тогда
$$\bar{\boldsymbol{t}} = t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\ \mathcal{C}^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q})$$
$$= t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i_\alpha}(\boldsymbol{e}_{j_\beta})\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_{\alpha-1}}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_{\alpha+1}}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_{\beta-1}}\otimes\boldsymbol{e}_{j_{\beta+1}}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q}.$$
Вычислим компоненты сверки $\bar{\boldsymbol{t}}$:
$$\bar{t}^{j_1\dots j_{\beta-1}j_{\beta+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{\alpha-1}i_{\alpha+1}\dots i_p} = t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\boldsymbol{\varepsilon}^{i_\alpha}(\boldsymbol{e}_{j_\beta}) = t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\delta^{i_\alpha}_{j_\beta} = t^{j_1\dots j_{\beta-1}kj_{\beta+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{\alpha-1}ki_{\alpha+1}\dots i_p}.$$
Получаем
$$\bar{\boldsymbol{t}} = t^{j_1\dots j_{\beta-1}kj_{\beta+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{\alpha-1}ki_{\alpha+1}\dots i_p}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_{\alpha-1}}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_{\alpha+1}}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_{\beta-1}}\otimes\boldsymbol{e}_{j_{\beta+1}}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q}.$$

Предложение

Для $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{p-1} \in V$ *и* $\boldsymbol{g}^1, \dots, \boldsymbol{g}^{q-1} \in V^*$,

$$\bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{p-1}; \boldsymbol{g}^1, \dots, \boldsymbol{g}^{q-1}) =$$
$$= \boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{\alpha-1}, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{y}_\alpha, \dots, \boldsymbol{y}_{p-1}; \boldsymbol{g}^1, \dots, \boldsymbol{g}^{\beta-1}, \boldsymbol{\varepsilon}^k, \boldsymbol{g}^\beta, \dots, \boldsymbol{g}^{q-1}).$$

Доказательство. Так как любой тензор является суммой разложимых тензоров, то достаточно доказать предложения для случая, когда $\boldsymbol{t}$ разложим:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{f}^1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{f}^p \otimes \boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_q.$$

Тогда

$$\bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{p-1}; \boldsymbol{g}^1, \dots, \boldsymbol{g}^{q-1}) =$$
$$\boldsymbol{f}^\alpha(\boldsymbol{x}_\beta)\,(\boldsymbol{f}^1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{f}^{\alpha-1} \otimes \boldsymbol{f}^{\alpha+1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{f}^p \otimes \boldsymbol{x}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_{\beta-1} \otimes \boldsymbol{x}_{\beta+1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{x}_q)$$
$$(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{p-1}; \boldsymbol{g}^1, \dots, \boldsymbol{g}^{q-1})$$
$$= \boldsymbol{f}^\alpha(\boldsymbol{x}_\beta)\,\boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{y}_1) \dots \boldsymbol{f}^{\alpha-1}(\boldsymbol{y}_{\alpha-1}) \boldsymbol{f}^{\alpha+1}(\boldsymbol{y}_\alpha) \dots \boldsymbol{f}^p(\boldsymbol{y}_{p-1})$$
$$\boldsymbol{g}^1(\boldsymbol{x}_1) \dots \boldsymbol{g}^{\beta-1} \boldsymbol{x}_{\beta-1} \boldsymbol{g}^\beta(\boldsymbol{x}_{\beta+1}) \dots \boldsymbol{g}_{q-1}(\boldsymbol{x}_q)$$

Учитывая $\boldsymbol{f}^{\alpha}(\boldsymbol{x}_{\beta}) = f^{\alpha}_{k} x^{k}_{\alpha} = \boldsymbol{f}^{\alpha}(\boldsymbol{e}_{k})\boldsymbol{\varepsilon}^{k}(\boldsymbol{x}_{\beta})$, где $\boldsymbol{f}^{\alpha} = f^{\alpha}_{k}\boldsymbol{\varepsilon}^{k}$ и $\boldsymbol{x}_{\beta} = x^{k}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{k}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_{p-1};\boldsymbol{g}^1,\dots,\boldsymbol{g}^{q-1}) = \\
&\qquad = \boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{y}_1)\dots\boldsymbol{f}^{\alpha-1}(\boldsymbol{y}_{\alpha-1})\boldsymbol{f}^{\alpha}(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{f}^{\alpha+1}(\boldsymbol{y}_{\alpha})\dots\boldsymbol{f}^{p}(\boldsymbol{y}_{p-1}) \\
&\qquad\quad \boldsymbol{g}^1(\boldsymbol{x}_1)\dots\boldsymbol{g}^{\beta-1}\boldsymbol{x}_{\beta-1}\boldsymbol{\varepsilon}^{k}(\boldsymbol{x}_{\beta})\boldsymbol{g}^{\beta}(\boldsymbol{x}_{\beta+1})\dots\boldsymbol{g}_{q-1}(\boldsymbol{x}_q) \\
&\qquad\quad = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_{\alpha-1},\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{y}_{\alpha},\dots,\boldsymbol{y}_{p-1};\boldsymbol{g}^1,\dots,\boldsymbol{g}^{\beta-1},\boldsymbol{\varepsilon}^{k},\boldsymbol{g}^{\beta},\dots,\boldsymbol{g}^{q-1}).
\end{aligned}$$

$\square$

Примеры

1. Свёртка тензора $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ (где $\boldsymbol{g}\in V^*$ и $\boldsymbol{v}\in V$) по единственным возможным индексам есть скаляр $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^i(\boldsymbol{v}) = g_i\cdot v^i = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$.
2. Свёртка тензора $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\mathcal{A}\boldsymbol{x})$ (где $\mathcal{A}$ — оператор) по единственным возможным индексам есть скаляр $\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i)$ — след оператора $\mathcal{A}$.
3. Свёртка тензора $\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\mathcal{A}\boldsymbol{x})$ для оператора $\mathcal{A}$ и $\boldsymbol{v}\in V$, по единственному ковариантному индексу и второму контравариантному индексу есть вектор $\boldsymbol{u}$ такой, что для всякого $\boldsymbol{f}\in V^*$
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varepsilon}^i) = \boldsymbol{f}(\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i)\cdot v^i = \boldsymbol{f}(\mathcal{A}(v^i\boldsymbol{e}_i)) = \boldsymbol{f}(\mathcal{A}\boldsymbol{v}),\quad$ т.е. $\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\boldsymbol{v}$.

4. Тензорное произведение двух операторов $\mathcal{A}\colon V \to V$ и $\mathcal{B}\colon V \to V$ с матрицами $A = (a_i^j)$ и $B = (b_i^j)$ (номера столбцов снизу) — это оператор $V \otimes V \to V \otimes V$, заданный на базисных векторах правилом $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = a_i^r b_j^s (\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_s)$. Его можно трактовать как тензор $\boldsymbol{\tau}$ типа $(1,1)$ на $V \otimes V$, заданный на базисных векторах правилом $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j; \boldsymbol{\varepsilon}^r \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^s) = a_i^r b_j^s$, или как тензор $\boldsymbol{t}$ типа $(2,2)$ на V, заданный на базисных векторах правилом $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j; \boldsymbol{\varepsilon}^r, \boldsymbol{\varepsilon}^s) = a_i^r b_j^s$.
Его свёртки:
   - по первому ковариантному индексу и первому контравариантному индексу: $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{\varepsilon}^s) = a_k^k b_j^s$ — это оператор с матрицей $(\operatorname{tr} A) \cdot B$;
   - по первому ковариантному индексу и второму контравариантному индексу: $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{\varepsilon}^r) = a_k^r b_j^k$ — это оператор с матрицей AB (т.е. оператор $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$);
   - по второму ковариантному индексу и первому контравариантному индексу: $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{\varepsilon}^s) = a_i^k b_k^s$ — это оператор с матрицей BA;
   - по второму ковариантному индексу и второму контравариантному индексу: $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{\varepsilon}^r) = a_i^r b_k^k$ — это оператор с матрицей $(\operatorname{tr} B) \cdot A$.