

Линейная алгебра и геометрия

Лекция 18. Примеры тензорных произведений. Тензорное произведение отображений.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Тензорное произведение как факторпространство

Пусть V и W — любые векторные пространства над одним и тем же полем K . Обозначим ноль и сложение в V символами $\mathbf{0}_V$ и $\underset{V}{+}$, а ноль и сложение в W — символами $\mathbf{0}_W$ и $\underset{W}{+}$.

Рассмотрим векторное пространство U над K с базисом $V \times W$. Его элементы — $\mathbf{0}$ и всевозможные формальные линейные комбинации

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + \lambda_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) + \dots + \lambda_k(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k),$$

т.е. просто неупорядоченные наборы $\{\lambda_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1), \lambda_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2), \dots, \lambda_k(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k)\}$, где $k \in \mathcal{N}$ и для $i \leq k$ $\lambda_i \in K \setminus \{0\}$, $\mathbf{v}_i \in V$ и $\mathbf{w}_i \in W$, причём $(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) \neq (\mathbf{v}_j, \mathbf{w}_j)$ для $i \neq j$. Сложение $+$ здесь не имеет никакого отношения к операциям в V и W ; пары вида (\mathbf{v}, \mathbf{w}) — просто элементы базиса, никак не связанные друг другом в пространстве U .

Пространство U можно представить как векторное пространство функций $V \times W \rightarrow K$, принимающих ненулевые значения λ лишь в конечном числе точек (\mathbf{v}, \mathbf{w}) .

Выписанная выше формальная линейная комбинация соответствует функции, которая принимает значения λ_i в точках $(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i)$ для $i \leq k$, а во всех остальных точках равна 0. Функции складываются как обычно (поточечно), и сложение формальных линейных комбинаций определяется соответственно.

Пусть R — подпространство пространства U , порождённое левыми частями *определяющих соотношений* тензорного произведения:

$$\textcircled{1} (\mathbf{v}' \underset{V}{+} \mathbf{v}'', \mathbf{w}) - ((\mathbf{v}', \mathbf{w}) + (\mathbf{v}'', \mathbf{w})) = \mathbf{0} \quad (\text{здесь } \underset{V}{+} \text{ — суммирование в } V)$$

$$\textcircled{2} (\mathbf{v}, \mathbf{w}' \underset{W}{+} \mathbf{w}'') - ((\mathbf{v}, \mathbf{w}') + (\mathbf{v}, \mathbf{w}'')) = \mathbf{0} \quad (\text{здесь } \underset{W}{+} \text{ — суммирование в } W)$$

$$\textcircled{3} (\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\mathbf{v}, \lambda \mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

$$\textcircled{4} \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

для всех $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ и $\lambda \in K$.

► унив. св-во

Тензорное произведение $V \otimes W$ — это факторпространство U/R . Образ элемента (\mathbf{v}, \mathbf{w}) при естественном отображении $U \rightarrow U/R = V \otimes W$ обозначается $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$.

В силу определяющих соотношений отображение $V \times W \rightarrow V \otimes W$, определённое правилом $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, билинейно. Если $\{\mathbf{e}_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\{\mathbf{e}_\beta : \beta \in B\}$ — базисы пространств V и W , то система $\{\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$ является — базисом пространства $V \otimes W$ (её полнота вытекает из билинейности операции \otimes , а линейная независимость доказывается точно так же, как в конечномерном случае — надо для каждой пары индексов $\alpha \in A$, $\beta \in B$ рассмотреть линейную функцию $T^{ab}: V \otimes W \rightarrow K$, которая каждому элементу вида $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \in V \otimes W$ ставит в соответствие произведение α -й и β -й координат $v^\alpha \cdot w^\beta$ (а на остальные элементы пространства $V \otimes W$ продолжается по линейности) и применить лемму о линейной независимости).

Тензорное произведение произвольного конечного числа векторных пространств определяется по аналогии.

Универсальное свойство является характеристическим — любое другое пространство с этим свойством совпадает с $V \otimes W$ (с точностью до сохраняющего операцию тензорного произведения изоморфизма). Более того:

Предложение

Если T — векторное пространство над K , для которого существует билинейное отображение $\tilde{\Theta}: V \times W \rightarrow T$, $(x, y) \mapsto x\tilde{\Theta}y$, с тем свойством, что для любой билинейной функции $b: V \times W \rightarrow K$ существует единственный линейный функционал $\ell: T \rightarrow K$, удовлетворяющий условию $b = \ell \circ \tilde{\Theta}$, то существует изоморфизм $\varphi: V \otimes W \rightarrow T$ такой, что

$$\varphi(x \otimes y) = x\tilde{\Theta}y \quad \text{для всех } x \in V \text{ и } y \in W.$$

Доказательство. В пространстве $V \otimes W$ имеется базис $\{e \otimes e : e \in E, e \in E\}$. На этом базисе φ определяется правилом

$$\varphi(e \otimes e) = \Psi(e, e) \quad \text{для всех } e \in E \text{ и } e \in E.$$

Векторы $\varphi(e \otimes e)$ линейно независимы в T в силу леммы о линейной независимости и составляют базис пространства T в силу условия о единственности. □

На тензорное произведение произвольного конечного числа векторных пространств это утверждение распространяется по аналогии.

Примеры

1. $K[x, y] = K[x] \otimes K[y]$

$\otimes: K[x] \times K[y] \rightarrow K[x, y]$ определяется правилом $(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y)$.

2. Пусть $\dim V = n$, и $\dim W = m$ и $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$, $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^m\}$ — взаимные с \mathbf{E} и \mathbf{E} базисы в V^* и W^* . Для $\mathbf{f} \in V^*$ и $\mathbf{g} \in W^*$ положим $(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y})$.

Тогда \otimes — билинейное отображение из $V^* \otimes W^*$ в пространство $\mathcal{B}(V, W)$ билинейных функций $V \times W \rightarrow K$, и $(\epsilon^i \otimes \epsilon^j)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^i \cdot y^j$ для $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{y} \in W$.
Всякая билинейная функция b на $V \times W$ однозначно представляется в виде $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum b_{ij} x^i y^j \implies V^* \otimes W^* = \mathcal{B}(V, W)$.

3. Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$ и $\mathcal{E} = \{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ — взаимный с \mathbf{E} базис в V^* .

Для $\mathbf{f} \in V^*$ и $\mathbf{w} \in W$ пусть $\mathbf{f} \otimes \mathbf{w}$ — линейное отображение $V \rightarrow W$, определённое правилом $(\mathbf{f} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{w}$ для $\mathbf{x} \in V$. Отображение $\otimes: V^* \times W \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ билинейно ($\mathcal{L}(V, W)$ — векторное пространство линейных отображений $V \rightarrow W$). Имеем $\epsilon^i \otimes \mathbf{e}_j = E_{ji}$ (матричная единица).
Матричные единицы образуют базис в $\mathcal{L}(V, W) \implies \mathcal{L}(V, W) = V^* \otimes W$.

4. Пусть L — расширение поля K . Поле L можно рассматривать как векторное пространство над K . Положим $V(L) = L \otimes V$. Это векторное пространство над K . Его можно превратить в векторное пространство над L , определив умножение на элементы L правилом

$$\lambda(\mu \otimes \mathbf{v}) = \lambda\mu \otimes \mathbf{v} \quad \text{для } \lambda, \mu \in L, \mathbf{v} \in V.$$

Пространство V можно вложить в $V(L)$, отождествив каждый вектор $\mathbf{v} \in V$ с $1 \otimes \mathbf{v} \in V(L)$. Тогда $\lambda\mathbf{v}$ отождествляется с $\lambda \otimes \mathbf{v}$, и всякий базис пространства V над K является базисом $V(L)$ над L (хотя есть и другие базисы).

С другой стороны, если $\{\lambda_\alpha : \alpha \in A\}$ — базис L над K , то всякий вектор пространства $V(L)$ однозначно представляется в виде $\sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha_i} \mathbf{v}_i$, где λ_{α_i} — разные элементы базиса и $\mathbf{v}_i \in V$. Например, любой вектор из комплексификации вещественного пространства V однозначно представляется в виде $\mathbf{x} + i\mathbf{y}$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Тензорное произведение линейных отображений

Пусть $\mathcal{A}: V \rightarrow V'$ и $\mathcal{B}: W \rightarrow W'$ — линейные отображения. Отображение

$$\varphi: V \times W \rightarrow V' \otimes W', \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathcal{A}\mathbf{v} \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}$$

билинейно, поэтому существует единственное линейное отображение

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W', \quad \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{v} \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}.$$

Определение

Тензорное произведение $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ отображений \mathcal{A} и \mathcal{B} — это отображение $V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$, определённое правилом

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{w}_k) = \mathcal{A}\mathbf{v}_1 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}_1 + \dots + \mathcal{A}\mathbf{v}_k \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}_k.$$

Упражнения

1. Заметьте, что если \mathcal{A} и \mathcal{B} — операторы (т.е. $V' = V$ и $W' = W$), то $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (\mathcal{A} \otimes \mathbf{E}_W) \circ (\mathbf{E}_V \otimes \mathcal{B})$ (здесь \mathbf{E}_W и \mathbf{E}_V — тождественные операторы).
2. Докажите, что для конечномерных V и W пространство $\mathcal{L}(V \otimes W)$ линейных операторов на $V \otimes W$ является тензорным произведением пространств $\mathcal{L}(V)$ и $\mathcal{L}(W)$ относительно операции тензорного произведения операторов.

Пусть V, V', W и W' — конечномерные пространства, $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathbf{E}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ — базисы V и V' , $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ и $\mathbf{E}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_l\}$ — базисы W и W' , и пусть $\mathcal{A}: V \rightarrow V'$ и $\mathcal{B}: W \rightarrow W'$ — линейные отображения с матрицами $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ относительно базисов $\mathbf{E}, \mathbf{E}', \mathbf{E}$ и \mathbf{E}' . Тогда

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) = (\mathcal{A}\mathbf{e}_r) \otimes (\mathcal{B}\mathbf{e}_s) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ir} \mathbf{e}'_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^l b_{js} \mathbf{e}'_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l a_{ir} b_{js} (\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j).$$

Таким образом, матрица оператора $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ есть

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1l} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1l} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2l} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{k1} & a_{11}b_{k2} & \cdots & a_{11}b_{kl} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{k1} & a_{1n}b_{k2} & \cdots & a_{1n}b_{kl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1l} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1l} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2l} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{k1} & a_{m1}b_{k2} & \cdots & a_{m1}b_{kl} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{k1} & a_{mn}b_{k2} & \cdots & a_{mn}b_{kl} \end{pmatrix}.$$

Она называется **тензорным**, или **кронекеровым**, произведением (или **произведением Кронекера**) матриц A и B .

Упражнение

Найдите определитель матрицы $A \otimes B$ для линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V \rightarrow V$.