

# Линейная алгебра и геометрия

Лекция 17. Тензоры.

---

Резниченко Евгений Александрович  
Кафедра общей топологии и геометрии

Всюду ниже  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $K$ , а  $p$  и  $q$  — неотрицательные целые числа.

## Определение

Всякая полилинейная функция  $t: \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз}} \rightarrow K$

называется **тензором типа  $(p, q)$**  и **валентности (или ранга)  $p + q$**  на  $V$ .

Про тензор типа  $(p, q)$  говорят, что он  **$p$  раз ковариантный** и  **$q$  раз контравариантный**. Тензор типа  $(p, 0)$  (типа  $(0, q)$ ) называется просто **ковариантным (контравариантным)**.

**Предупреждение:** В литературе  $p$  и  $q$  в обозначении типа часто указываются в обратном порядке.

## Примеры

1. Тензор типа  $(0, 0)$  — скаляр.
2. Тензор типа  $(1, 0)$  — линейная функция  $V \rightarrow K$ , т.е. элемент  $V^*$  (**ковектор**).
3. Тензор типа  $(0, 1)$  — линейная функция  $V^* \rightarrow K$ , т.е. элемент  $V^{**} = V$  (вектор).
4. Тензор типа  $(2, 0)$  (типа  $(0, 2)$ ) — билинейная функция на  $V$  (на  $V^*$ ).
5. Тензор типа  $(1, 1)$  — билинейная функция  $b: V \times V^* \rightarrow K$ . Её левая корреляция  $b_{\text{лев}}: V \rightarrow V^{**} = V$  каждому вектору  $\mathbf{v}$  ставит в соответствие функционал  $\varphi_{\mathbf{v}}$  на  $V^*$ , определённый правилом  $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{f}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{f})$  для  $\mathbf{f} \in V^*$ . В силу изоморфизма  $V^{**} \cong V$  функционал  $\varphi_{\mathbf{v}} \in V^{**}$  есть функция вычисления  $e_{\mathbf{x}_{\mathbf{v}}}$  для некоторого вектора  $\mathbf{x}_{\mathbf{v}} \in V$ . Соответствие  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{x}_{\mathbf{v}}$  — линейный оператор  $V \rightarrow V$ .

Обратно, пусть имеется линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ . Определим тензор  $\mathbf{t}$  типа  $(1, 1)$  правилом  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(\mathcal{A}\mathbf{x}) = e_{\mathcal{A}\mathbf{x}}(\mathbf{f})$ . Его левая корреляция  $\mathbf{x} \mapsto e_{\mathcal{A}\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$  — оператор  $\mathcal{A}$ .

Таким образом, между линейным пространством всех билинейных функций  $V \times V^* \rightarrow K$  (тензоров типа  $(1, 1)$ ) и линейным пространством всех линейных операторов  $V \rightarrow V$  имеется естественный изоморфизм, так что тензоры типа  $(1, 1)$  можно идентифицировать с операторами.

## Пространство тензоров

Обозначим

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ раз}},$$
$$(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q \text{ раз}}.$$

Тензоры типа  $(p, q)$  на  $V$  составляют векторное пространство

$$T_p^q = T_p^q(V) = \mathcal{P}(V^p \times (V^*)^q)$$

над  $K$  размерности  $n^{p+q}$ .

В силу нашего определения тензорного определения,

$$T_p^q(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q},$$

тензоры типа  $(p, q)$  можно определять эквивалентным образом как элементы тензорного произведения  $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ .

## Соглашения об индексации:

- векторы нумеруются нижними индексами, ковекторы (функционалы) — верхними;
- координаты векторов нумеруются верхними индексами, ковекторов — нижними;
- если один и тот же индекс встречается в формуле снизу и сверху, то по нему производится суммирование от 1 до  $n$ .

## Координаты тензора

Пусть  $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  — базис в  $V$  и  $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n\}$  — взаимный базис в  $V^*$ .  
Векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q},$$

где  $(i_1, \dots, i_p)$  и  $(j_1, \dots, j_q)$  — всевозможные наборы натуральных чисел, не превосходящих  $n$ , образуют базис этого пространства.

Еще соглашение об индексации: координаты тензора  $\mathbf{t} \in T_p^q$  типа  $(p, q)$  записываются как  $t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ , тогда

$$\mathbf{t} = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q},$$

в этой записи мы используем соглашения о суммировании.

Числа  $t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  называются **координатами** (а также **коэффициентами** или **компонентами**) тензора  $\mathbf{t}$  в базисе  $\mathbf{E}$ .

Любая полилинейная функция полностью определяется своими координатами — значениями на наборах базисных векторов:

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \mathbf{t}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}; \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{j_q}).$$

Пусть

$$\mathbf{x}_1 = x^{1i_1} \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{x}_2 = x^{2i_2} \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_p = x^{pi_p} \mathbf{e}_{i_p} \in V,$$
$$\mathbf{f}^1 = f_{1j_1} \boldsymbol{\epsilon}^{j_1}, \mathbf{f}^2 = f_{2j_2} \boldsymbol{\epsilon}^{j_2}, \dots, \mathbf{f}^q = f_{qj_q} \boldsymbol{\epsilon}^{j_q} \in V^*.$$

Тогда

$$\begin{aligned} t(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p; \mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^q) &= t(x^{1i_1} \mathbf{e}_{i_1}, \dots, x^{2i_2} \mathbf{e}_{i_2}; f_{1j_1} \boldsymbol{\epsilon}^{j_1}, \dots, f_{qj_q} \boldsymbol{\epsilon}^{j_q}) \\ &= t(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}; \boldsymbol{\epsilon}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^{j_q}) x^{1j_1} \dots x^{2j_2} f_{1i_1} \dots f_{qi_q} \\ &= t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} x^{1i_1} \dots x^{2i_2} f_{1j_1} \dots f_{qj_q}. \end{aligned}$$

## Примеры

1. Пусть  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{f})$  — тензор типа  $(2, 1)$ , и пусть  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{f} = f_k \boldsymbol{\epsilon}^k$ .  
Тогда

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{f}) = \mathbf{t}(x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j, f_k \boldsymbol{\epsilon}^k) = x^i \cdot y^j \cdot f_k \cdot \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\epsilon}^k) = x^i \cdot y^j \cdot f_k \cdot t_{ij}^k,$$

где  $t_{ij}^k = \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\epsilon}^k)$  для  $i, j, k = 1, \dots, n$  — *координаты* тензора  $\mathbf{t}$  в базисе  $\mathbf{E}$ .

2. Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — линейный оператор с матрицей  $A = (a_i^j)$ , т.е.  $\mathcal{A}\mathbf{e}_i = a_i^j \mathbf{e}_j$ .  
Тогда  $\mathcal{A}$  можно трактовать как тензор  $\mathbf{t}: V \times V^* \rightarrow K$  (типа  $(1, 1)$ ),  
определённый правилом  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(\mathcal{A}\mathbf{x})$ . На паре базисных векторов  
 $(\mathbf{e}_k, \boldsymbol{\epsilon}^m)$  он принимает значение

$$\boldsymbol{\epsilon}^m(\mathcal{A}\mathbf{e}_k) = \boldsymbol{\epsilon}^m(a_k^j \mathbf{e}_j) = a_k^m.$$

Таким образом, координаты тензора  $\mathbf{t}$  — это в точности элементы матрицы  $A$ .

## Переход в новую систему координат

Пусть  $\tilde{\mathbf{E}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^n\}$  — другой базис в  $V$  и взаимный с ним базис в  $V^*$ , и пусть  $C = (c_j^i)$  — матрица перехода от  $\mathbf{E}$  к  $\tilde{\mathbf{E}}$ , т.е.  $\tilde{\mathbf{e}}_i = c_j^i \mathbf{e}_j$ , и  $S = (s_j^i) = (C^{-1})^T$  — матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ , т.е.  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^i = s_j^i \boldsymbol{\epsilon}^j$  (заметьте, что в первом случае номерам строк соответствуют верхние индексы, а во втором — нижние). Отметим,

$$\delta_j^i = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\tilde{\mathbf{e}}_j) = (s_k^i \boldsymbol{\epsilon}^k)(c_j^m \mathbf{e}_m) = s_k^i c_j^m \boldsymbol{\epsilon}^k(\mathbf{e}_m) = s_k^i c_j^m \delta_m^k = s_s^i c_j^s,$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронекера. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q} &= \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{e}}_{k_1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{k_p}; \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{m_1}, \dots, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{m_q}) = \mathbf{t}(c_{k_1}^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}, \dots, c_{k_p}^{i_p} \mathbf{e}_{i_p}; s_{j_1}^{m_1} \boldsymbol{\epsilon}^{j_1}, \dots, s_{j_q}^{m_q} \boldsymbol{\epsilon}^{j_q}) = \\ &= c_{k_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot s_{j_1}^{m_1} \cdot \dots \cdot s_{j_q}^{m_q} \cdot t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}. \end{aligned} \quad (*)$$

Альтернативное определение тензора — на пространстве  $V$  задан тензор типа  $(p, q)$ , если каждому базису пространства  $V$  поставлена в соответствие система  $n^{p+q}$  чисел  $t_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q}$  таким образом, что системы, отвечающие разным базисам, связаны соотношением  $(*)$ .

В дальнейшем мы считаем, что в пространстве  $V$  зафиксирован базис  $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , а в пространстве  $V^*$  — взаимный базис  $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n\}$ . Элементы векторных, сопряжённых и т.п. пространств обозначаются жирным шрифтом (возможно, с индексами, тильдами и пр.) и нумеруются в соответствии с соглашениями об индексации (когда оно применимо) — см., например, нумерацию элементов базисов выше. Их координаты обозначаются теми же буквами с теми же пометками, но светлым шрифтом, и индексируются в соответствии с теми же соглашениями. Например, рассматривая вектор  $\mathbf{x} \in V$ , мы будем подразумевать без пояснений, что  $x^1, \dots, x^n$  — его координаты в базисе  $\mathbf{E}$ .

Кроме того, как и выше, всегда подразумевается суммирование по одинаковым верхнему и нижнему индексам.

## Арифметические операции над тензорами

- Сложение определяется поточечно для тензоров одного типа:

$$(\mathbf{t}+\mathbf{s})(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p; \mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^q) = \mathbf{t}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p; \mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^q) + \mathbf{s}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p; \mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^q).$$

При сложении координаты тензоров складываются.

- Умножение на скаляр определяется поточечно. При умножении на скаляр координаты умножаются на тот же скаляр.

Таким образом, множество  $T_p^q(V)$  всех тензоров типа  $(p, q)$  на  $V$  образует векторное пространство над полем  $K$ .

- Умножение тензоров: тензорное произведение тензоров  $\mathbf{t}$  типа  $(p, q)$  и  $\mathbf{t}'$  типа  $(p', q')$  — это тензор  $\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}'$  типа  $(p + p', q + q')$ , определённый правилом

$$\begin{aligned} (\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}')(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}, \dots, \mathbf{x}_{p+p'}; \mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^q, \mathbf{f}^{q+1}, \dots, \mathbf{f}^{q+q'}) = \\ = \mathbf{t}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p; \mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^q) \cdot \mathbf{t}'(\mathbf{x}_{p+1}, \dots, \mathbf{x}_{p+p'}; \mathbf{f}^{q+1}, \dots, \mathbf{f}^{q+q'}). \end{aligned}$$

Его координаты — произведения соответствующих координат сомножителей.

Умножение тензоров не коммутативно, но ассоциативно и дистрибутивно.

## Примеры

1. Пусть  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  — тензоры типа  $(1, 0)$  на  $V$  (т.е. линейные функции из  $V^*$ ) с координатами  $f_i$  и  $g_i$  в базисе  $\mathbf{E}$  (это означает, что  $\mathbf{f} = f_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$  и  $\mathbf{g} = g_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$ , т.е.  $f_i = \mathbf{f}(\mathbf{e}_i)$  и  $g_i = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i)$ ). Тогда  $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$  — тензор типа  $(2, 0)$  (т.е. билинейная функция на  $V$ ), определённый правилом

$$(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

(не все билинейные функции можно так разложить). Его координаты суть  $t_{ij} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{e}_j) = f_i \cdot g_j$ .

2. Пусть  $\mathbf{f}$  — тензор типа  $(1, 0)$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_v$  — тензор типа  $(0, 1)$ . Тогда

$$(\mathbf{f} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{x}; \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_v(\mathbf{g}) = \mathbf{e}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}}(\mathbf{g}).$$

Координаты этого тензора суть  $(\mathbf{f} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{e}_i; \boldsymbol{\varepsilon}^j) = f_i \cdot v^j$ . Ему соответствует оператор  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}$  с матрицей  $(f_i \cdot v^j) = \begin{pmatrix} f_1 \cdot v^1 & \dots & f_n \cdot v^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 \cdot v^n & \dots & f_n \cdot v^n \end{pmatrix}$ .

Тензор, являющийся тензорным произведением тензоров ранга 1, называется **разложимым**. Всякий тензор можно представить как сумму разложимых.

## Универсальное свойство тензорного произведения $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$

Отображение

$$\otimes: \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ раз}} \rightarrow \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q \text{ раз}},$$

$$\otimes(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_q) = \mathbf{f}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{f}_p \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_q,$$

полилинейно. Для любой полилинейной функции

$\varphi: V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow K$  существует единственный линейный функционал  $\ell_\varphi: V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V \rightarrow K$ , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V & & \\ \otimes \downarrow & \searrow \varphi & \\ V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V & \xrightarrow{\ell_\varphi} & K \end{array}$$

коммутативна, т.е.  $\varphi = \ell_\varphi \circ \otimes$ . Он определяется на элементах базиса формулой

$$\ell_\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^{k_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{k_p} \otimes \mathbf{e}_{m_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{m_q}) = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^{k_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{k_p}, \mathbf{e}_{m_1}, \dots, \mathbf{e}_{m_q})$$

и продолжается на всё пространство  $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$  по линейности.

Следовательно,  $(V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V)^* = V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ . Таким образом, линейные функционалы на пространстве  $T_p^q = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$  тензоров типа  $(p, q)$  — это в точности тензоры типа  $(q, p)$ .