Линейная алгебра и геометрия

Лекция 15. Полилинейные функции.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Полилинейные отображения и функции

Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_m, V$ векторные пространства над полем K. Отображение

$$\varphi \colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \to V$$

называться *полилинейным отображением*, если отображения

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m) V_i \to V, \;\; x \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, x_{i-1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$$

линейны для любых $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \in V_1 \times \ldots \times V_m$ и $i = 1, \ldots, m$. Если $V = K$, то φ называется *полилинейной функцией.*

Линейные и билинейные функции являются примерами полилинейных функций. Определитель является полилинейной функцией от строк (или столбцов) матрицы.

Пусть $n_i = \dim V_i$, $\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{in_i}$ базис в V_i и $\boldsymbol{x}_i = x_{i1}\boldsymbol{e}_{i1} + \cdots + x_{in_i}\boldsymbol{e}_{in \in V_i}$ для $i = 1, \ldots, m$. Тогда, используя полилинейность φ, получаем

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \sum_{j_i = 1, \ldots, n_i \text{ для } i = 1, \ldots, m} b_{j_1 \ldots j_m} x_{1j_1} \ldots x_{mj_m},$$

где

$$b_{j_1 \ldots j_m} = \varphi(\boldsymbol{e}_{1j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{mj_m}).$$

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_{in_i}$ есть сопряженный к базису $\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{in_i}$ базис сопряженного пространства V_i^* для $i = 1, \ldots, m$. Учитывая $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{x}_i) = x_{ij}$, получаем

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \sum_{j_i = 1, \ldots, n_i \text{ для } i = 1, \ldots, m} b_{j_1 \ldots j_m} \boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1}(\boldsymbol{x}_1) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}(\boldsymbol{x}_m).$$

Для $(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m) \in V_1^* \times \ldots \times V_m^*$, обозначим

$$\boldsymbol{l}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{l}_m \colon V_1 \times \ldots \times V_m \to K, \quad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \mapsto \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{l}_2(\boldsymbol{x}_2) \ldots \boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m).$$

Тогда

$$\varphi = \sum_{j_i = 1, \ldots, n_i \text{ для } i = 1, \ldots, m} b_{j_1 \ldots j_m} \boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}(V_1, \ldots, V_m)$ множество полилинейных функций на $V_1 \times ... \times V_m$.

$\mathcal{P}(V_1, \ldots, V_m)$ является линейным пространством относительно операции сложения и умножения функций на множестве $V_1 \times ... \times V_m$.

Очевидно, $\boldsymbol{l}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{l}_m \in \mathcal{P}(V_1, \ldots, V_m)$ для $(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m) \in V_1^* \times ... \times V_m^*$.

Теорема (о базисе полилинейных функций)

Система полилинейных функций

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m} \quad \text{где } j_i = 1, \dots, n_i \text{ и } i = 1, \dots, m$$

является базисом $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$. *Для* $\varphi \in \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$,

$$\varphi = \sum_{j_i=1,\dots,n_i \text{ для } i=1,\dots,m} b_{j_1\dots j_m} \boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}, \quad \text{где } b_{j_1\dots j_m} = \varphi(\boldsymbol{e}_{1j_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{mj_m}).$$

Доказательство. Осталось показать линейную независимость функций $\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}$. Пусть $\sum\limits_{j_1,\dots,j_m} c_{j_1\dots j_m} \boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m} = \mathbf{0}$. Надо доказать, что все $c_{j_1\dots j_m}$ равны 0. Так как

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}(\boldsymbol{e}_{1k_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{mk_m}) = \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1}(\boldsymbol{e}_{1k_1}) \dots \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}(\boldsymbol{e}_{mk_m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } j_1 = k_1, \dots, j_m = k_m, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то $0 = \mathbf{0}(\boldsymbol{e}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{j_m}) = c_{j_1\dots j_m}$. □

Следствие

$$\dim \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m) = \dim V_1 \dim V_2 \dots \dim V_m.$$

Далее мы будем отождествлять V и V^{**}, $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{l})$ для $\boldsymbol{x} \in V$ и $\boldsymbol{l} \in V^*$. Из теоремы о базисе полилинейных функций вытекает

Теорема

Система полилинейных функций

$$\boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m} \quad \text{где } j_i = 1, \ldots, n_i \text{ и } i = 1, \ldots, m$$

является базисом $\mathcal{P}(V_1^*, \ldots, V_m^*)$. *Для* $\psi \in \mathcal{P}(V_1^*, \ldots, V_m^*)$,

$$\psi = \sum_{j_i = 1, \ldots, n_i \text{ для } i = 1, \ldots, m} d_{j_1 \ldots j_m} \boldsymbol{e}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{mj_m}, \quad \text{где } d_{j_1 \ldots j_m} = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}).$$

Пусть $i = 1, ..., m$. Пусть $\boldsymbol{e}'_{i1}, \dots \boldsymbol{e}'_{in_i}$ базис в V_i и $(c_{ipq})_{pq}$ матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots \boldsymbol{e}_{in_i}$ к базису $\boldsymbol{e}'_{i1}, \dots \boldsymbol{e}'_{in_i}$, то есть $\boldsymbol{e}'_{ij} = \sum_{k=1}^{n_i} c_{ikj}\boldsymbol{e}_{ik}$ для $j = 1, ..., n_i$. Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}'_{i1}, \dots \boldsymbol{\varepsilon}'_{in_i}$ сопряженный базис.

Выразим новые координаты $b'_{j'_1 \dots j'_n} = \varphi(\boldsymbol{e}'_{1j'_1}, \dots, \boldsymbol{e}'_{mj'_1})$ полилинейной функции φ в базисе $\boldsymbol{\varepsilon}'_{1j'_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}'_{mj'_m}$, $j'_i = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, m$ через старые координаты $b_{j_1 \dots j_n} = \varphi(\boldsymbol{e}_{1j_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{mj_1})$ в базисе $\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}$, $j_i = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, m$.

$$
\begin{aligned}
b'_{j'_1 \dots j'_n} = \varphi(\boldsymbol{e}'_{1j'_1}, \dots, \boldsymbol{e}'_{mj'_1}) &= \varphi\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1} c_{1j_1j'_1}\boldsymbol{e}_{1j_1}, \dots, \sum_{j_m=1}^{n_m} c_{mj_mj'_m}\boldsymbol{e}_{mj_m} \\
&= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} c_{1j_1j'_1} \dots c_{mj_mj'_m}\varphi(\boldsymbol{e}_{1j_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{mj_1}).
\end{aligned}
$$

Получаем

$$
\boxed{b'_{j'_1 \dots j'_n} = \sum_{j_i=1,\dots,n_i \text{ для } i=1,\dots,m} c_{1j_1j'_1} \dots c_{mj_mj'_m} b_{j_1 \dots j_m}.}
$$

Пусть $(\tilde{c}_{ipq})_{pq}$ есть матрица перехода от базиса $\boldsymbol{\varepsilon}'_{i1}, \ldots \boldsymbol{\varepsilon}_{in_i}$ к базису $\boldsymbol{\varepsilon}_{i1}, \ldots \boldsymbol{\varepsilon}_{in_i}$. Тогда

$$d_{j_1 \ldots j_n} = \sum_{j'_i = 1,\ldots,n_i \text{ для } i=1,\ldots,m} \tilde{c}_{1 j'_1 j_1} \ldots \tilde{c}_{m j'_m j_m} d'_{j'_1 \ldots j'_m},$$

где $d_{j_1 \ldots j_n}$ и $d'_{j'_1 \ldots j'_m}$ координаты $\psi \in \mathcal{P}(V_1^*, \ldots, V_m^*))$ в базисах $\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}'_{1j'_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}'_{mj'_m}$, соответственно. Так как матрица $(\tilde{c}_{ipq})_{pq}$ транспонирована к матрице $(c_{ipq})_{pq}$: $\tilde{c}_{ipq} = c_{iqp}$, то

$$\boxed{d_{j_1 \ldots j_n} = \sum_{j'_i = 1,\ldots,n_i \text{ для } i=1,\ldots,m} c_{1 j_1 j'_1} \ldots c_{m j_m j'_m} d'_{j'_1 \ldots j'_m}.}$$

Матрица перехода $(\tilde{c}_{ipq})_{pq})$ от базиса $\boldsymbol{\varepsilon}'_{i1}, \dots \boldsymbol{\varepsilon}_{in_i}$ к базису $\boldsymbol{\varepsilon}_{i1}, \dots \boldsymbol{\varepsilon}_{in_i}$ транспонирована к матрице $(c_{ipq})_{pq}$: $\tilde{c}_{ipq} = c_{iqp}$, поэтому

$$\boxed{d_{j_1 \dots j_n} = \sum_{j'_i = 1, \dots, n_i \text{ для } i = 1, \dots, m} c_{1 j_1 j'_1} \dots c_{m j_m j'_m} d'_{j'_1 \dots j'_m},}$$

где $d_{j_1 \dots j_n}$ и $d'_{j'_1 \dots j'_m}$ координаты

Сопряженное пространство к пространству полилинейных функций

Обозначим $\delta\colon V_1^* \times \dots V_m^* \to \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$, $\quad (\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_m) \mapsto \boldsymbol{l}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{l}_m$.

Следствие (из теоремы о базисе полилинейных функций)

$\langle \delta(V_1^* \times \dots V_m^*) \rangle = \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$

Лемма

Отображение δ полилинейно.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{l}_i \in V_i^*$ для $i = 1, \dots, m$, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V_j^*$ и $\alpha, \beta \in K$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\delta(\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_{j-1}, \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{l}_m)(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) \\
=&\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1) \dots \boldsymbol{l}_{j-1}(\boldsymbol{x}_{j-1})(\alpha\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_j) + \beta\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_j))\boldsymbol{l}_{j+1}(\boldsymbol{x}_{j+1}) \dots \boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m)) \\
=&\alpha\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1) \dots \boldsymbol{l}_{j-1}(\boldsymbol{x}_{j-1})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{l}_{j+1}(\boldsymbol{x}_{j+1}) \dots \boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m)) \\
&+ \beta\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1) \dots \boldsymbol{l}_{j-1}(\boldsymbol{x}_{j-1})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{l}_{j+1}(\boldsymbol{x}_{j+1}) \dots \boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m)) \\
=&\big(\alpha\delta(\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_{j-1}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{l}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{l}_m) + \beta\delta(\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_{j-1}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{l}_m)\big)(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m)
\end{aligned}$$

$\square$

Построим канонический изоморфизм между $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^*$ и $\mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$.

Пусть $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^*$. Положим

$$\Psi(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \circ \delta.$$

Так как отображение δ полилинейно, а функция $\mathcal{L}$ линейна, то $\Psi(\mathcal{L})$ полилинейная функция на $V_1^* \times \dots V_m^*$, то есть $\Psi(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$. Так как

$$\Psi(t_1\mathcal{L}_1 + t_2\mathcal{L}_2) = (t_1\mathcal{L}_1 + t_2\mathcal{L}_2) \circ \delta = t_1\mathcal{L}_1 \circ \delta + t_2\mathcal{L}_2 \circ \delta = t_1\Psi(\mathcal{L}_1) + t_2\Psi(\mathcal{L}_2),$$

то отображение

$$\Psi \colon \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^* \to \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$$

линейно.

Покажем, что Ψ изоморфизм. Так как размерности $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^*$ и $\mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$ равны $\dim V_1 \dim V_2 \dots \dim V_m$ и, следовательно, совпадают, то достаточно показать, что ядро Ψ нулевое.

Пусть $\mathcal{L} \in \ker \Psi$. Так как $\Psi(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \circ \delta = \mathbf{0}$, то $\operatorname{Im} \delta = \delta(V_1^*, \dots, V_m^*) \subset \ker \mathcal{L}$. Так как $\langle \delta(V_1^* \times \dots V_m^*) \rangle = \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)$, то $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m) \subset \ker \mathcal{L}$, то есть $\mathcal{L} = \mathbf{0}$.

Итак, доказано

Теорема (о каноническом изоморфизме $\mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^*$ и $\mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*)$)

Отображение

$$\Psi : \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^* \to \mathcal{P}(V_1^*, \dots, V_m^*), \quad \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \circ \delta$$

является изоморфизмом, где

$$\delta : V_1^* \times \dots V_m^* \to \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m), \quad (\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_m) \mapsto \boldsymbol{l}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{l}_m.$$

Пусть $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) \in V_1 \times \dots \times V_m$. Функция

$$\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) : \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m) \to K, \quad f \mapsto f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m).$$

линейна, то есть $\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m) \in \mathcal{P}(V_1, \dots, V_m)^*$. Вычислим

$$\Psi(\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m)).$$

Для $(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m) \in V_1^* \times \cdots \times V_m^*$,

$$\begin{aligned}
&\Psi(\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m))(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m) = (\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \circ \delta)(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m) \\
=&\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)\big(\delta(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m)\big) = \tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{l}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{l}_m) \\
=&(\boldsymbol{l}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{l}_m)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1) \ldots \boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m) \\
=&(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Psi(\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)) = \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{l}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{l}_m) &= \tilde{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{l}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{l}_m) \\
&= (\boldsymbol{l}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{l}_m)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1) \ldots \boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m).
\end{aligned}$$

С помощью отображения Ψ отождествим $\mathcal{P}(V_1,\dots,V_m)^*$ и $\mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)$. Далее, используя канонический изоморфизм между V и V^{**}, отождествим $\mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)^*$ и $\mathcal{P}(V_1,\dots,V_m)$. Эти отождествления определяются тождествами

$$\boxed{\begin{gathered}(\boldsymbol{x}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{l}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{l}_m)=(\boldsymbol{l}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{l}_m)(\boldsymbol{x}_1\otimes\dots\otimes\boldsymbol{x}_m)=\\ \boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{l}_1)\dots\boldsymbol{x}_m(\boldsymbol{l}_m)=\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}_1)\dots\boldsymbol{l}_m(\boldsymbol{x}_m).\end{gathered}}$$

Если $\varphi\in\mathcal{P}(V_1,\dots,V_m)$, $\psi\in\mathcal{P}(V_1^*,\dots,V_m^*)$,

$$\varphi=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{l}_{1i}\otimes\dots\boldsymbol{l}_{mi},\quad \psi=\sum_{j=1}^{l}\beta_j\boldsymbol{x}_1\otimes\dots\boldsymbol{x}_{mi},$$

то

$$\boxed{\varphi(\psi)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j\ \boldsymbol{l}_{1i}(\boldsymbol{x}_{1j})\dots\boldsymbol{l}_{mi}(\boldsymbol{x}_{mj}),}$$

при этом значение $\varphi(\psi)=\psi(\varphi)$ не зависит от разложений φ и ψ.

Если $j_i, k_i = 1, \ldots, n_i$ для $i = 1, \ldots, n_m$, то

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \ldots \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m})(\boldsymbol{e}_{1k_1} \otimes \ldots \boldsymbol{e}_{mk_m}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1}(\boldsymbol{e}_{1k_1}) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}(\boldsymbol{e}_{mk_m})$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если } j_1 = k_1, \ldots, j_m = k_m, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно

Предложение

Базисы $\boldsymbol{\varepsilon}_{1j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{mj_m}$, $j_i = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, n_m$ *в* $\mathcal{P}(V_1, \ldots, V_m)$ *и* $\boldsymbol{e}_{1k_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{mk_m}$, $k_i = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, n_m$ *в* $\mathcal{P}(V_1^*, \ldots, V_m^*)$ *сопряжены.*