Линейная алгебра и геометрия

Лекция 13. Аффинные пространства, I.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Аффинные пространства

Аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством V, или аффинным пространством над V, называется пара $(\mathbb{A}, +)$, где $\mathbb{A}$ — множество (точек) и $+\colon \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$ — операция прибавления вектора к точке, удовлетворяющая условиям

1. $A + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (A + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}$ для любых $A \in \mathbb{A}$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,
2. $A + \mathbf{0} = A$ для любой точки $A \in \mathbb{A}$,
3. для любых точек $A, B \in \mathbb{A}$ существует единственный вектор $\boldsymbol{x} \in V$, для которого $A + \boldsymbol{x} = B$ (его обозначают $\overrightarrow{AB}$).

Элементы множества $\mathbb{A}$ называются точками. Вектор $\overrightarrow{AB}$ из условия 3 называется вектором, соединяющим точки A и B.

Аксиома 3 $\Longrightarrow$ для любой фиксированной точки $A \in \mathbb{A}$ соответствие $\boldsymbol{v} \mapsto A + \boldsymbol{v}$ — биекция между V и $\mathbb{A}$.

Аксиома 1 $\Longrightarrow$ для любых (не обязательно различных) трёх точек $A, B, C \in \mathbb{A}$ имеем $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (аксиома треугольника).

Аксиома треугольника $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ для любых точек $A, B \in \mathbb{A}$.

Пример

$\mathbb{A} = V$ (векторы рассматриваются как точки).
Аксиомы ❶ и ❷ выполнены.
Аксиома ❸: Упорядоченной паре точек $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ сопоставляется вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$.

Размерность $\dim \mathbb{A}$ аффинного пространства $\mathbb{A}$ над векторным пространством V полагается равной размерности векторного пространства V. Мы будем рассматривать главным образом аффинные пространства конечной размерности.

Всюду ниже в этом разделе предполается, что $\mathbb{A}$ — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством V над полем K.

Зафиксировав точку $O \in \mathbb{A}$ («начало отсчёта»), можно отождествить каждую точку $X \in \mathbb{A}$ с её радиус-вектором $\overrightarrow{OX}$. Такое отождествление называется векторизацией аффинного пространства $\mathbb{A}$.

Аффинная система координат

Определение

Репером в n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над векторным пространством V называется пара $(O, \boldsymbol{E})$, где O — некоторая фиксированная точка в $\mathbb{A}$ (называемая началом координат) и $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис векторного пространства V. С каждым репером связана аффинная система координат, в которой координатами точки $A \in \mathbb{A}$ являются координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Замечания

1. Если $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ — координаты точек A и B относительно репера $(O, \boldsymbol{E})$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в базисе $\boldsymbol{E}$ равны $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$.
2. Если $B = A + \boldsymbol{v}$, $(a_1, \dots, a_n)$ — координаты точки A относительно репера $(O, \boldsymbol{E})$ и $(v_1, \dots, v_n)$ — координаты вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{E}$, то координаты точки B относительно репера $(O, \boldsymbol{E})$ равны $(a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n)$.

Барицентрические координаты

Определение

Пусть $k \geqslant 0$ и $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$. Выражение вида

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i A_i, \qquad \text{где} \quad \lambda_i \in K \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1,$$

называется барицентрической линейной комбинацией точек $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$ с коэффициентами λ_i. Она считается равной точке A, определяемой равенством

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i},$$

где O — произвольная точка пространства $\mathbb{A}$.

Барицентрическая комбинация точек $A_0, \dots, A_k$ с неотрицательными коэффициентами λ_i, $\sum \lambda_i = 1$, называется выпуклой комбинацией этих точек. Выпуклая комбинация $\frac{1}{k+1}(A_0 + \dots + A_k)$ называется центром тяжести системы точек $\{A_0, \dots, A_k\}$.

Барицентрическая линейная комбинация не зависит от выбора точки O:
$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} = (\sum \lambda_i)\overrightarrow{O'O} + (\sum \lambda_i)\overrightarrow{OA} = \sum \lambda_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) = \sum \lambda_i \overrightarrow{O'A}.$

Определение

Точки $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{A}$ называются аффинно (не)зависимыми, если векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ линейно (не)зависимы в V.

Бесконечное множество $S \subset \mathbb{A}$ называется аффинно зависимым, если оно содержит конечное подмножество аффинно зависимых точек. Подмножество, не являющееся линейно зависимым, называется линейно независимым.

Определение

Пусть $\dim \mathbb{A} = n$ и $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$ — аффинно независимые точки. Тогда каждая точка $A \in \mathbb{A}$ единственным образом представляется в виде

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i A_i, \qquad \text{где} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i = 1.$$

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются барицентрическими координатами точки A относительно $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Связь между барицентрическими и аффинными координатами: $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — барицентрические координаты произвольной точки A относительно аффинно независимых точек $A_0, A_1, \ldots, A_n \iff a_1, \ldots, a_n$ — её аффинные координаты относительно репера $(A_0, \boldsymbol{E})$, где $\boldsymbol{E} = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$, и $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Теорема

Пусть $\mathbb{A}$ — n-мерное аффинное пространство и $X_0, \dots, X_k \in \mathbb{A}$. Тогда следующие условия равносильны:

1. *точки $X_0, \dots, X_k \in \mathbb{A}$ аффинно независимы;*
2. *ранг матрицы, составленной из их координат относительно некоторого (любого) репера с началом координат X_0, равен k;*
3. *ранг матрицы, составленной из их барицентрических координат относительно некоторых (любых) $n+1$ аффинно независимых точек равен $k+1$.*

Доказательство.

1 $\Leftrightarrow$ 2 : из теории векторных пространств.

1 $\Leftrightarrow$ 3 : Пусть $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{A}$ — любые аффинно независимые точки, и пусть $x_{0i}, \dots, x_{ni}$ — соответствующие барицентрические координаты точки X_i для $i \leqslant k$. Тогда $x_{1i}, \dots, x_{ni}$ — координаты вектора $\overrightarrow{A_0X_i}$ относительно базиса $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ в V.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_{00} & x_{10} & \dots & x_{k0} \\ x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{01} & x_{11} - x_{01} & \dots & x_{k1} - x_{01} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0n} & x_{1n} - x_{0n} & \dots & x_{kn} - x_{0n} \end{pmatrix}$$

(к первой строке прибавили сумму всех остальных и вычли из каждого стобца первый). Ранг последней матрицы на 1 больше ранга матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{11} - x_{01} & \dots & x_{k1} - x_{01} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} - x_{0n} & \dots & x_{kn} - x_{0n} \end{pmatrix},$$

составленной из координат векторов $\overrightarrow{X_0X_1}, \dots, \overrightarrow{X_0X_k}$. $\square$

Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ даны два репера $(O, \boldsymbol{E})$ и $(O', \boldsymbol{E}')$. Рассмотрим произвольную точку $X \in \mathbb{A}$. Из равенства $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{O'X} + \overrightarrow{OO'}$ получаем формулу преобразования координат точки при переходе к другой системе координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{o'1} \\ x_{o'2} \\ \vdots \\ x_{o'n} \end{pmatrix},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ — координаты точки X относительно реперов $(O, \boldsymbol{E})$ и $(O', \boldsymbol{E}')$, $x_{o'1}, x_{o'2}, \ldots, x_{o'n}$ — координаты точки O' относительно репера $(O, \boldsymbol{E})$ и T — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{E}$ к базису $\boldsymbol{E}'$.

Матрицей перехода от $(O, \boldsymbol{E})$ к $(O', \boldsymbol{E}')$ называется матрица

$$\widehat{T} = \begin{pmatrix} & T & & \begin{matrix} x_{o'1} \\ \vdots \\ x_{o'n} \end{matrix} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{для которой} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{T} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

к аффинно-квадратичным функциям

Изоморфизм аффинных пространств

Скажем, что аффинные пространства $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ над векторным пространством V изоморфны, если существует биекция $\Phi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ с тем свойством, что $\Phi(A + \boldsymbol{v}) = \Phi(A) + \boldsymbol{v}$ для любых $A \in \mathbb{A}$ и $\boldsymbol{v} \in V$.

Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем.

Определение

Аффинное пространство $\mathbb{A}$ над V и аффинное пространство $\mathbb{B}$ над W изоморфны, если существуют изоморфизм $\varphi\colon V \to W$ и биекция $\Phi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ с тем свойством, что

$$\Phi(A + \boldsymbol{v}) = \Phi(A) + \varphi(\boldsymbol{v}) \qquad \text{для любых } A \in \mathbb{A} \text{ и } \boldsymbol{v} \in V.$$

При этом отображение $\varphi\colon V \to W$ называется дифференциалом, или линейной частью, отображения Φ.

Теорема

Два конечномерных аффинных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Доказательство. Если аффинные пространства $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ изоморфны, то векторные пространства V и W, ассоциированные с ними, изоморфны, а значит, $\dim V = \dim W$. Следовательно, $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{B}$.

Обратно, если $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{B}$, т.е. $\dim V = \dim W$, то существует изоморфизм $\varphi\colon V \to W$. Аффинный изоморфизм $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ строится по формуле $f(A + \mathbf{v}) = B + \varphi(\mathbf{v})$ для любых фиксированных $A \in \mathbb{A}$ и $B \in \mathbb{B}$. □

Вывод: Каждое аффинное пространство размерности n изоморфно пространству строк длины n над соответствующим полем. Вектор, идущий от одной строки к другой, равен разности этих строк.

Аффинные подпространства

Определение

Пусть U — подпространство векторного пространства V и $A \in \mathbb{A}$. Множество

$$\pi = \{A + \boldsymbol{x} \in \mathbb{A} : \boldsymbol{x} \in U\}$$

называется аффинным подпространством, или плоскостью, проходящей через точку A и имеющей направляющее подпространство U. Обозначение: $\pi = A + U$.

Размерностью плоскости π называется размерность ее направляющего подпространства U: $\dim \pi = \dim U$.

Нульмерная плоскость — это точка. Одномерная плоскость называется прямой, а $(n-1)$-мерная плоскость в n-мерном аффинном пространстве — гиперплоскостью.

Всякая плоскость $\pi = A + U$ является аффинным пространством, ассоциированным с U: выполнение аксиом 1 и 2 для π очевидно; для любых точек $A, B \in \pi$ вектор $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$ принадлежит U и $B = A + \boldsymbol{u}$, причём вектор $\boldsymbol{u}$ определен однозначно в V, а значит, и в U $\Longrightarrow$ аксиома 3 тоже выполняется.

Замечания

1. Если $B \in \pi = A + U$, то $\pi = B + U$.
2. Для $\pi = A + U$ направляющее подпространство U есть $\{\overrightarrow{XY} : X, Y \in \pi\}$.
3. Пересечение плоскостей либо пусто, либо является плоскостью.
4. Для любого множества $S \subset \mathbb{A}$ и любой точки $X \in S$ плоскость
$$X + \langle\{\overrightarrow{XY} : Y \in S\}\rangle$$
является наименьшей плоскостью, содержащей S (т.е. пересечением всех плоскостей, содержащих S).

Определение

Наименьшая плоскость, содержащая множество $S \subset \mathbb{A}$, называется **аффинной оболочкой** множества S и обозначается $\mathrm{Aff}\, S$.

Для $X \in S$ $\quad \overrightarrow{XX} + \langle\{\overrightarrow{XY} : Y \in S\}\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{XY_i} : k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in K,\ Y_i \in S\right\} =$
$$= \left\{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{XY_i} : k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in K,\ \sum \lambda_i = 1,\ Y_0 = X,\ Y_i \in S\right\}$$
$\Longrightarrow$ $\mathrm{Aff}\, S =$ множество всех барицентрических линейных комбинаций точек из S

Предложение

Точки $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$ *аффинно независимы* $\iff$ *они не содержатся ни в какой плоскости размерности* $< k$.

Теорема

1. *Через любые* $k+1$ *точек аффинного пространства проходит плоскость размерности* $\leqslant k$.
2. *Если эти точки аффинно независимы, то через них проходит единственная плоскость размерности* k.

Доказательство. Пусть $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$. Тогда $\pi = A_0 + \langle\{\overrightarrow{A_0, A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0, A_k}\}\rangle$ — плоскость размерности $\leqslant k$, проходящая через $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$. Если точки $A_0, \dots, A_k$ аффинно независимы, то π — единственная содержащая их $\leqslant k$-мерная плоскость, и $\dim \pi = k$. $\square$

Предложение

Пусть $S \subset \mathbb{A}$ *и* $M \subset S$ *аффинно независимо. Множество* M *является максимальным аффинно независимым множеством в* $S \iff S \subset \operatorname{Aff} M$.

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть $A_0 \in S$. Если $A_0 \in M$, то $A_0 \in \operatorname{Aff} M$. Предположим, что $A_0 \notin M$. M максимально $\implies$ множество $\{A_0\} \cup M$ аффинно зависимо. Пусть $A_1, \ldots, A_k \in M$ и точки $A_0, \ldots, A_k$ аффинно зависимы. Тогда векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ линейно зависимы, причём $\overrightarrow{A_0A_1} \neq \mathbf{0}$ и, очевидно, $\overrightarrow{A_1A_0}$ выражается через $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_k}$ (это следует из того, что $\overrightarrow{A_0A_i} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_i}$ и точки $A_1, \ldots, A_k$ аффинно независимы). Пусть $\overrightarrow{A_1A_0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i}$, причём $\lambda_1 = 1 - \sum_{i=2}^{k} \lambda_i$ (λ_1 может быть любым, так как это коэффициент при $\overrightarrow{A_1A_1} = \mathbf{0}$). Имеем $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ и $\overrightarrow{A_1A_0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i}$, т.е. $A_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$, так что $A_0 \in \operatorname{Aff}(\{A_1, \ldots, A_k\}) \subset \operatorname{Aff} M$.

$\Leftarrow$: Предположим, что M не максимально. Пусть $X \in S$ и множество $\{X\} \cup M$ аффинно независимо. $S \subset \operatorname{Aff} M \implies X = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i A_i$ для некоторых $k \geqslant 0$, $A_0, \ldots, A_k \in M$ и $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in K$ таких, что $\sum \lambda_i = 1$. По определению барицентрической линейной комбинации имеем $\overrightarrow{A_0X} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Значит, векторы $\overrightarrow{A_0X}, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ линейно зависимы, т.е. точки $X, A_0, A_1, \ldots, A_k$ аффинно зависимы. Противоречие. $\square$

Теорема (геометрическая характеризация аффинных подпространств)

Пусть $K \neq \mathbb{F}_2$. Непустое множество $S \subset \mathbb{A}$ является плоскостью $\Longleftrightarrow$ вместе с любыми двумя различными точками оно содержит проходящую через них прямую.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно, докажем $\Leftarrow$. Пусть $S \subset \mathbb{A}$ непусто и обладает указанным свойством. Покажем, что $S \supset \operatorname{Aff} S$. Пусть $X = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i X_i$, где $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \neq 0$, — барицентрическая линейная комбинация точек $X_0, X_1, \ldots, X_k \in S$. Индукцией по k докажем, что $X \in S$. Для $k = 0, 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и для меньших k всё доказано. Если найдётся $i \leqslant k$, для которого $\lambda_i \neq 1$ (пусть для определённости $\lambda_0 \neq 1$), то $X = \lambda_0 X_0 + (1 - \lambda_0)\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} X_i\right)$, причем по предположению индукции $Y = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} X_i\right) \in S$. Поскольку X лежит на прямой, проходящей через точки $Y \in S$ и X_0, имеем $X \in S$.

Предположим теперь, что $\lambda_i = 1$ для всех i, т.е. $k \cdot 1 = 0$ в поле K и $X = \sum_{i=0}^{k} X_i$. Возьмём $\alpha \in K \setminus \{0, 1\}$. Тогда $\sum_{i=0}^{k-1} 1/\alpha = 0$ и $1/\alpha \neq 1$. Имеем $X = \alpha\left(\sum_{i=0}^{k-1} (1/\alpha) X_i + X_k\right) + (1 - \alpha) X_k$. В барицентрической линейной комбинации $Y = \sum_{i=0}^{k-1} (1/\alpha) X_i + X_k$ коэффициент при X_0 не равен 1 (и все коэффициенты ненулевые), так что по доказанному $Y \in S$. Поскольку X лежит на прямой, проходящей через точки Y и X_k, имеем $X \in S$. $\square$

Упражнение

Заметьте, что если $K = \mathbb{F}_2$, то для любых $A, B \in \mathbb{A}$ прямая, проходящая через точки A и B, состоит в точности из этих точек, т.е. $\mathsf{Aff}\{A, B\} = \{A, B\}$.

Докажите, что в случае $K = \mathbb{F}_2$ непустое множество $S \subset \mathbb{A}$ является плоскостью $\iff$ вместе с любыми тремя различными точками оно содержит проходящую через них двумерную плоскость.