Для отображений (возможно многозначных и разрывных) $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ метрических пространств полагаем

$$\operatorname{dis} f = \sup\Big\{\big||xx'| - |f(x)f(x')|\big|\colon x, x' \in X\Big\} \text{ и}$$
$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup\Big\{\big||x\,g(y)| - |f(x)\,y|\big|\colon x \in X,\, y \in Y\Big\}.$$

Тогда *классическое и непрерывное расстояния Громова–Хаусдорфа* задаются равенствами:

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{f\colon X \to Y\\ g\colon Y \to X}} \max\big\{\operatorname{dis} f,\, \operatorname{dis} g,\, \operatorname{codis}(f,g)\big\} \text{ и}$$
$$d^c_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{f \in C(X,Y)\\ g \in C(Y,X)}} \operatorname{dis} R_{f,g} = \frac{1}{2} \inf_{\substack{f \in C(X,Y)\\ g \in C(Y,X)}} \max\big\{\operatorname{dis} f,\, \operatorname{dis} g,\, \operatorname{codis}(f,g)\big\},$$

где $C(Z,W)$ обозначает множество всех непрерывных отображений из метрического пространства Z в метрическое пространство W.

Теорема 0.1. *Для компактных метрических пространств X и Y следующие условия эквивалентны:*
1) $d^c_{GH}(X,Y) = 0$;
2) $d_{GH}(X,Y) = 0$;
3) пространства X и Y изометричны.

Теорема 0.2. *Если метрическое пространство X компактно, то для метрического пространства Y следующие условия эквивалентны:*
1) $d_{GH}(X,Y) = 0$;
2) пространство Y изометрично плотному подмножеству пространства X.

Теорема 0.3. *Для произвольной метрики ϱ на сфере S^n и произвольного метрического пространства Y следующие условия эквивалентны:*
1) $d^c_{GH}(S^n,Y) = 0$;
2) пространство Y изометрично сфере (S^n, ϱ).

Теорема 0.4. *Для метрических пространств X, Y и любых их всюду плотных подмножеств $A \subset \overline{A} = X$, $B \subset \overline{B} = Y$ таких, что $\dim A = \dim B = 0$, справедливо равенство*
$$d^c_{GH}(A,B) = d_{GH}(X,Y).$$

Следствие 0.5. *Для любых нульмерных метрических пространств X и Y справедливо равенство*
$$d^c_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X,Y).$$

Предложение 0.6. *Пусть X — метрическое пространство и $\operatorname{ind} X > 0$. Тогда существует такое $r > 0$, что для всякого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в пространство Y с $\operatorname{ind} Y = 0$ имеет место неравенство $\operatorname{dis} f \ge r$. В частности справедливо неравенство $2d^c_{GH}(X,Y) \ge r$.*