Линейная алгебра и геометрия
Подробная программа курса, 2026, версия от 29.03.2026

Лекция 1. *Векторные пространства, линейная зависимость*

1. Векторные пространства. Подпространства. Линейная зависимость и линейные комбинации векторов. Ранг системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.

> **Лемма** (о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов)**.** *Если система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ линейно независима, а система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ линейно зависима (в частности, если $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n \rangle$), то вектор $\boldsymbol{x}$ единственным образом линейно выражается выражается через вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$:*
>
> $$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n.$$
>
> **Лемма** (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной)**.** *Если* $\operatorname{rank} X < \infty$*, то любая система линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в X системы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*
>
> **Лемма** (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной)**.** *Если* $\operatorname{rank} X < \infty$*, то любая система линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в X системы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*
>
> **Лемма** (основная, о линейной зависимости)**.** *Если векторное пространство V порождается n векторами, то всякие $m > n$ векторов пространства V линейно зависимы.*
>
> **Теорема** (о монотонности ранга)**.** *Пусть $X \subset V$, $Y \subset \langle X \rangle$ и* $\operatorname{rank} X < \infty$*. Тогда* $\operatorname{rank} Y \leq \operatorname{rank} X$*.*

2. Базис конечномерного пространства. Размерность конечномерного пространства.

> **Лемма** (о ранге конечномерного пространства)**.** *Векторное пространство V конечномерно если и только если* $\operatorname{rank} V < \infty$*.*
>
> **Теорема** (о дополнении до базиса)**.** *Пусть X — полная система векторов в конечномерном векторном пространстве V. Всякую линейно независимую систему векторов из X можно дополнить до базиса V.*
>
> **Следствие.** *Во всяком конечномерном векторного пространстве есть базис.*
>
> **Теорема.** *Все базисы конечномерного пространства V содержат одно и тоже число векторов.*
>
> **Теорема.** *Пусть V конечномерное пространство и $X \subset V$. Тогда $\langle X \rangle$ конечномерно и* $\dim\langle X \rangle = \operatorname{rank} X$*.*
>
> **Следствие.** *Если V конечномерное пространство, то* $\dim V = \operatorname{rank} V$*.*
>
> **Следствие.** *Если V — конечномерное векторное пространство и U — его собственное подпространство, то* $\dim U < \dim V$*.*

Лекция 2. *Координаты векторов, изоморфизмы линейных пространств, сумма и пересечение линейных подпространств*

3. Координаты векторов. Изоморфизм векторных пространств. Арифметическое векторное пространств.

Теорема. *Система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в конечномерном векторном пространстве V является базисом пространства V, если и только если каждый вектор $\boldsymbol{x} \in V$ единственным образом выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.*

Теорема. *Всякое векторное пространство V над полем K размерности n изоморфно арифметическому пространству K^n.*

Теорема. *Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеет одинаковую размерность.*

4. Матрица перехода. Свойства матрицы перехода. Параметрические уравнения подпространства.

5. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула Грассмана.

Теорема (о прямой сумме)**.** *Сумма подпространств U и W произвольного векторного пространства является прямой $\iff U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.*

Лемма. *Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ система линейно независимых векторов. Тогда $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.*

Теорема. *Для любых двух подпространств U и W конечномерного векторного пространства V над полем K справедлива* формула Грассмана

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}.$$

Лекция 3. *Прямая сумма нескольких подпространств. Сопряженное пространство*

6. Прямая сумма нескольких подпространств

Теорема (о прямой сумме)**.** *Для конечномерных подпространств $V_1, \ldots, V_n$ следующие условия равносильны:*

(1) *сумма $V_1 + \cdots + V_n$ прямая;*

(2) *если векторы $\boldsymbol{v}_i$, $i \leq n$, удовлетворяют условиям $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ для $i \leq n$ и $\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$;*

(3) *объединение любых базисов подпространств V_i, $i \leq n$, является базисом подпространства $V_1 + \cdots + V_n$;*

(4) $\dim V_1 + \cdots + V_n = \dim V_1 + \cdots + \dim V_n$.

7. Сопряжённое пространство. Взаимный базис. Преобразование координат в сопряжённом пространстве.

8. Естественный изоморфизм между V и V^{**}.

Теорема. *Для всякого конечномерного векторного пространства V отображение*

$$\delta \colon V \to V^{**}, \ \boldsymbol{v} \mapsto \delta_{\boldsymbol{v}},$$

является изоморфизмом.

Лекция 4. *Аннулятор и нуль-пространство. Линейные отображения.*

9. Аннулятор и нуль-пространство. Функционалы и подпространства.

Лемма (о двойственности аннулятора и нуль-пространства). *Пусть $U = V^*$ и $\delta\colon V \to U^* = V^{**}$ канонический изоморфизм. Тогда*

$$\delta(Y_\circ) = Y^\circ,\ \ \delta(X)_\circ = X^\circ \text{ и } (Y^\circ)_\circ = (Y_\circ)^\circ.$$

Лемма (a). *(1) X° линейное подпространство V^* и $X^\circ = \langle X\rangle^\circ$.*

(2) $Y_\circ$ линейное подпространство V и $Y_\circ = \langle Y\rangle_\circ$,

Лемма (b). *Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ базис V, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ взаимный базис V^* и $k \le n$. Тогда $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}^\circ = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\rangle$ и $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\rangle_\circ = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\rangle$.*

Теорема. *Пусть $X \subset V$ и $Y \subset V^*$. Тогда*

(1) $(X^\circ)_\circ = \langle X\rangle$ и $\operatorname{rank} X + \dim X^\circ = \dim V$;

(2) $(Y_\circ)^\circ = \langle Y\rangle$ и $\operatorname{rank} Y + \dim Y_\circ = \dim V$.

Теорема. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K. Тогда множество $U \subset V$ является подпространством пространства V $\iff$ U есть пересечение ядер $\dim V - \operatorname{rank} U$ линейных функционалов.*

10. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.

11. Ядро и образ линейного отображения.

Предложение. *Ядро $\operatorname{Ker} f$ любого линейного отображения $f\colon V \to U$ является подпространством пространства V, а образ $\operatorname{Im} f$ — подпространством пространства U.*

Предложение. *Линейное отображение $f : V \to U$ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.*

Предложение. *Если $f\colon V \to U$ — линейное отображение, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ и векторы $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ линейно независимы (в пространстве U), то и векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ линейно независимы (в пространстве V).*

Лемма. *Если V — конечномерное векторное пространство над полем K с базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, U — векторное пространство над K и $f\colon V \to U$ — линейное отображение, то*

$$\operatorname{Im} f = \langle f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\rangle.$$

Лемма. *Пусть V и U — конечномерные векторные пространства с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей A относительно базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$. Тогда*

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A.$$

Теорема. *Для любого линейного отображения $f : V \to U$ конечномерного векторного пространства V*

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}.$$

Следствие. *Линейное отображение $f : V \to U$ сюръективно тогда и только тогда, когда $\dim U = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$.*

Лекция 5. *Операторы. Инвариантные подпространства. Собственные вектора и собственные подпространства. Характеристический многочлен. Диагонализируемые операторы.*

12. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Алгебра линейных операторов.

Теорема. *Пусть V — векторное пространство конечной размерности n.*
Квадратные матрицы A и B порядка n подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора $V \to V$ в некоторых базисах пространства V.

Теорема. *Для любого n-мерного векторного пространства V над полем K алгебры $\operatorname{End} V$ и $M_n(K)$ изоморфны.*

Следствие. *Для любого конечномерного векторного пространства V над полем K*

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2.$$

13. Инвариантные подпространства. Разложение оператора в сумму операторов. Разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму.

Предложение. *Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном векторном пространстве V существует аннулирующий многочлен.*

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, $f(x)$ — аннулирующий многочлен для $\mathcal{A}$ и $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ для взаимно простых многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму операторов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ таких, что $f_1(\mathcal{A}_1) = \Theta$ и $f_2(\mathcal{A}_2) = \Theta$. Кроме того,*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{A}_1 = \ker f_1(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_2(\mathcal{A}), \qquad \operatorname{Dom} \mathcal{A}_2 = \ker f_2(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}).$$

Теорема (о разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, $f(x)$ — аннулирующий многочлен для $\mathcal{A}$ и $f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)$, где многочлены $f_i(x)$ и $f_j(x)$ взаимно просты для различных i и j. Тогда $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, …, $\mathcal{A}_m$ таких, что $f_i(\mathcal{A}_i) = \Theta$ и*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{A}_i = \ker f_i(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}) f_2(\mathcal{A}) \dots f_{i-1}(\mathcal{A}) f_{i+1}(\mathcal{A}) \dots f_m(\mathcal{A})$$

для $i = 1, 2, \dots, m$.

14. Собственные векторы. Характеристический многочлен. Собственные подпространства.

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — произвольный базис конечномерного пространства V, и $\mathcal{A} \colon V \to V$ — линейный оператор с матрицей A в этом базисе. Число λ является собственным значением, отвечающим некоторому собственному вектору оператора $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда* $\det(A - \lambda E) = 0$.

Предложение. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Следствие. *Коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами линейного оператора.*

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ есть оператор в конечномерном пространстве V, U инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство и $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$. Тогда характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ делит характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$.*

Предложение. *Пусть V — векторное пространство над полем K, $\mathcal{A}$ — линейный оператор и λ — собственное значение $\mathcal{A}$. Тогда собственное подпространство V_λ является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$.*

Следствие. *Сумма собственных подпространств любого линейного оператора является прямой суммой.*

15. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Диагонализируемые операторы.

Предложение. *Геометрическая кратность собственного значения оператора не превосходит алгебраической кратности.*

Предложение (о операторе с диагональной матрицей)**.** *Пусть матрица* $A = (a_{ij})$ *оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *диагональна,* $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $N_j = \{i : a_{ii} = \lambda_j\}$ *и* $k_j = |N_j|$ *для* $j = 1, \dots, m$. *Тогда*

(1) *базис* $\boldsymbol{E}$ *состоит из собственных векторов оператора* $\mathcal{A}$*;*

(2) $\bigcup_{j=1}^{m} N_j = \{1, \dots, n\}$*;*

(3) $V_{\lambda_j} = \langle\{\boldsymbol{e}_i : i \in N_j\}\rangle$ *для* $j = 1, \dots, m$*;*

(4) V *является прямой суммой собственных подпространств;*

(5)
$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{j=1}^{m}(\lambda_j - t)^{k_j}$$

(6) *для* $j = 1, \dots, m$, *геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения* λ_j *совпадают.*

Теорема. *Для оператора* $\mathcal{A}$ *в конечномерном пространстве* V *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{A}$ *диагонализируем;*

(2) *в пространстве* V *имеется базис, состоящий из собственных векторов оператора* $\mathcal{A}$*;*

(3) V *является прямой суммой собственных подпространств;*

(4) *характеристический многочлен* $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ *разлагается на линейные множители и для каждого собственного значения геометрическая и алгебраическая кратность совпадают.*

Лекция 6. *Теорема Гамильтона–Кэли. Нильпотентный оператор. Существование жордановой формы для нильпотентный оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.*

16. Теорема Гамильтона–Кэли

Предложение. *Пусть* $\boldsymbol{x} \in V$ *и* $\langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \dots\rangle = V$. *Тогда для* $\mathcal{A}$ *выполняется теорема Гамильтона–Кэли, то есть* $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \Theta$.

Теорема. *Теорема Гамильтона–Кэли Для всякого линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в конечномерном векторном пространстве* V *характеристический многочлен является аннулирующим.*

17. Нильпотентные операторы. Существование жорданова базис для нильпотентного оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.

Теорема. *Для любого нильпотентного оператора в конечномерном пространстве существует жорданов базис.*

Теорема (о характеристическом многочлене нильпотентного оператора)**.** *Оператор* $\mathcal{A}$ *в* n*-мерном пространстве* V *является нильпотентным если и только если* $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n$.

Лекция 7. *Единственность жордановой формы нильпотентного оператора. Корневые подпространства. Жорданова форма оператора.*

18. Единственность жорданова базис для нильпотентного оператора.

$$\boxed{\text{число клеток размера } k = \operatorname{rank} A^{k-1} - 2\operatorname{rank} A^k + \operatorname{rank} A^{k+1}}.$$

Вывод: Жорданова форма матрицы нильпотентного оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток на диагонали.

19. Разложение оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора.

Теорема (о разложении оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора)**.** *Пусть* $\mathcal{A}$ *оператор в конечномерном пространстве* V*. Тогда*

(1) *оператор* $\mathcal{A}$ *в раскладывается в прямую сумму нильпотентного оператора* $\mathcal{N}$ *и невырожденного оператора* $\mathcal{S}$*;*

(2) $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \{\boldsymbol{x} \in V : \mathcal{A}^i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *для некоторого* $i\}$*;*

(3) *если оператор* $\mathcal{A}$ *вырожденный, то* $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$*,* $m = \dim\operatorname{Dom}\mathcal{N}$ *равно алгебраической кратности* 0 *и* $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$.

20. Корневые векторы и подпространства.

Предложение (о нулевом корневом подпространстве вырожденного оператора)**.** *Если* $\mathcal{A}$ *вырожденный оператор, то* $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$*,* $V^0 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$*, где* m *есть алгебраическая кратность* 0 *и* $\dim V^0 = m$.

Теорема (о корневом подпространстве)**.** *Для любого собственного значения* λ *корневое подпространство* V^λ *инвариантно относительно оператора* $\mathcal{A}$*. Размерность* $m = \dim V^\lambda$ *равна алгебраической кратности собственного значения* λ *и* $V^\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$*. Для* $\mathcal{K} = \mathcal{A}|_{V^\lambda}$*,* $\chi_{\mathcal{K}}(t) = (\lambda - t)^m$.

Теорема (о разложении на корневые подпространства)**.** *Пусть* $\mathcal{A}$ *оператор в конечномерном пространстве* V*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *пространство* V *раскладывается в прямую сумму корневых подпространств;*

(2) *характерестический многочлен раскладывается на линейные множители;*

(3) *если* $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$*,* k_i *есть алгебраическая кратность собственного значения* λ_i *для* $i = 1, \ldots, m$*, то*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2}\ldots(\lambda_m - \lambda)^{k_m} \quad \text{и}$$
$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m}.$$

21. Жорданова форма оператора

Теорема. *Если матрица линейного оператора* $\mathcal{A}$ *приводится к жордановой форме, то эта форма определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на диагонали.*

А именно, для любого $\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$ и любого натурального k

$$\boxed{\text{число клеток } J_k(\lambda) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k-1} - 2\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k} + \operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k+1}}$$

(ранг оператора $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^0$ полагается равным нулю).

Лекция 8. *Комплексификация и овеществление пространств и линейных отображений. Инвариантные двухмерные подпространства у вещественного оператора.*

22. Комплексификация и овеществление пространств и линейных отображений.

Теорема. *Любой базис $\boldsymbol{E}$ пространства V является одновременно и базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$.*

Следствие. *Размерность комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ любого векторного пространства V над $\mathbb{R}$ равна размерности пространства V.*

Теорема. *Если $\boldsymbol{E}$ — базис векторного пространства V над полем $\mathbb{C}$, то $\boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E}$ — базис $V_{\mathbb{R}}$.*

Следствие. *Если V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\dim V = n$, то $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$.*

Теорема. *Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{C}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей $A = B + iC$ относительно этих базисов. Тогда матрица f как отображения $V_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$ относительно базисов $\boldsymbol{E}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, i\boldsymbol{b}_1, \ldots, i\boldsymbol{b}_m\}$ равна $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.*

Теорема. *Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{R}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей A относительно этих базисов. Тогда матрица A также является матрицей отображения $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}$ в тех же базисах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$.*

23. Инвариантные двухмерные подпространства вещественного оператора.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечно мерном вещественном пространстве V, $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ есть комплексный корень ($b \neq 0$) характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$) есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ. Тогда*

- *$U = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ является двухмерным инвариантным подпространством V;*
- *для $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$, $\operatorname{Sp}\mathcal{B}|_{\mathbb{C}} = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, вектор $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ и $\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\bar{\lambda}$;*
- *матрица*
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
является матрицей оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.

Следствие. *У оператора в конечномерном вещественном пространстве есть либо одномерное либо двухмерное инвариантное подпространство.*

Лекция 9. *Билинейные функции*

24. Билинейные функции. Корреляции и ядра. Матрица билинейной функции. Невырожденые билинейные функции.

Предложение. *Пусть b — билинейная функция на векторном пространстве V и $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$.*

1. *Левое ортогональное дополнение ${}^{\perp}U$ подпространства U — это прообраз при левой корреляции $b_{лев}\colon V \to V^*$ аннулятора*

$$U^0 = \operatorname{Ann} U = \{\boldsymbol{f} \in V^* : (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in U\}$$

подпространства U (относительно естественного спаривания $c(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$).

2. $U^{\perp} = b_{пр}^{-1}(U^0)$.

$$\boxed{B' = C^T B C}.$$

Теорема. *Следующие свойства билинейной функции b на n-мерном векторном пространстве V равносильны:*

1. *функция b невырождена, т.е.* $\operatorname{Ker}_{лев} b = \operatorname{Ker}_{пр} b = \{\mathbf{0}\}$;
2. *матрица Грама функции b в некотором базисе невырождена;*
3. *матрица Грама функции b в любом базисе невырождена;*
4. *левая корреляция $b_{лев}\colon V \to V^*$ — изоморфизм;*
5. *правая корреляция $b_{пр}\colon V \to V^*$ — изоморфизм;*
6. *для любого $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ существует $\boldsymbol{u} \in V$ такой, что $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \neq 0$;*
7. *для любого $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ существует $\boldsymbol{u} \in V$ такой, что $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$;*
8. *для любой линейной функции $f\colon V \to K$ существует $\boldsymbol{v} \in V$ такой, что $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$;*
9. *для любой линейной функции $f\colon V \to K$ существует $\boldsymbol{v} \in V$ такой, что $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$.*

При выполнении этих условий вектор $\boldsymbol{v}$ в 8 и 9 определён однозначно.

Предложение. *Если билинейная функция b на конечномерном пространстве V невырождена, то для всякого подпространства $U \subset V$ выполняются равенства*

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \text{и} \quad ({}^{\perp}U)^{\perp} = U = {}^{\perp}(U^{\perp}).$$

25. Симметричные и кососимметричные билинейные функции. Теорема Лагранжа. Канонический и симплектический базис.

Предложение. *Билинейная функция b на V кососимметрична $\iff$ $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$.*

Предложение. *Множества $\mathscr{B}_{сим}(V)$ и $\mathscr{B}_{кос}(V)$ всех симметричных и всех кососимметричных билинейных функций на V являются линейными подпространствами векторного пространства $\mathscr{B}(V)$. Более того, $\mathscr{B}(V) = \mathscr{B}_{сим}(V) \oplus \mathscr{B}_{кос}(V)$.*

Предложение. *Если b — (косо)симметричная билинейная функция и U — подпространство пространства V с тем свойством, что $\operatorname{Ker} b \oplus U = V$, то ограничение функции b на U невырождено.*

Теорема (Лагранжа)**.** *Для симметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует базис пространства V, в котором матрица b диагональна.*

Теорема. *Для любой кососимметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует симплектический базис.*

Лекция 10. *Квадратичные функции. Полуторалинейные функции. Евклидовы пространства.*

26. Квадратичные формы. Поляризация. Метод Лагранжа.

27. Метод Якоби.

Теорема (формула Якоби)**.** *Пусть $b\colon V \times V \to K$ — симметричная билинейная функция на n-мерном векторном пространстве над любым полем K, B — её матрица в некотором базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — угловые миноры матрицы B. Положим $\Delta_0 = 1$.*
Если все Δ_i, $i \leq n$, отличны от нуля, то существует базис $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ векторного пространства V, в котором квадратичная функция q, ассоциированная с b, имеет вид

$$q(y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \cdots + y_n\tilde{\boldsymbol{e}}_n) = \tfrac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \cdots + \tfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2,$$

причём матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$ верхне-унитреугольна (верхнетреугольна и все диагональные элементы равны 1).

28. Квадратичные формы над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. Нормальная форма. Индексы инерции.

Предложение. *Для любой квадратичной формы q на n-мерном векторном пространстве над полем вещественных чисел существует базис, в котором*

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2$$

для некоторых k и l, удовлетворяющих условию $r = k + l \leq n$. При этом число r является инвариантом квадратичной функции q; более того, оно совпадает с рангом q.

Теорема (закон инерции)**.** *Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами квадратичной функции (т.е. не зависят от выбора базиса).*

Теорема (теорема Якоби)**.** *Если все угловые миноры Δ_i матрицы Q квадратичной формы $q\colon V \to \mathbb{R}$ в некотором базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ пространства V не равны нулю, то отрицательный индекс инерции формы q равен числу тех $i \leq n$, для которых $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.*

29. Положительно определённые билинейные функции. Критерий Сильвестра.

Теорема (критерий Сильвестра)**.** *Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — любой базис в нём. Симметричная билинейная функция $b : V \times V \to \mathbb{R}$ положительно определена $\iff$ все угловые миноры Δ_i её матрицы B в базисе $\boldsymbol{E}$ положительны.*

30. Полуторалинейные функции. Эрмитовы полуторалинейные функции. Эрмитовы квадратичные функции.

Предложение. *Всякая эрмитова полуторалинейная функция b однозначно определяется своей эрмитовой квадратичной функцией q.*

Теорема. *В n-мерном векторном пространстве V над $\mathbb{C}$ для всякой эрмитовой полуторалинейной функции b существует базис $\boldsymbol{E}$, в котором функция b и соответствующая ей эрмитова квадратичная функция q имеют* нормальный вид

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}){=}x_1\overline{y}_1{+}\ldots{+}x_k\overline{y}_k{-}x_{k+1}\overline{y}_{k+1}{-}\ldots{-}x_{k+\ell}\overline{y}_{k+\ell},\quad q(\boldsymbol{x}){=}|x_1|^2{+}\ldots{+}|x_k|^2{-}|x_{k+1}|^2{-}\ldots{-}|x_{k+\ell}|^2$$

(здесь x_i и y_i — координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в $\boldsymbol{E}$).

Теорема (закон инерции)**.** *Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами эрмитовой квадратичной формы (т.е. не зависят от выбора базиса).*

Теорема (формула Якоби)**.** *Пусть $b : V \times V \to \mathbb{C}$ — эрмитова полуторалинейная функция на n-мерном пространстве V над $\mathbb{C}$, B — её матрица в некотором базисе $\boldsymbol{E}$ и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — угловые миноры B. Положим $\Delta_0 = 1$.*
Если все Δ_i, $i \leq n$, отличны от нуля, то существует базис $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ пространства V, в котором квадратичная функция q, ассоциированная с b, имеет вид

$$q(y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \cdots + y_n\tilde{\boldsymbol{e}}_n) = \tfrac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \cdots + \tfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2,$$

причём матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$ верхне-унитреугольна.

Теорема (критерий Сильвестра)**.** *Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $\boldsymbol{E}$ — любой базис в нём. Эрмитова полуторалинейная функция на V положительно определена $\iff$ все угловые миноры её матрицы в базисе $\boldsymbol{E}$ положительны.*

31. Евклидовы пространства. Ортогональная система координат. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Линейные функции на евклидовом пространстве.

Лемма (Неравенство Коши–Буняковского)**.** *Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства*

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пропорциональны.

Лемма. *Неравенство треугольника Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства*

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Теорема. *Для произвольных векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ евклидова пространства V*

$$\det G(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) \geq 0,$$

причём $\det G(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = 0 \iff$ *векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ линейно зависимы.*

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — произвольный базис евклидова пространства V, $G = (g_{ij}) = G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n y_i\boldsymbol{e}_i$ — любые векторы в V. Тогда*

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{ij} = (x_1, \ldots, x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Предложение. *Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Предложение. *Базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ евклидова пространства ортонормирован тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

1. *$G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = E$;*

2. *для любых* $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ *и* $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n$ (*или для любых* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *и* $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$)
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \qquad (\textit{или} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y});$$
3. *координаты любого вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *вычисляются по формуле* $x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$ *для* $i \le n$, *т.е.*
$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \dots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Теорема. *Во всяком евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Более того, ортонормированный базис любого подпространства евклидова пространства можно дополнить до ортонормированного базиса всего пространства.*

Для каждого линейного функционала $f : V \to \mathbb{R}$ *на евклидовом пространстве* V *найдётся вектор* $\boldsymbol{v}_f \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$.

Соответствие $\mathscr{C} : \boldsymbol{v} \mapsto f_{\boldsymbol{v}}$ *— изоморфизм* $V \to V^*$, *и если* $\boldsymbol{E}$ *— любой ортонормированный базис в* V *и* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ *— взаимный с ним базис в* V^*, *то относительно базисов* $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\mathcal{E}}$ *этот изоморфизм имеет матрицу* E.

Лекция 11. *Евклидовы и унитарные пространства.*

32. Ортогональное проектирование. Расстояние от вектора до линейного подпространства. Геометрический смысл определителя.

Теорема. 1. *Расстояние от вектора* $\boldsymbol{x}$ *евклидова пространства* V *до подпространства* U *равно* $|\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|$, *причём единственным ближайшим к* $\boldsymbol{x}$ *вектором подпространства* U *является* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$.

2. *Угол между ненулевым вектором* $\boldsymbol{x}$ *и ненулевым подпространством* U *равен углу между* $\boldsymbol{x}$ *и* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$ (*если* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) *или* $\frac{\pi}{2}$ (*если* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$).

Теорема. $\operatorname{vol} P(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)^2 = \det G(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$.

$$\det G(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = (\det A)^2.$$

33. Ортогональные матрицы. QR-разложение. Ортогональные операторы. Изоморфизм евклидовых пространств.

Теорема (о QR-разложении)**.** *Всякая невырожденная матрица* A *может быть представлена в виде произведения* QR, *где* Q *— ортогональная, а* R *— верхнетреугольная матрица, причем диагональные элементы матрицы* R *положительны.*

Теорема. *Линейный оператор* $\mathcal{A} : V \to V$ *в евклидовом пространстве* V *является ортогональным* $\iff$ *его матрица в некотором ортонормированном базисе ортогональна* $\iff$ *его матрица в произвольном ортонормированном базисе ортогональна.*

Следствие. *Линейный оператор в евклидовом пространстве ортогонален* $\iff$ *он переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис* $\iff$ *он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Теорема. *Линейный оператор ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов. В частности, ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.*

Следствие. *Собственные значения ортогонального линейного оператора равны* ± 1.

34. Линейные операторы и билинейные формы в евклидовых пространствах. Сопряжённые операторы.

Теорема. 1. *Матрица любого линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *в любом ортонормированном базисе совпадает с матрицей билинейной функции* $\beta(\mathcal{A})$ *в том же базисе.*

2. *Отображение* $\beta\colon \mathscr{L}(V) \to \mathscr{B}(V)$ *— изоморфизм.*

Теорема. *Для каждого линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *сопряжённый оператор* $\mathcal{A}^*$ *существует и единствен, причём в любом ортонормированном базисе его матрица равна транспонированной матрице самого оператора* $\mathcal{A}$.

Лекция 12. *Ортогональные и самосопряжённые операторы. Эрмитовы пространства.*

35. Самосопряжённые операторы. Приведение квадратичной функции к главным осям.

Теорема. *Линейный оператор* $\mathcal{A}$ *в евклидовом пространстве* V *самосопряжен* $\iff$ *его матрица в некотором ортонормированном базисе симметрична* $\iff$ *его матрица в произвольном ортонормированном базисе симметрична.*

Предложение. *Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *— самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве* V *и* U *— подпространство, инвариантное относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ортогональное дополнение* $U^\perp$ *тоже инвариантно относительно* $\mathcal{A}$.

Теорема. *Для любого самосопряжённого линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в* n*-мерном евклидовом пространстве* V *найдётся ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна.*

Следствие. *Для оператора* $\mathcal{A}$ *следующие условия равносильны:*

1. *оператор* $\mathcal{A}$ *самосопряжён;*

2. *существует ортонормированный базис, в котором матрица* $\mathcal{A}$ *диагональна;*

3. *если* A *— матрица* $\mathcal{A}$ *в любом ортонормированном базисе, то существуют ортогональная матрица* T *и диагональная матрица* D*, для которых* $A = T^{-1}DT$.

Теорема. 1. *Сумма самосопряженных линейных операторов и произведение самосопряженного оператора на вещественное число являются самосопряженными операторами.*

2. *Композиция двух самосопряженных операторов является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.*

Теорема. *Пусть* V *—* n*-мерное евклидово пространство и* $b : V \times V \to \mathbb{R}$ *— симметричная билинейная функция. Тогда в* V *существует ортонормированный базис* $\boldsymbol{E}$*, в котором квадратичная функция* $q : V \to \mathbb{R}$*, соответствующая* b*, записывается в виде суммы квадратов с коэффициентами:*

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *и* x_i *— координаты вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\boldsymbol{E}$.

Пусть B *есть матрица билинейной формы в некотором ортонормированном базисе. Тогда* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *есть корни (без учета кратности) характеристического многочлена* $\chi_{_B}(\lambda)$ *матрицы* B.

36. Канонический вид ортогонального оператора

Предложение. *Собственные значения ортогонального линейного оператора равны* ± 1.

Предложение. *Пусть* $\mathcal{A}: V \to V$ *— ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве* V *и* U *— подпространство, инвариантное относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ортогональное дополнение* $U^\perp$ *тоже инвариантно относительно* $\mathcal{A}$.

Теорема. *Оператор в евклидовом пространстве ортогонален тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица имеет блочно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{smallmatrix} & & & & & & & & & 0 \\ & \begin{smallmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{smallmatrix} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \begin{smallmatrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{smallmatrix} & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторых $k \le n$ *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. *Блоки* (-1) *и/или* (1) *могут отсутствовать.*

Теорема. *Ортогональные операторы в евклидовом пространстве* V *образуют подгруппу группы* $\mathrm{GL}(n)$.

37. Положительно и неотрицательно определённые самосопряженные линейные операторы. Полярное разложение оператора над $\mathbb{R}$.

Лемма. *Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве положительно (неотрицательно) определён тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).*

Лемма. *Для всякого положительно (неотрицательно) определённого самосопряжённого оператора* $\mathcal{A}$ *в евклидовом пространстве существует единственный положительно (неотрицательно) определённый самосопряжённый оператор* $\mathcal{B}$, *для которого* $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ *— квадратный корень из* $\mathcal{A}$.

Лемма. *Пусть* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *— линейные операторы в евклидовом пространстве и* $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{B}\boldsymbol{x}, \mathcal{B}\boldsymbol{y})$ *для всех* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. *Тогда существует ортогональный оператор* $\mathcal{O}$, *для которого* $\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{B}$.

Теорема (о полярном разложении над $\mathbb{R}$)**.** *Для всякого линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в евклидовом пространстве существуют* полярные разложения $\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{S}_1$ *и* $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{O}$, *где* $\mathcal{S}_1$ *и* $\mathcal{S}_2$ *— неотрицательно определённые самосопряжённые операторы и* $\mathcal{O}$ *— ортогональный оператор. Если* $\mathcal{A}$ *невырожден, то* $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}_1$ *и* $\mathcal{S}_2$ *определены однозначно.*

38. Унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное проектирование и расстояние в унитарном пространстве. Унитарные матрицы. Изоморфизм унитарных пространств.

Лемма (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца)**.** *Для любых векторов* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *унитарного пространства* $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \le (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$, *причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *пропорциональны.*

Следствие (неравенство треугольника)**.**

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Лемма (Теорема Пифагора)**.** *Если* $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$*, то* $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2$.

Предложение. *Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Предложение. *Базис* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *унитарного пространства ортонормирован тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

1. *для любых* $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ *и* $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n$;
2. *координаты любого вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *вычисляются по формуле* $x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$ *для* $i \leq n$*, т.е.* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n$.

Теорема. *Во всяком конечномерном унитарном пространстве имеется ортонормированный базис. Более того, ортонормированный базис любого его подпространства можно дополнить до ортонормированного базиса всего пространства.*

Теорема. *Расстояние от вектора* $\boldsymbol{x}$ *конечномерного унитарного пространства* V *до подпространства* U *равно* $|\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|$*, причём единственным ближайшим к* $\boldsymbol{x}$ *вектором подпространства* U *является* $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$.

Теорема. *Любые два* n*-мерных унитарных пространства изоморфны.*

39. Линейные операторы в унитарных пространствах. Сопряжённые операторы в унитарном пространстве. Самосопряжённые операторы в унитарном пространстве. Приведение квадратичной функции к главным осям над $\mathbb{C}$.

Теорема.

1. *Матрица любого линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *в любом ортонормированном базисе совпадает с транспонированной матрицей полуторалинейной функции* $\alpha(\mathcal{A})$ *в том же базисе.*
2. *Отображение* α *из пространства* $\mathscr{L}(V)$ *линейных операторов в* V *в пространство* $\mathscr{B}(V)$ *полуторалинейных функций на* V *— изоморфизм.*

Теорема. *Для каждого линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *с матрицей* A *в некотором (любом) ортонормированном базисе сопряжённый оператор* $\mathcal{A}^*$ *существует и единствен, его матрица в том же базисе есть* эрмитово сопряжённая *к* A *матрица* $\overline{A}^T$.

Теорема. *Линейный оператор* $\mathcal{A}$ *в унитарном пространстве* V *самосопряжён* $\iff$ *его матрица в некотором ортонормированном базисе эрмитова* $\iff$ *его матрица в произвольном ортонормированном базисе эрмитова.*

Теорема. *Для любого самосопряжённого линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в конечномерном унитарном пространстве* V *найдётся ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна и вещественна.*

Следствие. *Для оператора* $\mathcal{A}$ *в конечномерном унитарном пространстве следующие условия равносильны:*

1. *оператор* $\mathcal{A}$ *самосопряжён;*
2. *существует ортонормированный базис, в котором матрица* $\mathcal{A}$ *диагональна и вещественна;*
3. *если* A *— матрица* $\mathcal{A}$ *в любом ортонормированном базисе, то существуют унитарная матрица* T *и вещественная диагональная матрица* D*, для которых* $A = T^{-1}DT$.

Теорема. *1. Сумма самосопряжённых линейных операторов в унитарном пространстве и произведение самосопряжённого оператора на вещественное число являются самосопряжёнными операторами.*

2. Композиция двух самосопряжённых операторов в унитарном пространстве является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.

Теорема. *Пусть V — n-мерное унитарное пространство и $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ — эрмитова полуторалинейная функция. Тогда в V существует ортонормированный базис $\boldsymbol{E}$, в котором квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{C}$, соответствующая b, записывается в виде суммы квадратов с вещественными коэффициентами:*

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и x_i — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

40. Унитарные операторы. Комплексификация евклидова пространства. Полярное разложение над $\mathbb{C}$.

Теорема. *Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в конечномерном унитарном пространстве V является унитарным $\iff$ его матрица в некотором ортонормированном базисе унитарна $\iff$ его матрица в произвольном ортонормированном базисе унитарна.*

Следствие. *Линейный оператор в конечномерном унитарном пространстве унитарен $\iff$ он переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис $\iff$ он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Теорема. *Линейный оператор в унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.*

Следствие. *Все собственные значения унитарного линейного оператора по модулю равны* 1.

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — унитарный линейный оператор в унитарном пространстве V и U — подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ тоже инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

Теорема. *Линейный оператор в конечномерном унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица диагональна, причём все её диагональные элементы по модулю равны 1.*

Лемма. *Самосопряжённый оператор в конечномерном унитарном пространстве положительно (неотрицательно) определён тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).*

Лемма. *Для всякого положительно (неотрицательно) определённого самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном унитарном пространстве существует единственный положительно (неотрицательно) определённый самосопряжённый оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ — квадратный корень из $\mathcal{A}$.*

Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в конечномерном унитарном пространстве и $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{B}\boldsymbol{x}, \mathcal{B}\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Тогда существует унитарный оператор $\mathcal{U}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{U} \circ \mathcal{B}$.*

Теорема (о полярном разложении над $\mathbb{C}$)**.** *Для всякого линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в конечномерном унитарном пространстве существуют* полярные разложения $\mathcal{A} = \mathcal{U} \circ \mathcal{S}_1$ *и* $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{U}$, *где* $\mathcal{S}_1$ *и* $\mathcal{S}_2$ *— неотрицательно определённые самосопряжённые операторы и* $\mathcal{U}$ *— ортогональный оператор. Если* $\mathcal{A}$ *невырожден, то* $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}_1$ *и* $\mathcal{S}_2$ *определены однозначно.*

Лекция 13. *Аффинные пространства*