**Линейная алгебра и геометрия**

Подробная программа курса, 2026, версия от 16.03.2026

## Лекция 1. *Векторные пространства, линейная зависимость*

**1.** Векторные пространства. Подпространства. Линейная зависимость и линейные комбинации векторов. Ранг системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.

> **Лемма** (о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов). *Если система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ линейно независима, а система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ линейно зависима (в частности, если $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n \rangle$), то вектор $\boldsymbol{x}$ единственным образом линейно выражается выражается через вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$:*
>
> $$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n.$$
>
> **Лемма** (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной). *Если $\operatorname{rank} X < \infty$, то любая система линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в $X$ системы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*
>
> **Лемма** (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной). *Если $\operatorname{rank} X < \infty$, то любая система линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в $X$ системы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*
>
> **Лемма** (основная, о линейной зависимости). *Если векторное пространство $V$ порождается $n$ векторами, то всякие $m > n$ векторов пространства $V$ линейно зависимы.*
>
> **Теорема** (о монотонности ранга). *Пусть $X \subset V$, $Y \subset \langle X \rangle$ и $\operatorname{rank} X < \infty$. Тогда $\operatorname{rank} Y \leq \operatorname{rank} X$.*

**2.** Базис конечномерного пространства. Размерность конечномерного пространства.

> **Лемма** (о ранге конечномерного пространства). *Векторное пространство $V$ конечномерно если и только если $\operatorname{rank} V < \infty$.*
>
> **Теорема** (о дополнении до базиса). *Пусть $X$ — полная система векторов в конечномерном векторном пространстве $V$. Всякую линейно независимую систему векторов из $X$ можно дополнить до базиса $V$.*
>
> **Следствие.** *Во всяком конечномерном векторного пространстве есть базис.*
>
> **Теорема.** *Все базисы конечномерного пространства $V$ содержат одно и тоже число векторов.*
>
> **Теорема.** *Пусть $V$ конечномерное пространство и $X \subset V$. Тогда $\langle X \rangle$ конечномерно и $\dim \langle X \rangle = \operatorname{rank} X$.*
>
> **Следствие.** *Если $V$ конечномерное пространство, то $\dim V = \operatorname{rank} V$.*
>
> **Следствие.** *Если $V$ — конечномерное векторное пространство и $U$ — его собственное подпространство, то $\dim U < \dim V$.*

## Лекция 2. *Координаты векторов, изоморфизмы линейных пространств, сумма и пересечение линейных подпространств*

**3.** Координаты векторов. Изоморфизм векторных пространств. Арифметическое векторное пространств.

**Теорема.** *Система векторов* $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ *в конечномерном векторном пространстве* $V$ *является базисом пространства* $V$*, если и только если каждый вектор* $\boldsymbol{x} \in V$ *единственным образом выражается через* $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

**Теорема.** *Всякое векторное пространство* $V$ *над полем* $K$ *размерности* $n$ *изоморфно арифметическому пространству* $K^n$.

**Теорема.** *Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеет одинаковую размерность.*

**4.** Матрица перехода. Свойства матрицы перехода. Параметрические уравнения подпространства.

**5.** Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула Грассмана.

**Теорема** (о прямой сумме)**.** *Сумма подпространств* $U$ *и* $W$ *произвольного векторного пространства является прямой* $\iff U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

**Лемма.** *Пусть* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ *система линейно независимых векторов. Тогда* $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

**Теорема.** *Для любых двух подпространств* $U$ *и* $W$ *конечномерного векторного пространства* $V$ *над полем* $K$ *справедлива* формула Грассмана

$$\boxed{\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}.$$

## **Лекция 3.** *Прямая сумма нескольких подпространств. Сопряженное пространство*

**6.** Прямая сумма нескольких подпространств

**Теорема** (о прямой сумме)**.** *Для конечномерных подпространств* $V_1, \dots, V_n$ *следующие условия равносильны:*

(1) *сумма* $V_1 + \dots + V_n$ *прямая;*

(2) *если векторы* $\boldsymbol{v}_i$*,* $i \leq n$*, удовлетворяют условиям* $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ *для* $i \leq n$ *и* $\boldsymbol{v}_1 + \dots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$*, то* $\boldsymbol{v}_1 = \dots = \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$*;*

(3) *объединение любых базисов подпространств* $V_i$*,* $i \leq n$*, является базисом подпространства* $V_1 + \dots + V_n$*;*

(4) $\dim V_1 + \dots + V_n = \dim V_1 + \dots + \dim V_n$.

**7.** Сопряжённое пространство. Взаимный базис. Преобразование координат в сопряжённом пространстве.

**8.** Естественный изоморфизм между $V$ и $V^{**}$.

**Теорема.** *Для всякого конечномерного векторного пространства* $V$ *отображение*

$$\delta \colon V \to V^{**}, \ \boldsymbol{v} \mapsto \delta_{\boldsymbol{v}},$$

*является изоморфизмом.*

## **Лекция 4.** *Аннулятор и нуль-пространство. Линейные отображения.*

**9.** Аннулятор и нуль-пространство. Функционалы и подпространства.

**Лемма** (о двойственности аннулятора и нуль-пространства)**.** *Пусть* $U = V^*$ *и* $\delta\colon V \to U^* = V^{**}$ *канонический изоморфизм. Тогда*

$$\delta(Y_\circ) = Y^\circ,\ \delta(X)_\circ = X^\circ \text{ и } (Y^\circ)_\circ = (Y_\circ)^\circ.$$

**Лемма** (a)**.** *(1)* $X^\circ$ *линейное подпространство* $V^*$ *и* $X^\circ = \langle X\rangle^\circ$.

*(2)* $Y_\circ$ *линейное подпространство* $V$ *и* $Y_\circ = \langle Y\rangle_\circ$,

**Лемма** (b)**.** *Пусть* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *базис* $V$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ *взаимный базис* $V^*$ *и* $k \le n$. *Тогда* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}^\circ = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\rangle$ *и* $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\rangle_\circ = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\rangle$.

**Теорема.** *Пусть* $X \subset V$ *и* $Y \subset V^*$. *Тогда*

*(1)* $(X^\circ)_\circ = \langle X\rangle$ *и* $\operatorname{rank} X + \dim X^\circ = \dim V$;

*(2)* $(Y_\circ)^\circ = \langle Y\rangle$ *и* $\operatorname{rank} Y + \dim Y_\circ = \dim V$.

**Теорема.** *Пусть* $V$ *— конечномерное векторное пространство над полем* $K$. *Тогда множество* $U \subset V$ *является подпространством пространства* $V \iff U$ *есть пересечение ядер* $\dim V - \operatorname{rank} U$ *линейных функционалов.*

**10.** Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.

**11.** Ядро и образ линейного отображения.

**Предложение.** *Ядро* $\operatorname{Ker} f$ *любого линейного отображения* $f\colon V \to U$ *является подпространством пространства* $V$, *а образ* $\operatorname{Im} f$ *— подпространством пространства* $U$.

**Предложение.** *Линейное отображение* $f: V \to U$ *инъективно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

**Предложение.** *Если* $f\colon V \to U$ *— линейное отображение,* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ *и векторы* $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ *линейно независимы (в пространстве* $U$*), то и векторы* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *линейно независимы (в пространстве* $V$*).*

**Лемма.** *Если* $V$ *— конечномерное векторное пространство над полем* $K$ *с базисом* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, $U$ *— векторное пространство над* $K$ *и* $f\colon V \to U$ *— линейное отображение, то*

$$\operatorname{Im} f = \langle f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\rangle.$$

**Лемма.** *Пусть* $V$ *и* $U$ *— конечномерные векторные пространства с базисами* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *и* $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$, *и пусть* $f\colon V \to U$ *— линейное отображение с матрицей* $A$ *относительно базисов* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{B}$. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A.$$

**Теорема.** *Для любого линейного отображения* $f: V \to U$ *конечномерного векторного пространства* $V$

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}.$$

**Следствие.** *Линейное отображение* $f: V \to U$ *сюръективно тогда и только тогда, когда* $\dim U = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$.

**Лекция 5.** *Операторы. Инвариантные подпространства. Собственные вектора и собственные подпространства. Характеристический многочлен. Диагонализируемые операторы.*

**12.** Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Алгебра линейных операторов.

**Теорема.** *Пусть $V$ — векторное пространство конечной размерности $n$.*
*Квадратные матрицы $A$ и $B$ порядка $n$ подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора $V \to V$ в некоторых базисах пространства $V$.*

**Теорема.** *Для любого $n$-мерного векторного пространства $V$ над полем $K$ алгебры $\operatorname{End} V$ и $M_n(K)$ изоморфны.*

**Следствие.** *Для любого конечномерного векторного пространства $V$ над полем $K$*

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2.$$

**13.** Инвариантные подпространства. Разложение оператора в сумму операторов. Разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму.

**Предложение.** *Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном векторном пространстве $V$ существует аннулирующий многочлен.*

**Предложение.** *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве $V$, $f(x)$ — аннулирующий многочлен для $\mathcal{A}$ и $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ для взаимно простых многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму операторов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ таких, что $f_1(\mathcal{A}_1) = \Theta$ и $f_2(\mathcal{A}_2) = \Theta$. Кроме того,*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{A}_1 = \ker f_1(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_2(\mathcal{A}), \qquad \operatorname{Dom} \mathcal{A}_2 = \ker f_2(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}).$$

**Теорема** (о разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве $V$, $f(x)$ — аннулирующий многочлен для $\mathcal{A}$ и $f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)$, где многочлены $f_i(x)$ и $f_j(x)$ взаимно просты для различных $i$ и $j$. Тогда $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\dots$, $\mathcal{A}_m$ таких, что $f_i(\mathcal{A}_i) = \Theta$ и*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{A}_i = \ker f_i(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}) f_2(\mathcal{A}) \dots f_{i-1}(\mathcal{A}) f_{i+1}(\mathcal{A}) \dots f_m(\mathcal{A})$$

*для $i = 1, 2, \dots, m$.*

**14.** Собственные векторы. Характеристический многочлен. Собственные подпространства.

**Предложение.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ — произвольный базис конечномерного пространства $V$, и $\mathcal{A} \colon V \to V$ — линейный оператор с матрицей $A$ в этом базисе. Число $\lambda$ является собственным значением, отвечающим некоторому собственному вектору оператора $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда* $\det(A - \lambda E) = 0$.

**Предложение.** *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

**Следствие.** *Коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами линейного оператора.*

**Предложение.** *Пусть $\mathcal{A}$ есть оператор в конечномерном пространстве $V$, $U$ инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство и $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$. Тогда характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ делит характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$.*

**Предложение.** *Пусть $V$ — векторное пространство над полем $K$, $\mathcal{A}$ — линейный оператор и $\lambda$ — собственное значение $\mathcal{A}$. Тогда собственное подпространство $V_\lambda$ является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$.*

> **Следствие.** *Сумма собственных подпространств любого линейного оператора является прямой суммой.*

**15.** Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Диагонализируемые операторы.

> **Предложение.** *Геометрическая кратность собственного значения оператора не превосходит алгебраической кратности.*
>
> **Предложение** (о операторе с диагональной матрицей)**.** *Пусть матрица $A = (a_{ij})$ оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ диагональна, $\operatorname{Sp} \mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $N_j = \{i : a_{ii} = \lambda_j\}$ и $k_j = |N_j|$ для $j = 1, \ldots, m$. Тогда*
>
> (1) *базис $\boldsymbol{E}$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$;*
>
> (2) $\bigcup_{j=1}^{m} N_j = \{1, \ldots, n\}$;
>
> (3) $V_{\lambda_j} = \langle \{\boldsymbol{e}_i : i \in N_j\} \rangle$ *для $j = 1, \ldots, m$;*
>
> (4) *$V$ является прямой суммой собственных подпространств;*
>
> (5)
> $$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda_j - t)^{k_j}$$
>
> (6) *для $j = 1, \ldots, m$, геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_j$ совпадают.*
>
> **Теорема.** *Для оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном пространстве $V$ следующие условия эквивалентны:*
>
> (1) *$\mathcal{A}$ диагонализируем;*
>
> (2) *в пространстве $V$ имеется базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$;*
>
> (3) *$V$ является прямой суммой собственных подпространств;*
>
> (4) *характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители и для каждого собственного значения геометрическая и алгебраическая кратность совпадают.*

## Лекция 6. *Теорема Гамильтона–Кэли. Нильпотентный оператор. Существование жордановой формы для нильпотентный оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.*

**16.** Теорема Гамильтона–Кэли

> **Предложение.** *Пусть $\boldsymbol{x} \in V$ и $\langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \ldots \rangle = V$. Тогда для $\mathcal{A}$ выполняется теорема Гамильтона–Кэли, то есть $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \Theta$.*
>
> **Теорема.** *Теорема Гамильтона–Кэли Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном векторном пространстве $V$ характеристический многочлен является аннулирующим.*

**17.** Нильпотентные операторы. Существование жорданова базис для нильпотентного оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.

> **Теорема.** *Для любого нильпотентного оператора в конечномерном пространстве существует жорданов базис.*

**Теорема** (о характеристическом многочлене нильпотентного оператора)**.** *Оператор $\mathcal{A}$ в $n$-мерном пространстве $V$ является нильпотентным если и только если $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n$.*

## Лекция 7. *Единственность жордановой формы нильпотентного оператора. Корневые подпространства. Жорданова форма оператора.*

**18.** Единственность жорданова базис для нильпотентного оператора.

$$\boxed{\text{число клеток размера } k = \operatorname{rank} A^{k-1} - 2\operatorname{rank} A^k + \operatorname{rank} A^{k+1}}.$$

*Вывод:* Жорданова форма матрицы нильпотентного оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток на диагонали.

**19.** Разложение оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора.

**Теорема** (о разложении оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечномерном пространстве $V$. Тогда*

(1) *оператор $\mathcal{A}$ в раскладывается в прямую сумму нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ и невырожденного оператора $\mathcal{S}$;*

(2) $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \{\boldsymbol{x} \in V : \mathcal{A}^i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *для некоторого* $i\}$;

(3) *если оператор $\mathcal{A}$ вырожденный, то $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$, $m = \dim\operatorname{Dom}\mathcal{N}$ равно алгебраической кратности $0$ и $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$.*

**20.** Корневые векторы и подпространства.

**Предложение** (о нулевом корневом подпространстве вырожденного оператора)**.** *Если $\mathcal{A}$ вырожденный оператор, то $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$, $V^0 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$, где $m$ есть алгебраическая кратность $0$ и $\dim V^0 = m$.*

**Теорема** (о корневом подпространстве)**.** *Для любого собственного значения $\lambda$ корневое подпространство $V^\lambda$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Размерность $m = \dim V^\lambda$ равна алгебраической кратности собственного значения $\lambda$ и $V^\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$. Для $\mathcal{K} = \mathcal{A}|_{V^\lambda}$, $\chi_{\mathcal{K}}(t) = (\lambda - t)^m$.*

**Теорема** (о разложении на корневые подпространства)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечномерном пространстве $V$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *пространство $V$ раскладывается в прямую сумму корневых подпространств;*

(2) *характерестический многочлен раскладывается на линейные множители;*

(3) *если $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $k_i$ есть алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_i$ для $i = 1, \dots, m$, то*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2}\dots(\lambda_m - \lambda)^{k_m} \quad \text{и}$$
$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_m}.$$

**21.** Жорданова форма оператора

**Теорема.** *Если матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ приводится к жордановой форме, то эта форма определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на диагонали.*

*А именно, для любого $\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$ и любого натурального $k$*

$$\boxed{\text{число клеток } J_k(\lambda) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k-1} - 2\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k} + \operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{k+1}}$$

(ранг оператора $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^0$ полагается равным нулю).

## Лекция 8. *Комплексификация и овеществление пространств и линейных отображений. Инвариантные двухмерные подпространства у вещественного оператора.*

**22.** Комплексификация и овеществление пространств и линейных отображений.

**Теорема.** *Любой базис $\boldsymbol{E}$ пространства $V$ является одновременно и базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$.*

**Следствие.** *Размерность комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ любого векторного пространства $V$ над $\mathbb{R}$ равна размерности пространства $V$.*

**Теорема.** *Если $\boldsymbol{E}$ — базис векторного пространства $V$ над полем $\mathbb{C}$, то $\boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E}$ — базис $V_{\mathbb{R}}$.*

**Следствие.** *Если $V$ — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\dim V = n$, то $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$.*

**Теорема.** *Пусть $V$ и $U$ — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{C}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей $A = B + iC$ относительно этих базисов. Тогда матрица $f$ как отображения $V_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$ относительно базисов $\boldsymbol{E}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, i\boldsymbol{b}_1, \ldots, i\boldsymbol{b}_m\}$ равна $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.*

**Теорема.** *Пусть $V$ и $U$ — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{R}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей $A$ относительно этих базисов. Тогда матрица $A$ также является матрицей отображения $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}$ в тех же базисах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$.*

**23.** Инвариантные двухмерные подпространства вещественного оператора.

**Теорема.** *Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечно мерном вещественном пространстве $V$, $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ есть комплексный корень $(b \neq 0)$ характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$ есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\lambda$. Тогда*

- *$U = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ является двухмерным инвариантным подпространством $V$;*
- *для $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$, $\operatorname{Sp}\mathcal{B}|_{\mathbb{C}} = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, вектор $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\lambda$ и $\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\bar{\lambda}$;*
- *матрица*
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
  *является матрицей оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.*

**Следствие.** *У оператора в конечномерном вещественном пространстве есть либо одномерное либо двухмерное инвариантное подпространство.*

## Лекция 9. *Билинейные функции*