

Линейная алгебра и геометрия

Подробная программа курса, 2026, версия от 23.03.2026 (коллоквиум)

Лекция 1. Векторные пространства, линейная зависимость

1. Векторные пространства. Подпространства. Линейная зависимость и линейные комбинации векторов. Ранг системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.

Лемма (о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов). *Если система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ линейно независима, а система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}$ линейно зависима (в частности, если $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$), то вектор \mathbf{x} единственным образом линейно выражается через векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$:*

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n.$$

Лемма (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной). *Если $\text{rank } X < \infty$, то любая система линейно независимых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в X системы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*

Лемма (о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной). *Если $\text{rank } X < \infty$, то любая система линейно независимых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ дополняется до максимальной в X системы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n \in X$ линейно независимых векторов.*

Лемма (основная, о линейной зависимости). *Если векторное пространство V порождается n векторами, то всякие $m > n$ векторов пространства V линейно зависимы.*

Теорема (о монотонности ранга). *Пусть $X \subset V$, $Y \subset \langle X \rangle$ и $\text{rank } X < \infty$. Тогда $\text{rank } Y \leq \text{rank } X$.*

2. Базис конечномерного пространства. Размерность конечномерного пространства.

Лемма (о ранге конечномерного пространства). *Векторное пространство V конечномерно если и только если $\text{rank } V < \infty$.*

Теорема (о дополнении до базиса). *Пусть X — полная система векторов в конечномерном векторном пространстве V . Всякую линейно независимую систему векторов из X можно дополнить до базиса V .*

Следствие. *Во всяком конечномерном векторном пространстве есть базис.*

Теорема. *Все базисы конечномерного пространства V содержат одно и то же число векторов.*

Теорема. *Пусть V конечномерное пространство и $X \subset V$. Тогда $\langle X \rangle$ конечномерно и $\dim \langle X \rangle = \text{rank } X$.*

Следствие. *Если V конечномерное пространство, то $\dim V = \text{rank } V$.*

Следствие. *Если V — конечномерное векторное пространство и U — его собственное подпространство, то $\dim U < \dim V$.*

Лекция 2. Координаты векторов, изоморфизмы линейных пространств, сумма и пересечение линейных подпространств

3. Координаты векторов. Изоморфизм векторных пространств. Арифметическое векторное пространство.

Теорема. Система векторов e_1, \dots, e_n в конечномерном векторном пространстве V является базисом пространства V , если и только если каждый вектор $x \in V$ единственным образом выражается через e_1, \dots, e_n .

Теорема. Всякое векторное пространство V над полем K размерности n изоморфно арифметическому пространству K^n .

Теорема. Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

4. Матрица перехода. Свойства матрицы перехода. Параметрические уравнения подпространства.
5. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула Грассмана.

Теорема (о прямой сумме). Сумма подпространств U и W произвольного векторного пространства является прямой $\iff U \cap W = \{0\}$.

Лемма. Пусть v_1, v_2, \dots, v_n система линейно независимых векторов. Тогда $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$.

Теорема. Для любых двух подпространств U и W конечномерного векторного пространства V над полем K справедлива формула Грассмана

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Лекция 3. Прямая сумма нескольких подпространств. Сопряженное пространство

6. Прямая сумма нескольких подпространств

Теорема (о прямой сумме). Для конечномерных подпространств V_1, \dots, V_n следующие условия равносильны:

- (1) сумма $V_1 + \dots + V_n$ прямая;
- (2) если векторы $v_i, i \leq n$, удовлетворяют условиям $v_i \in V_i$ для $i \leq n$ и $v_1 + \dots + v_n = 0$, то $v_1 = \dots = v_n = 0$;
- (3) объединение любых базисов подпространств $V_i, i \leq n$, является базисом подпространства $V_1 + \dots + V_n$;
- (4) $\dim V_1 + \dots + V_n = \dim V_1 + \dots + \dim V_n$.

7. Сопряжённое пространство. Взаимный базис. Преобразование координат в сопряжённом пространстве.
8. Естественный изоморфизм между V и V^{**} .

Теорема. Для всякого конечномерного векторного пространства V отображение

$$\delta: V \rightarrow V^{**}, v \mapsto \delta_v,$$

является изоморфизмом.

Лекция 4. Аннулятор и нуль-пространство. Линейные отображения.

9. Аннулятор и нуль-пространство. Функционалы и подпространства.

Лемма (о двойственности аннулятора и нуль-пространства). Пусть $U = V^*$ и $\delta: V \rightarrow U^* = V^{**}$ канонический изоморфизм. Тогда

$$\delta(Y_\circ) = Y^\circ, \quad \delta(X)_\circ = X^\circ \quad \text{и} \quad (Y^\circ)_\circ = (Y_\circ)^\circ.$$

Лемма (а). (1) X° линейное подпространство V^* и $X^\circ = \langle X \rangle^\circ$.

(2) Y_\circ линейное подпространство V и $Y_\circ = \langle Y \rangle_\circ$,

Лемма (б). Пусть e_1, \dots, e_n базис V , $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ взаимный базис V^* и $k \leq n$. Тогда $\{e_1, \dots, e_k\}^\circ = \langle \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n \rangle$ и $\langle \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n \rangle_\circ = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

Теорема. Пусть $X \subset V$ и $Y \subset V^*$. Тогда

(1) $(X^\circ)_\circ = \langle X \rangle$ и $\text{rank } X + \dim X^\circ = \dim V$;

(2) $(Y_\circ)^\circ = \langle Y \rangle$ и $\text{rank } Y + \dim Y_\circ = \dim V$.

Теорема. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K . Тогда множество $U \subset V$ является подпространством пространства $V \iff U$ есть пересечение ядер $\dim V - \text{rank } U$ линейных функционалов.

10. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.

11. Ядро и образ линейного отображения.

Предложение. Ядро $\text{Ker } f$ любого линейного отображения $f: V \rightarrow U$ является подпространством пространства V , а образ $\text{Im } f$ — подпространством пространства U .

Предложение. Линейное отображение $f: V \rightarrow U$ инъективно тогда и только тогда, когда $\text{Ker } f = \{0\}$.

Предложение. Если $f: V \rightarrow U$ — линейное отображение, $v_1, \dots, v_n \in V$ и векторы $f(v_1), \dots, f(v_n)$ линейно независимы (в пространстве U), то и векторы v_1, \dots, v_n линейно независимы (в пространстве V).

Лемма. Если V — конечномерное векторное пространство над полем K с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$, U — векторное пространство над K и $f: V \rightarrow U$ — линейное отображение, то

$$\text{Im } f = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle.$$

Лемма. Пусть V и U — конечномерные векторные пространства с базисами $\mathbf{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\mathbf{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$, и пусть $f: V \rightarrow U$ — линейное отображение с матрицей A относительно базисов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Тогда

$$\dim \text{Im } f = \text{rank } A.$$

Теорема. Для любого линейного отображения $f: V \rightarrow U$ конечномерного векторного пространства V

$$\boxed{\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V}.$$

Следствие. Линейное отображение $f: V \rightarrow U$ сюръективно тогда и только тогда, когда $\dim U = \dim V - \dim \text{Ker } f$.

Лекция 5. Операторы. Инвариантные подпространства. Собственные вектора и собственные подпространства. Характеристический многочлен. Диагонализируемые операторы.

12. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Алгебра линейных операторов.

Теорема. Пусть V — векторное пространство конечной размерности n .

Квадратные матрицы A и B порядка n подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора $V \rightarrow V$ в некоторых базисах пространства V .

Теорема. Для любого n -мерного векторного пространства V над полем K алгебры $\text{End } V$ и $M_n(K)$ изоморфны.

Следствие. Для любого конечномерного векторного пространства V над полем K

$$\dim \text{End } V = (\dim V)^2.$$

13. Инвариантные подпространства. Разложение оператора в сумму операторов. Разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму.

Предложение. Для всякого линейного оператора \mathcal{A} в конечномерном векторном пространстве V существует аннулирующий многочлен.

Предложение. Пусть \mathcal{A} — линейный оператор в векторном пространстве V , $f(x)$ — аннулирующий многочлен для \mathcal{A} и $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ для взаимно простых многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда \mathcal{A} раскладывается в прямую сумму операторов \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 таких, что $f_1(\mathcal{A}_1) = \Theta$ и $f_2(\mathcal{A}_2) = \Theta$. Кроме того,

$$\text{Dom } \mathcal{A}_1 = \ker f_1(\mathcal{A}) = \text{Im } f_2(\mathcal{A}), \quad \text{Dom } \mathcal{A}_2 = \ker f_2(\mathcal{A}) = \text{Im } f_1(\mathcal{A}).$$

Теорема (о разложении оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму). Пусть \mathcal{A} — линейный оператор в векторном пространстве V , $f(x)$ — аннулирующий многочлен для \mathcal{A} и $f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)$, где многочлены $f_i(x)$ и $f_j(x)$ взаимно просты для различных i и j . Тогда \mathcal{A} раскладывается в прямую сумму операторов $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m$ таких, что $f_i(\mathcal{A}_i) = \Theta$ и

$$\text{Dom } \mathcal{A}_i = \ker f_i(\mathcal{A}) = \text{Im } f_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A}) \dots f_{i-1}(\mathcal{A})f_{i+1}(\mathcal{A}) \dots f_m(\mathcal{A})$$

для $i = 1, 2, \dots, m$.

14. Собственные векторы. Характеристический многочлен. Собственные подпространства.

Предложение. Пусть \mathbf{E} — произвольный базис конечномерного пространства V , и $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ — линейный оператор с матрицей A в этом базисе. Число λ является собственным значением, отвечающим некоторому собственному вектору оператора \mathcal{A} , тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$.

Предложение. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Следствие. Коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами линейного оператора.

Предложение. Пусть \mathcal{A} есть оператор в конечномерном пространстве V , U инвариантное относительно \mathcal{A} подпространство и $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$. Тогда характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ делит характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$.

Предложение. Пусть V — векторное пространство над полем K , \mathcal{A} — линейный оператор и λ — собственное значение \mathcal{A} . Тогда собственное подпространство V_λ является инвариантным подпространством оператора \mathcal{A} .

Следствие. Сумма собственных подпространств любого линейного оператора является прямой суммой.

15. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Диагонализируемые операторы.

Предложение. Геометрическая кратность собственного значения оператора не превосходит алгебраической кратности.

Предложение (о операторе с диагональной матрицей). Пусть матрица $A = (a_{ij})$ оператора \mathcal{A} в базисе $\mathbf{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ диагональна, $\text{Sp } \mathcal{A} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $N_j = \{i : a_{ii} = \lambda_j\}$ и $k_j = |N_j|$ для $j = 1, \dots, m$. Тогда

(1) базис \mathbf{E} состоит из собственных векторов оператора \mathcal{A} ;

(2) $\bigcup_{j=1}^m N_j = \{1, \dots, n\}$;

(3) $V_{\lambda_j} = \langle \{e_i : i \in N_j\} \rangle$ для $j = 1, \dots, m$;

(4) V является прямой суммой собственных подпространств;

(5)

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{j=1}^m (\lambda_j - t)^{k_j}$$

(6) для $j = 1, \dots, m$, геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения λ_j совпадают.

Теорема. Для оператора \mathcal{A} в конечномерном пространстве V следующие условия эквивалентны:

(1) \mathcal{A} диагонализируем;

(2) в пространстве V имеется базис, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} ;

(3) V является прямой суммой собственных подпространств;

(4) характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители и для каждого собственного значения геометрическая и алгебраическая кратность совпадают.

Лекция 6. Теорема Гамильтона–Кэли. Нильпотентный оператор. Существование жордановой формы для нильпотентного оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.

16. Теорема Гамильтона–Кэли

Предложение. Пусть $\mathbf{x} \in V$ и $\langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathcal{A}^2\mathbf{x}, \dots \rangle = V$. Тогда для \mathcal{A} выполняется теорема Гамильтона–Кэли, то есть $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \Theta$.

Теорема. Теорема Гамильтона–Кэли Для всякого линейного оператора \mathcal{A} в конечномерном векторном пространстве V характеристический многочлен является аннулирующим.

17. Нильпотентные операторы. Существование жорданова базиса для нильпотентного оператора. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.

Теорема. Для любого нильпотентного оператора в конечномерном пространстве существует жорданов базис.

Теорема (о характеристическом многочлене нильпотентного оператора). *Оператор \mathcal{A} в n -мерном пространстве V является нильпотентным если и только если $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n$.*

Лекция 7. *Единственность жордановой формы нильпотентного оператора. Корневые подпространства. Жорданова форма оператора.*

18. Единственность жорданова базис для нильпотентного оператора.

$$\boxed{\text{число клеток размера } k = \text{rank } A^{k-1} - 2 \text{rank } A^k + \text{rank } A^{k+1}}.$$

Вывод: Жорданова форма матрицы нильпотентного оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток на диагонали.

19. Разложение оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора.

Теорема (о разложении оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора). *Пусть \mathcal{A} оператор в конечномерном пространстве V . Тогда*

- (1) *оператор \mathcal{A} в раскладывается в прямую сумму нильпотентного оператора \mathcal{N} и невырожденного оператора \mathcal{S} ;*
- (2) *$\text{Dom } \mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in V : \mathcal{A}^i \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ для некоторого } i\}$;*
- (3) *если оператор \mathcal{A} вырожденный, то $0 \in \text{Sp } \mathcal{A}$, $m = \dim \text{Dom } \mathcal{N}$ равно алгебраической кратности 0 и $\text{Dom } \mathcal{N} = \text{Ker } \mathcal{A}^m$.*

20. Корневые векторы и подпространства.

Предложение (о нулевом корневом подпространстве вырожденного оператора). *Если \mathcal{A} вырожденный оператор, то $0 \in \text{Sp } \mathcal{A}$, $V^0 = \text{Ker } \mathcal{A}^m$, где m есть алгебраическая кратность 0 и $\dim V^0 = m$.*

Теорема (о корневом подпространстве). *Для любого собственного значения λ корневое подпространство V^λ инвариантно относительно оператора \mathcal{A} . Размерность $m = \dim V^\lambda$ равна алгебраической кратности собственного значения λ и $V^\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m$. Для $\mathcal{K} = \mathcal{A}|_{V^\lambda}$, $\chi_{\mathcal{K}}(t) = (\lambda - t)^m$.*

Теорема (о разложении на корневые подпространства). *Пусть \mathcal{A} оператор в конечномерном пространстве V . Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) *пространство V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств;*
- (2) *характеристический многочлен раскладывается на линейные множители;*
- (3) *если $\text{Sp } \mathcal{A} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, k_i есть алгебраическая кратность собственного значения λ_i для $i = 1, \dots, m$, то*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \dots (\lambda_m - \lambda)^{k_m} \quad \text{и}$$

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_m}.$$

21. Жорданова форма оператора

Теорема. *Если матрица линейного оператора \mathcal{A} приводится к жордановой форме, то эта форма определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на диагонали.*

A именно, для любого $\lambda \in \text{Sp } A$ и любого натурального k

$$\text{число клеток } J_k(\lambda) = \text{rank}(A - \lambda E)^{k-1} - 2 \text{rank}(A - \lambda E)^k + \text{rank}(A - \lambda E)^{k+1}$$

(ранг оператора $(A - \lambda E)^0$ полагается равным нулю).

Лекция 8. Комплексификация и о вещественности пространств и линейных отображений. Инвариантные двумерные подпространства у вещественного оператора.

22. Комплексификация и о вещественности пространств и линейных отображений.

Теорема. Любой базис E пространства V является одновременно и базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$.

Следствие. Размерность комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ любого векторного пространства V над \mathbb{R} равна размерности пространства V .

Теорема. Если E — базис векторного пространства V над полем \mathbb{C} , то $E \cup iE$ — базис $V_{\mathbb{R}}$.

Следствие. Если V — конечномерное векторное пространство над полем \mathbb{C} и $\dim V = n$, то $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$.

Теорема. Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над \mathbb{C} с базисами $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ соответственно, и пусть $f: V \rightarrow U$ — линейное отображение с матрицей $A = B + iC$ относительно этих базисов. Тогда матрица f как отображения $V_{\mathbb{R}} \rightarrow U_{\mathbb{R}}$ относительно базисов $E_{\mathbb{R}} = \{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ и $B_{\mathbb{R}} = \{b_1, \dots, b_m, ib_1, \dots, ib_m\}$ равна $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.

Теорема. Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над \mathbb{R} с базисами $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ соответственно, и пусть $f: V \rightarrow U$ — линейное отображение с матрицей A относительно этих базисов. Тогда матрица A также является матрицей отображения $f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow U_{\mathbb{C}}$ в тех же базисах E и B .

23. Инвариантные двумерные подпространства вещественного оператора.

Теорема. Пусть A оператор в конечно мерном вещественном пространстве V , $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ есть комплексный корень ($b \neq 0$) характеристического многочлена $\chi_A(t)$ и $\mathbf{x} + i\mathbf{y}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$) есть собственный вектор оператора $A_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ . Тогда

- $U = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ является двумерным инвариантным подпространством V ;
- для $B = A|_U$, $\text{Sp } B|_{\mathbb{C}} = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, вектор $\mathbf{x} + i\mathbf{y}$ является собственным вектором оператора $B_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ и $\mathbf{x} - i\mathbf{y}$ является собственным вектором оператора $B_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\bar{\lambda}$;

- матрица

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

является матрицей оператора B в базисе $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

Следствие. У оператора в конечномерном вещественном пространстве есть либо одномерное либо двумерное инвариантное подпространство.

Лекция 9. Билинейные функции

24. Билинейные функции. Корреляции и ядра. Матрица билинейной функции. Невырожденные билинейные функции.

Предложение. Пусть b — билинейная функция на векторном пространстве V и $U \subseteq_{\text{lin}} V$.

1. Левое ортогональное дополнение ${}^{\perp}U$ подпространства U — это прообраз при левой корреляции $b_{\text{лев}}: V \rightarrow V^*$ аннулятора

$$U^0 = \text{Ann } U = \{ \mathbf{f} \in V^* : (\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in U \}$$

подпространства U (относительно естественного спаривания $s(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$).

2. $U^{\perp} = b_{\text{пр}}^{-1}(U^0)$.

$$\boxed{B' = C^T B C}$$

Теорема. Следующие свойства билинейной функции b на n -мерном векторном пространстве V равносильны:

1. функция b невырождена, т.е. $\text{Ker}_{\text{лев}} b = \text{Ker}_{\text{пр}} b = \{ \mathbf{0} \}$;
2. матрица Грама функции b в некотором базисе невырождена;
3. матрица Грама функции b в любом базисе невырождена;
4. левая корреляция $b_{\text{лев}}: V \rightarrow V^*$ — изоморфизм;
5. правая корреляция $b_{\text{пр}}: V \rightarrow V^*$ — изоморфизм;
6. для любого $\mathbf{v} \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ существует $\mathbf{u} \in V$ такой, что $b(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \neq 0$;
7. для любого $\mathbf{v} \in V \setminus \{ \mathbf{0} \}$ существует $\mathbf{u} \in V$ такой, что $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$;
8. для любой линейной функции $f: V \rightarrow K$ существует $\mathbf{v} \in V$ такой, что $f(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ для всех $\mathbf{x} \in V$;
9. для любой линейной функции $f: V \rightarrow K$ существует $\mathbf{v} \in V$ такой, что $f(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ для всех $\mathbf{x} \in V$.

При выполнении этих условий вектор \mathbf{v} в 8 и 9 определён однозначно.

Предложение. Если билинейная функция b на конечномерном пространстве V невырождена, то для всякого подпространства $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \text{и} \quad ({}^{\perp}U)^{\perp} = U = {}^{\perp}(U^{\perp}).$$

25. Симметричные и кососимметричные билинейные функции. Теорема Лагранжа. Канонический и симплектический базис.

Предложение. Билинейная функция b на V кососимметрична $\iff b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$.

Предложение. Множества $\mathcal{B}_{\text{сим}}(V)$ и $\mathcal{B}_{\text{кос}}(V)$ всех симметричных и всех кососимметричных билинейных функций на V являются линейными подпространствами векторного пространства $\mathcal{B}(V)$. Более того, $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_{\text{сим}}(V) \oplus \mathcal{B}_{\text{кос}}(V)$.

Предложение. Если b — (косо)симметричная билинейная функция и U — подпространство пространства V с тем свойством, что $\text{Ker } b \oplus U = V$, то ограничение функции b на U невырождено.

Теорема (Лагранжа). Для симметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует базис пространства V , в котором матрица b диагональна.

Теорема. Для любой кососимметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует симплектический базис.

Лекция 10. Билинейные функции

26. Квадратичные формы. Поляризация.

27. Метод Лагранжа.

28. Метод Якоби.

Теорема (формула Якоби). Пусть $b: V \times V \rightarrow K$ — симметричная билинейная функция на n -мерном векторном пространстве над любым полем K , B — её матрица в некотором базисе $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — угловые миноры матрицы B . Положим $\Delta_0 = 1$.

Если все Δ_i , $i \leq n$, отличны от нуля, то существует базис $\tilde{\mathbf{E}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ векторного пространства V , в котором квадратичная функция q , ассоциированная с b , имеет вид

$$q(y_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \dots + y_n \tilde{\mathbf{e}}_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2,$$

причём матрица перехода от \mathbf{E} к $\tilde{\mathbf{E}}$ верхне-унитреугольна (верхнетреугольна и все диагональные элементы равны 1).

29. Квадратичные формы над \mathbb{R} и над \mathbb{C} . Нормальная форма. Индексы инерции.

Предложение. Для любой квадратичной формы q на n -мерном векторном пространстве над полем вещественных чисел существует базис, в котором

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$$

для некоторых k и l , удовлетворяющих условию $r = k + l \leq n$. При этом число r является инвариантом квадратичной функции q ; более того, оно совпадает с рангом q .

Теорема (закон инерции). Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами квадратичной функции (т.е. не зависят от выбора базиса).

Теорема (теорема Якоби). Если все угловые миноры Δ_i матрицы Q квадратичной формы $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ в некотором базисе $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V не равны нулю, то отрицательный индекс инерции формы q равен числу тех $i \leq n$, для которых $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.

30. Положительно определённые билинейные функции. Критерий Сильвестра.

Теорема (критерий Сильвестра). Пусть V — n -мерное векторное пространство над \mathbb{R} и $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — любой базис в нём. Симметричная билинейная функция $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ положительно определена \iff все угловые миноры Δ_i её матрицы B в базисе \mathbf{E} положительны.

31. Полуторалинейные функции. Эрмитовы полуторалинейные функции. Эрмитовы квадратичные функции.

Предложение. Всякая эрмитова полуторалинейная функция b однозначно определяется своей эрмитовой квадратичной функцией q .

Теорема. В n -мерном векторном пространстве V над \mathbb{C} для всякой эрмитовой полуторалинейной функции b существует базис \mathbf{E} , в котором функция b и соответствующая ей эрмитова квадратичная функция q имеют нормальный вид

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_k \bar{y}_k - x_{k+1} \bar{y}_{k+1} - \dots - x_{k+\ell} \bar{y}_{k+\ell}, \quad q(\mathbf{x}) = |x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \dots - |x_{k+\ell}|^2$$

(здесь x_i и y_i — координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в \mathbf{E}).

Теорема (закон инерции). Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами эрмитовой квадратичной формы (т.е. не зависят от выбора базиса).

Теорема (формула Якоби). Пусть $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ — эрмитова полуторалинейная функция на n -мерном пространстве V над \mathbb{C} , B — её матрица в некотором базисе \mathbf{E} и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — угловые миноры B . Положим $\Delta_0 = 1$.

Если все Δ_i , $i \leq n$, отличны от нуля, то существует базис $\tilde{\mathbf{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ пространства V , в котором квадратичная функция q , ассоциированная с b , имеет вид

$$q(y_1 \tilde{e}_1 + \dots + y_n \tilde{e}_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2,$$

причём матрица перехода от \mathbf{E} к $\tilde{\mathbf{E}}$ верхне-унитреугольна.

Теорема (критерий Сильвестра). Пусть V — конечномерное векторное пространство над \mathbb{C} и \mathbf{E} — любой базис в нём. Эрмитова полуторалинейная функция на V положительно определена \iff все угловые миноры её матрицы в базисе \mathbf{E} положительны.