Линейная алгебра и геометрия

Задачи, версия от 29.03.2026

1. Доказать, что в пространстве функций одной вещественной переменной векторы f_1,..., f_n линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют числа a_1,..., a_n такие, что $\det(f_i(a_j)) \neq 0$.

2. Как изменится матрица перехода от одного базиса кдругому, если:

   а) поменять местами два вектора первого базиса;

   б) поменять местами два вектора второго базиса;

   в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

3. Пусть V — линейное пространство над полем K, U, W — подпространства в V, причём $U \cup W = V$. Доказать, что $V = U$ или $V = W$.

4. Пусть V — линейное пространство над полем K, $|K| > k$ и V_1,..., V_k — подпространства в V, причём $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Доказать, что $V = V_i$ для некоторого $i = 1, ..., k$.

5. Доказать, что для каждого базиса сопряжённого пространства V^* существует единственный базис пространства V, для которого данный базис является сопряжённым.

6. Доказать, что если два линейных оператора ранга 1 имеют равные ядра и равные образы, то они перестановочны.

7. Доказать, что собственное подпространство $V_\lambda(\mathcal{A})$ инвариантно относительно любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$.

8. Доказать, что для любой совокупности перестановочных линейных операторов конечномерного комплексного пространства существует общий собственный вектор.

9. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}^2$ имеет собственное значение λ^2, то одно из чисел λ и $-\lambda$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

10. Найти все инвариантные подпространства для линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу, состоящую из одной жордановой клетки.

11. Доказать, что всякое корневое подпространство линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с A.

12. Если многочлен $f(x)$ является аннулирующим для оператора $\mathcal{A}$, то существует не нулевое инвариантное подпространство, размерность которого не превосходит степени многочлена $f(x)$.

13. Для оператора $\mathcal{A}$ на конечномерном пространстве V следующие условия эквивалентны:

    а) характеристический многочлен $\mathcal{A}$ неприводим;

    б) только $\{0\}$ и V являются инвариантными подпространствами.

14. Для оператора $\mathcal{A}$ на конечномерном пространстве V следующие условия эквивалентны:

    а) характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ раскладывается в произведение линейных множителей;

    б) в каждом ненулевом инвариантном подпространстве есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}$.

15. Если неприводимый многочлен $q(\lambda)$ делит характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ и многочлен $f(\lambda)$ является аннулирующим для оператора $\mathcal{A}$, то $q(\lambda)$ делит $f(\lambda)$.

16. Пусть $b_1(A, B) = \operatorname{tr} A^{\intercal} B$ и $b_2(A, B) = \operatorname{tr} AB$. Доказать, что b_1 и b_2 являются симметрическими билинейными формами на пространстве $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц размера n. Вычислить индексы инерции форм $b_1(A, A)$ и $b_2(A, A)$.