

Линейная алгебра и геометрия
Задачи к коллоквиуму, версия от 29.03.2026

1. Доказать, что в пространстве функций одной вещественной переменной векторы f_1, \dots, f_n линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют числа a_1, \dots, a_n такие, что $\det(f_i(a_j)) \neq 0$.
2. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:
 - а) поменять местами два вектора первого базиса;
 - б) поменять местами два вектора второго базиса;
 - в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?
3. Пусть V — линейное пространство над полем K , U, W — подпространства в V , причём $U \cup W = V$. Доказать, что $V = U$ или $V = W$.
4. Пусть V — линейное пространство над полем K , $|K| > k$ и V_1, \dots, V_k — подпространства в V , причём $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Доказать, что $V = V_i$ для некоторого $i = 1, \dots, k$.
5. Доказать, что для каждого базиса сопряжённого пространства V^* существует единственный базис пространства V , для которого данный базис является сопряжённым.
6. Доказать, что если два линейных оператора ранга 1 имеют равные ядра и равные образы, то они перестановочны.
7. Доказать, что собственное подпространство $V_\lambda(\mathcal{A})$ инвариантно относительно любого линейного оператора \mathcal{B} , перестановочного с \mathcal{A} .
8. Доказать, что для любой совокупности перестановочных линейных операторов конечномерного комплексного пространства существует общий собственный вектор.
9. Доказать, что если оператор \mathcal{A}^2 имеет собственное значение λ^2 , то одно из чисел λ и $-\lambda$ является собственным значением оператора \mathcal{A} .
10. Найти все инвариантные подпространства для линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу, состоящую из одной жордановой клетки.
11. Доказать, что всякое корневое подпространство линейного оператора \mathcal{A} инвариантно относительно любого линейного оператора \mathcal{B} , перестановочного с \mathcal{A} .
12. Если многочлен $f(x)$ является аннулирующим для оператора \mathcal{A} , то существует не нулевое инвариантное подпространство, размерность которого не превосходит степени многочлена $f(x)$.
13. Для оператора \mathcal{A} на конечномерном пространстве V следующие условия эквивалентны:
 - а) характеристический многочлен \mathcal{A} неприводим;
 - б) только $\{0\}$ и V являются инвариантными подпространствами.
14. Для оператора \mathcal{A} на конечномерном пространстве V следующие условия эквивалентны:
 - а) характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора \mathcal{A} раскладывается в произведение линейных множителей;
 - б) в каждом ненулевом инвариантном подпространстве есть собственный вектор оператора \mathcal{A} .
15. Если неприводимый многочлен $q(\lambda)$ делит характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора \mathcal{A} и многочлен $f(\lambda)$ является аннулирующим для оператора \mathcal{A} , то $q(\lambda)$ делит $f(\lambda)$.