Линейная алгебра и геометрия

Лекция 12. Ортогональные и самосопряжённые операторы. Эрмитовы пространства.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Самосопряжённые операторы

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в евклидовом пространстве называется самосопряженным (или симметричным, или симметрическим), если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, т.е. для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$
$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}).$$

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V самосопряжен $\iff$ его матрица в некотором ортонормированном базисе симметрична $\iff$ его матрица в произвольном ортонормированном базисе симметрична.

Доказательство. Из общей теоремы о матрицах сопряжённых операторов. $\square$

Предложение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ *— самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве* V *и* U *— подпространство, инвариантное относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ортогональное дополнение* $U^\perp$ *тоже инвариантно относительно* $\mathcal{A}$.

Доказательство. … □

Теорема

Для любого самосопряжённого линейного оператора $\mathcal{A}$ в n-мерном евклидовом пространстве V найдётся ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна.

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$. Для $n = 1$ доказывать нечего. Если $n > 1$, то в V есть одно- или двумерное инвариантное подпространство U. Пусть $\dim U = 2$. Ограничение $\mathcal{A}$ на U — самосопряжённый оператор, значит, его матрица симметрична в любом ортонормированном базисе подпространства U. Характеристический многочлен симметричной матрицы 2×2 имеет корень (прямое вычисление) $\implies$ у $\mathcal{A}|_U$ есть собственный вектор $\boldsymbol{u}$. Он собственный и для всего оператора $\mathcal{A}$ $\implies$ $\langle \{\boldsymbol{u}\} \rangle$ — одномерное инвариантное подпространство.

Итак, всегда найдётся одномерное инвариантное подпространство U. Пусть $U = \langle\{\boldsymbol{u}\}\rangle$ для некоторого ненулевого $\boldsymbol{u} \in V$. По индуктивному предположению в $U^{\perp}$ есть ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}$, в котором матрица ограничения $\mathcal{A}|_U$ диагональна. Система $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n_1}, \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\}$ — ортонормированный базис пространства V, и в нём матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, так как $U^{\perp}$ и U инвариантны. □

Следствие

Если $\mathcal{A}$ — самосопряженный линейный оператор евклидова пространства V, то

1. *характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ раскладывается на линейные множители (над $\mathbb{R}$);*
2. *размерность каждого собственного подпространства V_{λ} равна кратности корня λ характеристического многочлена;*
3. *собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу.*

Следствие

Для оператора $\mathcal{A}$ следующие условия равносильны:

1. *оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён;*
2. *существует ортонормированный базис, в котором матрица $\mathcal{A}$ диагональна;*
3. *если A — матрица $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе, то существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D, для которых $A = T^{-1}DT$.*

Упражнение

Докажите, что оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве удовлетворяет условию $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & 0 & a_2 & & & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & a_k & & & \\ & & & & & -a_k & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторых $k \leqslant n$ и $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Теорема

1. *Сумма самосопряженных линейных операторов и произведение самосопряженного оператора на вещественное число являются самосопряженными операторами.*
2. *Композиция двух самосопряженных операторов является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.*

Доказательство. … $\square$

Приведение квадратичной функции к главным осям

Теорема

Пусть V — n-мерное евклидово пространство и $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ — симметричная билинейная функция. Тогда в V существует ортонормированный базис $\boldsymbol{E}$, в котором квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{R}$, соответствующая b, записывается в виде суммы квадратов с коэффициентами:

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и x_i — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Пусть B есть матрица билинейной формы в некотором ортонормированном базисе. Тогда $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ есть корни (без учета кратности) характеристического многочлена $\chi_B(\lambda)$ матрицы B.

Доказательство. Напомним, что между линейными операторами $\mathcal{A}\colon V \to V$ и билинейными функциями $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ имеется изоморфизм β, определённый правилом $\beta(\mathcal{A})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x, \mathcal{A}\boldsymbol{y})$, причём матрица $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе совпадает с матрицей $\beta(\mathcal{A})$ в том же базисе.

Ясно, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён тогда и только тогда, когда билинейная функция $\beta(\mathcal{A})$ симметрична.

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — это собственные значения самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$, для которого $b = \beta(\mathcal{A})$. Нахождение ортонормированного базиса $\boldsymbol{E}$ из теоремы называется приведением квадратичной формы q к главным осям.

… $\square$

Канонический вид ортогонального оператора

Так как ортогональный оператор сохраняет длины векторов, то верно:

Предложение

Собственные значения ортогонального линейного оператора равны ± 1.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ *— ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве* V *и* U *— подпространство, инвариантное относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ортогональное дополнение* $U^{\perp}$ *тоже инвариантно относительно* $\mathcal{A}$.

Доказательство. … $\square$

Теорема

Оператор в евклидовом пространстве ортогонален тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & & & & & & & & \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & & & & & & & \text{\Large 0} & \\ & & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & & & & & & & & \\ & & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k & & & & & \\ & & & & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & & & & & \\ & & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & \text{\Large 0} & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторых $k \leqslant n$ *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$*. Блоки* (-1) *и/или* (1) *могут отсутствовать.*

Если заменить условие $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ на $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [-\pi, \pi]$, то можно утверждать, что в выписанной матрице имеется не больше одного блока (-1) и не больше одного блока (1).

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — ортогональный оператор в n-мерном евклидовом пространстве V. Индукция по n. Для $n = 1$ утверждение верно. Пусть $n = 2$ и $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ — ортонормированный базис. Положим $\alpha = \widehat{\boldsymbol{e}_1, \mathcal{A}\boldsymbol{e}_1}$. Для вектора $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_2$ возможны два случая: либо он совпадает с вектором, который получается из $\boldsymbol{e}_2$ поворотом на угол α, либо он противоположен этому вектору. В первом случае оператор $\mathcal{A}$ — это поворот на угол α, во втором случае $\mathcal{A}$ — это отражение относительно биссектрисы ℓ между $\boldsymbol{e}_1$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_1$, и его матрица в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, где $\boldsymbol{e}'_2$ параллелен биссектрисе ℓ, имеет вид $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Предположим, что $n > 2$ и для меньших n всё доказано. Пусть U — одно- или двумерное инвариантное подпространство пространства V для $\mathcal{A}$. В U есть подходящий базис, в $U^{\perp}$ тоже (по индуктивному предположению). Нужный базис в V получается расстановкой векторов из этих базисов в подходящем порядке. $\square$

Такое представление матрицы ортогонального оператора можно трактовать как разложение оператора на плоские вращения и отражения, так как блоки матрицы соответствуют сужениям оператора на инвариантные подпространства, которые можно осуществлять последовательно в любом

Для трехмерного евклидова пространства доказанная теорема означает, что матрица любого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в подходящем ортонормированном базисе имеет один из двух видов

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае оператор $\mathcal{A}$ представляет собой поворот на угол α вокруг третьей оси базиса, во втором — зеркальный поворот, т.е. поворот, совмещенный с отражением относительно плоскости, ортогональной оси поворота. Зеркальный поворот не может быть результатом непрерывного движения, так как он изменяет ориентацию пространства. Следовательно, *сколь угодно сложное реальное движение твёрдого тела с закрепленной точкой сводится к повороту вокруг подходящей оси на подходящий угол* (это теорема Эйлера).

Множество невырожденных линейных операторов n-мерного векторного пространства V образует группу, называемую полной линейной группой пространства V и обозначаемую $\mathsf{GL}(V)$. В случае n-мерного пространства V над $\mathbb{R}$ $\mathsf{GL}(V)$ изоморфна полной линейной группе $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ невырожденных матриц порядка n над $\mathbb{R}$.

Теорема

Ортогональные операторы в евклидовом пространстве V образуют подгруппу группы $\mathsf{GL}(n)$.

Доказательство. Из критерия ортогональности $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{E}$.

Группа ортогональных операторов на n-мерном евклидовом пространстве изоморфна ортогональной группе O_n ортогональных матриц порядка n.

Полярное разложение над $\mathbb{R}$

Определение

Самосопряженный линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V называется положительно (неотрицательно) определённым, если соответствующая ему симметрическая билинейная функция $\beta(\mathcal{A})$ положительно (неотрицательно) определена, т.е. $(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) > 0$ $((\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) \geqslant 0)$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in V$.

Лемма

Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве положительно (неотрицательно) определён тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).

Доказательство. Необходимость очевидна, достаточность вытекает из теоремы о приведении квадратичной функции к главным осям. $\square$

Лемма

Для всякого положительно (неотрицательно) определённого самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве существует единственный положительно (неотрицательно) определённый самосопряжённый оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ — квадратный корень из $\mathcal{A}$.

Доказательство. С у щ е с т в о в а н и е: надо рассмотреть ортонормированный базис $\boldsymbol{E}$ из собственных векторов (в нём матрица A оператора $\mathcal{A}$ диагональна).

Е д и н с т в е н н о с т ь: запишем матрицу B любого самосопряжённого оператора $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$, в базисе $\boldsymbol{E}$. Имеем $AB = B^3 = BA$. Значит, собственные подпространства V_λ оператора $\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{B}$ (если $\boldsymbol{x} \in V_\lambda$, т.е. $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, то $A(B\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x}$, так что $B\boldsymbol{x} \in V_\lambda$) и достаточно рассмотреть ограничения на эти подпространства. Задача свелась к единственности симметричной неотрицательно определённой матрицы, квадрат которой равен λE, где $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 0$, такая матрица нулевая. Пусть $\lambda > 0$, и пусть C — симметричная матрица, для которой $C^2 = \lambda E$. Существует ортогональная матрица O, для которой $O^T C O$ диагональна (и $O^T = O^{-1}$). Имеем $(O^{-1}CO)^2 = O^{-1}C^2O = O^{-1}\lambda E O = \lambda E$. Значит, C — скалярная матрица $\sqrt{\lambda}E$. □

Лемма

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в евклидовом пространстве и $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{B}\boldsymbol{x}, \mathcal{B}\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Тогда существует ортогональный оператор $\mathcal{O}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{B}$.

Доказательство. Имеем $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} \mathcal{B}$. Значит, $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{B} = r$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ — ортонормированный базис в $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и $\boldsymbol{v}_i$ таковы, что $\mathcal{A}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{e}_i$ для $i \leqslant r$ ($\boldsymbol{v}_i$ линейно независимы). Положим $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \mathcal{B}\boldsymbol{v}_i$. Имеем $(\tilde{\boldsymbol{e}}_i, \tilde{\boldsymbol{e}}_j) = \delta_{ij}$ для $i, j \leqslant r$. Дополним $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_r\}$ до ортонормированного базиса $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ в V, а $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r\}$ — до ортонормированного базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в V. Оператор $\mathcal{O}$, который переводит $\tilde{\boldsymbol{E}}$ в $\boldsymbol{E}$, ортогонален. Дополним $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ до базиса векторами из $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} \mathcal{B}$. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{O} \circ \mathcal{B}$ совпадают на базисе $\Longrightarrow$ они равны. $\square$

Теорема (о полярном разложении над $\mathbb{R}$)

Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве существуют полярные разложения $\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{S}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{O}$, где $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ — неотрицательно определённые самосопряжённые операторы и $\mathcal{O}$ — ортогональный оператор. Если $\mathcal{A}$ невырожден, то $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ определены однозначно.

Доказательство. Существование. Оператор $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$ положительно (неотрицательно) определён и самосопряжён $\implies$ существует положительно (неотрицательно) определённый самосопряжённый оператор $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, для которого $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$. Положим $\mathcal{S}_1 = \mathcal{B}$. Имеем $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^{**}\boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathcal{S}_1^* \circ \mathcal{S}_1\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathcal{S}_1\boldsymbol{x}, \mathcal{S}_1\boldsymbol{y})$. По лемме $\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{S}_1$ для ортогонального оператора $\mathcal{O}$. Положим $\mathcal{S}_2 = \mathcal{O} \circ \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{O}^{-1}$. Матрица S_1 оператора $\mathcal{S}_1$ диагональна и имеет неотрицательные диагональные элементы в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{E}$. Пусть O и S_2 — матрицы операторов $\mathcal{O}$ и $\mathcal{S}_2$ в том же базисе. Тогда O — матрица перехода от некоторого ортонормированного базиса к $\boldsymbol{E}$ и $S_1 = O^{-1} S_2 O$ — матрица оператора $\mathcal{S}_2$ в этом базисе. Значит, оператор $\mathcal{S}_2$ самосопряжён и неотрицательно определён, и $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{O}$.

Единственность. Пусть оператор $\mathcal{A}$ невырожден и $\mathcal{A} = \mathcal{O} \circ \mathcal{S}_1 = \mathcal{O}' \circ \mathcal{S}_1'$ — два полярных разложения. Имеем

$$\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{S}_1'^* \circ \mathcal{O}'^* \circ \mathcal{O}' \circ \mathcal{S}_1' = \mathcal{S}_1'^2.$$

По лемме о квадратном корне $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1'$. Значит, $\mathcal{O}' = \mathcal{A} \circ \mathcal{S}_1^{-1} = \mathcal{O}$.

Единственность разложения вида $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{O}$ доказывается так же. $\square$

Унитарные пространства

Определение

Векторное пространство V над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется унитарным (или эрмитовым), если на V зафиксирована некоторая положительно определенная эрмитова полуторалинейная функция, называемая (эрмитовым) скалярным произведением и обозначаемая $(\cdot, \cdot)$.

Свойства эрмитова скалярного произведения

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$;
- $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

Из этих свойств следует антилинейность по второму аргументу:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$;
- $(\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Примеры

1. В пространстве $\mathbb{C}^n$ строк длины n с комплексными элементами
$$\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) = x_1\cdot\overline{y}_1+\dots+x_n\cdot\overline{y}_n.$$
2. В пространстве квадратных матриц $M_n(\mathbb{C})$
$$(A,B)=\mathrm{tr}(A\overline{B}^T).$$
3. В пространстве непрерывных комплекснозначных функций на отрезке $[0,1]$
$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Определение

Длиной вектора $\boldsymbol{x}$ в унитарном пространстве V называется число $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$.

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ унитарного пространства $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 \leqslant (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пропорциональны.

Доказательство. Положим $\alpha = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|}$. Имеем $\alpha\cdot\overline{\alpha} = 1$ и

$(t\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}) = t^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+t\overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+t\alpha\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = t^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+2t|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$.

Дискриминант этого квадратного трёхчлена относительно t равен $4|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 - 4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$. Он должен быть неположительным и может обращаться в ноль только когда $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пропорциональны. $\square$

Следствие (неравенство треугольника)

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются ортогональными (запись $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$), если они ортогональны относительно $(\cdot\,,\cdot)$, т.е. если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$. Ортогональное дополнение $U^{\perp}$ подпространства U унитарного пространства V определяется как в евклидовом случае:

$$U^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V : (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{u} \in U\}.$$

Теорема Пифагора

Если $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, *то* $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2$.

Система векторов ортогональна, когда все векторы в ней попарно ортогональны.

Предложение

Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Определение

Система векторов $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ в унитарном пространстве называется ортонормированной, если она ортогональна и каждый вектор $\boldsymbol{v}_i$ базиса имеет

Предложение

Базис $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ *унитарного пространства ортонормирован тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

1. *для любых* $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\dots+x_n\mathbf{e}_n$ *и* $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\dots+y_n\mathbf{e}_n$ $(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1\overline{y}_1+\dots+x_n\overline{y}_n$;
2. *координаты любого вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ *вычисляются по формуле* $x_i=(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)$ *для* $i\leqslant n$, *т.е.* $\mathbf{x}=(\mathbf{x},\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+\dots+(\mathbf{x},\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Если $\boldsymbol{E}=\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ — любой базис пространства V, то из него строится ортонормированный базис точно так же, как в вещественном случае: для $i\leqslant n$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1=\mathbf{e}_1,\qquad \tilde{\mathbf{e}}_i=\mathbf{e}_i-\frac{(\mathbf{e}_i,\tilde{\mathbf{e}}_1)}{(\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_1)}\tilde{\mathbf{e}}_1-\dots-\frac{(\mathbf{e}_i,\tilde{\mathbf{e}}_{i-1})}{(\tilde{\mathbf{e}}_{i-1},\tilde{\mathbf{e}}_{i-1})}\tilde{\mathbf{e}}_{i-1},\qquad \hat{\mathbf{e}}_i=\frac{\tilde{\mathbf{e}}_i}{|\tilde{\mathbf{e}}_i|}$$

или

$$\hat{\mathbf{e}}_1=\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|},\qquad \hat{\mathbf{e}}_i=\frac{\mathbf{e}_i-(\mathbf{e}_i,\hat{\mathbf{e}}_1)\hat{\mathbf{e}}_1-\dots-(\mathbf{e}_i,\hat{\mathbf{e}}_{i-1})\hat{\mathbf{e}}_{i-1}}{|\mathbf{e}_i-(\mathbf{e}_i,\hat{\mathbf{e}}_1)\hat{\mathbf{e}}_1-\dots-(\mathbf{e}_i,\hat{\mathbf{e}}_{i-1})\hat{\mathbf{e}}_{i-1}|}.$$

Теорема

Во всяком конечномерном унитарном пространстве имеется ортонормированный базис. Более того, ортонормированный базис любого его подпространства можно дополнить до ортонормированного базиса всего пространства.

Упражнения

1. Докажите, что во всяком счётномерном унитарном пространстве существует ортонормированный базис.
2. Верно ли, что любую ортонормированную систему векторов в таком пространстве можно дополнить до ортонормированного базиса?
3. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $\boldsymbol{E}$ — произвольный базис в нём. Покажите, что на V существует единственное скалярное произведение, относительно которого базис $\boldsymbol{E}$ является ортонормированным. (Скажем, что это скалярное произведение порождено базисом $\boldsymbol{E}$.)

Ортогональное проектирование в унитарном пространстве

Определение и свойства ортогонального дополнения в конечномерном унитарном пространстве V совершенно аналогичны евклидову случаю. В частности, для любого подпространства U пространства V имеем $V = U \oplus U^{\perp}$. Ортогональная проекция $\mathrm{pr}_U \boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство и его ортогональная составляющая $\mathrm{ort}_U \boldsymbol{x}$ тоже определяются точно так же.

Расстояние в унитарном пространстве

Определение

Расстояние $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в унитарном пространстве V определяется формулой

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

Функция $\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$ — метрика (она рефлексивна, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника).

Определение

Расстояние $\rho(\boldsymbol{x}, U)$ между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством U в унитарном пространстве V определяется формулой

$$\rho(\boldsymbol{x}, U) = \inf_{\boldsymbol{u} \in U} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Теорема

Расстояние от вектора $\boldsymbol{x}$ конечномерного унитарного пространства V до подпространства U равно $|\operatorname{ort}_U \boldsymbol{x}|$, причём единственным ближайшим к $\boldsymbol{x}$ вектором подпространства U является $\operatorname{pr}_U \boldsymbol{x}$.

Унитарные матрицы

Пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ — два ортонормированных базиса в n-мерном унитарном пространстве и $T = (t_{ij})$ — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$, т.е. $\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j \leqslant n} t_{i,j} \boldsymbol{e}_j$. Вычисляя скалярное произведение $\boldsymbol{e}'_i$ и $\boldsymbol{e}'_j$ в базисах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$, получаем

$$(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} \overline{t}_{kj} \qquad \text{и} \qquad (\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = \delta_{ij}.$$

Значит,

- столбцы T образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^n$ n-ок комплексных чисел и
- $T^T \overline{T} = E$, так что $T^{-1} = \overline{T}^T$ и строки тоже образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$;
- $|\det T| = \sqrt{\det T \cdot \overline{\det T}} = 1$.

Определение

Матрица U, удовлетворяющая условию $U^T \overline{U} = E$, называется унитарной.

Свойства унитарных матриц

- Матрица унитарна $\iff$ это матрица перехода между ортонормированными базисами.
- Если даны два базиса в унитарном пространстве, один из них ортонормирован и матрица перехода унитарна, то и другой базис ортонормирован.
- A унитарна $\implies$ A^{-1} унитарна.
- A и B унитарны $\implies$ AB унитарна.
- Множество U_n всех унитарных матриц порядка n образует подгруппу в полной линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ всех невырожденных квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{C}$. Это унитарная группа U_n.

Изоморфизм унитарных пространств

Определение

Унитарные пространства V и U называются изоморфными, если существует отображение $\Phi\colon V \to U$, которое является изоморфизмом векторных пространств и удовлетворяет условию

$$(\Phi(\boldsymbol{x}), \Phi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Само отображение Φ называется при этом изоморфизмом унитарных пространств V и U.

Замечание

Линейный оператор между конечномерными унитарными пространствами — изоморфизм $\iff$ его матрица унитарна.

Теорема

Любые два n-мерных унитарных пространства изоморфны.

Доказательство. Возьмём ортонормированные базисы $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ и $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ в n-мерных унитарных пространствах U и V, положим $\Phi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{u}_i$ и продолжим по линейности. $\square$

Линейные функции на унитарном пространстве

Для каждого линейного функционала $f: V \to \mathbb{C}$ на унитарном пространстве V найдётся единственный вектор $\boldsymbol{v}_f \in V$ такой, что $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$. Однако соответствие $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v}_f$ не линейно, а антилинейно. Тем не менее все общие понятия — сопряжённого пространства, взаимного базиса и пр. — определены и для унитарного пространства, и любое конечномерное унитарное пространство изоморфно своему сопряжённому V^* относительно скалярного произведения на V^*, порожденного любым базисом пространства V^*, взаимным с любым ортонормированным базисом пространства V.

Линейные операторы в унитарных пространствах

Через V всюду ниже обозначаем n-мерное унитарное пространство.

Операторы $V \to V$ имеют ту отличительную особенность, что их характеристические многочлены всегда имеют n корней $\implies$ у любого такого оператора имеются собственные векторы и жорданов базис. В остальном теория таких операторов аналогична теории операторов в евклидовом пространстве.

Каждому линейному оператору $\mathcal{A} \colon V \to V$ соответствует полуторалинейная функция $b_{\mathcal{A}} \colon V \times V \to \mathbb{C}$, определённая правилом $b_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Обозначим соответствие $\mathcal{A} \mapsto b_{\mathcal{A}}$ через α.

Теорема

1. *Матрица любого линейного оператора $\mathcal{A} \colon V \to V$ в любом ортонормированном базисе совпадает с транспонированной матрицей полуторалинейной функции $\alpha(\mathcal{A})$ в том же базисе.*
2. *Отображение α из пространства $\mathscr{L}(V)$ линейных операторов в V в пространство $\mathscr{B}(V)$ полуторалинейных функций на V — изоморфизм.*

Сопряжённые операторы в унитарном пространстве

Определение

Оператор $\mathcal{A}^*: V \to V$ в унитарном пространстве V называется сопряжённым к линейному оператору $\mathcal{A}: V \to V$, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*\boldsymbol{y}).$$

Теорема

Для каждого линейного оператора $\mathcal{A}: V \to V$ с матрицей A в некотором (любом) ортонормированном базисе сопряжённый оператор $\mathcal{A}^*$ существует и единствен, его матрица в том же базисе есть эрмитово сопряжённая к A матрица $\overline{A}^T$.

Свойства операции сопряжения

- $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$,
- $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,
- $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,
- $(\lambda\mathcal{A})^* = \overline{\lambda}\mathcal{A}^*$,
- $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$.

Самосопряжённые операторы в унитарном пространстве

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в унитарном пространстве называется самосопряженным (или эрмитовым), если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, т.е. для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}).$$

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве V самосопряжён $\iff$ его матрица в некотором ортонормированном базисе эрмитова $\iff$ его матрица в произвольном ортонормированном базисе эрмитова.

Доказательство. Из общей теоремы о матрицах сопряжённых операторов. $\square$

Предложение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — самосопряжённый линейный оператор в конечномерном унитарном пространстве V и U — подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ тоже инвариантно

Замечания

1. Все собственные значения любого самосопряжённого оператора в унитарном пространстве вещественны.
2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряжённого оператора в унитарном пространстве, ортогональны.

Теорема

Для любого самосопряжённого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном унитарном пространстве V найдётся ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна и вещественна.

Следствие

Для оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном унитарном пространстве следующие условия равносильны:

1. *оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён;*
2. *существует ортонормированный базис, в котором матрица $\mathcal{A}$ диагональна и вещественна;*
3. *если A — матрица $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе, то существуют унитарная матрица T и вещественная диагональная матрица D, для которых $A = T^{-1}DT$.*

Упражнение

Докажите, что оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве удовлетворяет условию $\overline{\mathcal{A}}^* = -\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица имеет диагональный вид с чисто мнимыми диагональными элементами.

Теорема

1. *Сумма самосопряжённых линейных операторов в унитарном пространстве и произведение самосопряжённого оператора на вещественное число являются самосопряжёнными операторами.*
2. *Композиция двух самосопряжённых операторов в унитарном пространстве является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.*

Приведение квадратичной функции к главным осям над $\mathbb{C}$

Напомним, что между линейными операторами $\mathcal{A}\colon V \to V$ и полуторалинейными функциями $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ на конечномерном унитарном пространстве имеется изоморфизм α, определённый правилом $\alpha(\mathcal{A})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, причём матрица $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе совпадает с транспонированной матрицей $\alpha(\mathcal{A})$ в том же базисе. Ясно, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён тогда и только тогда, когда полуторалинейная функция $\alpha(\mathcal{A})$ эрмитова.

Теорема

Пусть V — n-мерное унитарное пространство и $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ — эрмитова полуторалинейная функция. Тогда в V существует ортонормированный базис $\boldsymbol{E}$, в котором квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{C}$, соответствующая b, записывается в виде суммы квадратов с вещественными коэффициентами:

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и x_i — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — это собственные значения самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$,

Унитарные операторы

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в унитарном пространстве V называется *унитарным*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad \text{для любых } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

Замечание

$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \iff \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{E} \iff \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$.

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ в конечномерном унитарном пространстве V является унитарным $\iff$ его матрица в некотором ортонормированном базисе унитарна $\iff$ его матрица в произвольном ортонормированном базисе унитарна.

Следствие

Линейный оператор в конечномерном унитарном пространстве унитарен $\iff$ он переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис $\iff$ он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Теорема

Линейный оператор в унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.

Следствие

Все собственные значения унитарного линейного оператора по модулю равны 1.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ *— унитарный линейный оператор в унитарном пространстве* V *и* U *— подпространство, инвариантное относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ортогональное дополнение* $U^{\perp}$ *тоже инвариантно относительно* $\mathcal{A}$.

Теорема

Линейный оператор в конечномерном унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица диагональна, причём все её диагональные элементы по модулю равны 1.

Таким образом, для унитарного оператора, в отличие от ортогонального, всегда существует базис, состоящий из собственных векторов.

Комплексификация евклидова пространства

Комплексификация $V_{\mathbb{C}}$ евклидова пространства V (или, более общо, векторного пространства над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением) каноническим образом превращается в унитарное пространство, если определить эрмитово скалярное умножение по формуле

$$(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = [(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})] + i[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})].$$

При этом комплексное продолжение $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ самосопряжённого (ортогонального) оператора $\mathcal{A}$ будет самосопряжённым (соответственно, унитарным) оператором на $V_{\mathbb{C}}$.

Полярное разложение над $\mathbb{C}$

Определение

Самосопряжённый линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве V называется положительно (неотрицательно) определённым, если соответствующая ему эрмитова полуторалинейная функция $\alpha(\mathcal{A})$ положительно (неотрицательно) определена, т.е. $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) > 0$ ($(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) \geqslant 0$) для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in V$.

Лемма

Самосопряжённый оператор в конечномерном унитарном пространстве положительно (неотрицательно) определён тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).

Лемма

Для всякого положительно (неотрицательно) определённого самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном унитарном пространстве существует единственный положительно (неотрицательно) определённый самосопряжённый оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ — квадратный корень из $\mathcal{A}$.

Лемма

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в конечномерном унитарном пространстве и $(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y}) = (\mathcal{B}\mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда существует унитарный оператор $\mathcal{U}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{U} \circ \mathcal{B}$.

Теорема (о полярном разложении над $\mathbb{C}$)

Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном унитарном пространстве существуют полярные разложения $\mathcal{A} = \mathcal{U} \circ \mathcal{S}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{U}$, где $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ — неотрицательно определённые самосопряжённые операторы и $\mathcal{U}$ — ортогональный оператор. Если $\mathcal{A}$ невырожден, то $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ определены однозначно.