Линейная алгебра и геометрия

Лекция 10. Квадратичные функции. Полуторалинейные функции. Евклидовы пространства.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Квадратичные формы

Всюду ниже V — n-мерное векторное пространство над произвольным полем K.

Определение

Пусть $b\colon V \times V \to K$ — симметричная билинейная функция. Функция $q\colon V \to K$, определённая правилом

$$q(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \qquad \text{для каждого } \boldsymbol{x} \in V,$$

называется квадратичной формой (или квадратичной функцией), ассоциированной с b.

Если $B = (b_{ij})$ — матрица симметричной билинейной функции b в некотором базисе, то

$$q(\boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_n)\, B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в том же базисе. В координатах:

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j.$$

Определение

Матрицей квадратичной формы q, ассоциированной с симметричной билинейной функцией b, в данном базисе называется матрица b в этом базисе. Ранг этой матрицы называется **рангом квадратичной формы** q.

Поляризация

Если характеристика поля K не равна 2, то по данной квадратичной форме q можно однозначно восстановить симметричную билинейную функцию b, с которой она ассоциирована:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})).$$

Процедура восстановления b по q называется **процедурой поляризации**. Таким образом, если характеристика поля K не равна 2, то имеется взаимно однозначное соответствие между симметричными билинейными функциями и квадратичными формами.

Согласно теореме Лагранжа для любой квадратичной формы $q\colon V \to K$ существует базис, в котором она записывается в виде суммы квадратов с коэффициентами:

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Такое выражение называется каноническим (или диагональным) видом квадратичной формы q.

Здесь и всюду дальше обозначения вида $x_1, \ldots, x_n$, $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, $y_1, \ldots, y_n$ используются для координат вектора, к которому применяется рассматриваемая квадратичная форма, в рассматриваемом базисе (из контекста всегда ясно, каком). Иногда мы пишем $q(x_1, \ldots, x_n)$ вместо $q(\boldsymbol{x})$, подразумевая, что каждый вектор может быть отождествлён с набором его координат.

Существует несколько алгоритмов приведения квадратичной формы к каноническому виду. Мы рассмотрим два.

Метод Лагранжа: выделение полных квадратов

Пусть характеристика поля $\neq 2$ и в некотором базисе

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j.$$

Возможны два случая:

1. $b_{ii} \neq 0$ *хотя бы для одного* $i \leqslant n$

Пусть $b_{11} \neq 0$. Собираем вместе все слагаемые с x_1 и выносим b_{11} за скобки:

$$q(\boldsymbol{x}) = b_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{b_{12}}{b_{11}}x_1x_2 + \cdots + 2\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_1x_n\right) + \ldots.$$

Выделяем полный квадрат:

$$q(\boldsymbol{x}) = b_{11}\left(x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n\right)^2 - \frac{b_{12}^2}{b_{11}^2}x_2^2 - \cdots - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}^2}x_n^2 + \ldots.$$

Делаем замену переменных:

$$y_1 = x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n, \quad y_2 = x_2, \ \ldots, \ y_n = x_n.$$

Получаем $q(\boldsymbol{x}) = b_{11}y_1^2 + \tilde{q}(y_2, \ldots, y_n)$. Дальше по рекурсии.

2. $b_{11} = b_{22} = \cdots = b_{nn} = 0$. Ищем $i < j$, для которых $b_{ij} \neq 0$. Пусть $b_{12} \neq 0$. Делаем подстановку:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3, \ldots, x_n = y_n.$$

В выражении $q(y_1, \ldots, y_n)$ той же квадратичной формы в новых координатах коэффициент при y_1^2 равен $2b_{12} \neq 0$. Применяем алгоритм 1.

Метод Якоби: ортогонализация

Теорема (формула Якоби)

Пусть $b\colon V \times V \to K$ *— симметричная билинейная функция на* n*-мерном векторном пространстве над любым полем* K, B *— её матрица в некотором базисе* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *и* $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *— угловые миноры матрицы* B. *Положим* $\Delta_0 = 1$.

Если все Δ_i, $i \leqslant n$, *отличны от нуля, то существует базис* $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ *векторного пространства* V, *в котором квадратичная функция* q, *ассоциированная с* b, *имеет вид*

$$q(y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \cdots + y_n\tilde{\boldsymbol{e}}_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2,$$

причём матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ *к* $\tilde{\boldsymbol{E}}$ *верхне-унитреугольна (верхнетреугольна и все диагональные элементы равны* 1*).*

Доказательство. Индукция по n. Пусть $n > 1$, для меньших n доказано.

Положим $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}\rangle$. По индуктивному предположению для билинейной функции $b|_{U\times U}$ в U есть базис $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}\}$ с нужными свойствами. Для $i, j < n$ имеем $b(\tilde{\boldsymbol{e}}_i, \tilde{\boldsymbol{e}}_j) = 0$, если $i \neq j$, и $b(\tilde{\boldsymbol{e}}_i, \tilde{\boldsymbol{e}}_i) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$.

Положим
$$\tilde{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{e}_n - \frac{b(\boldsymbol{e}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \cdots - \frac{b(\boldsymbol{e}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}.$$

Покажем, что базис $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ обладает нужными свойствами.

Матрица C перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$ верхне-унитреугольна.

Для $k < n$ имеем

$$\begin{aligned} b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) &= b\Big(\tilde{\boldsymbol{e}}_n - \frac{b(\boldsymbol{e}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \cdots - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1},\ \tilde{\boldsymbol{e}}_k\Big) = \\ &= b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)} b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{e}_k) - \cdots - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})} b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = \\ &= b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_k, \tilde{\boldsymbol{e}}_k)} b(\tilde{\boldsymbol{e}}_k, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = 0. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ матрица $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ функции b в базисе $\tilde{\boldsymbol{E}}$ диагональна, диагональные элементы суть $\tilde{b}_{ii} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ для $i < n$ и $\tilde{b}_{nn} = b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_n)$. Имеем $\det \tilde{B} = \det C^T \cdot \det B \cdot \det C = \det B = \Delta_n$. Значит, $\tilde{b}_{nn} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$. к Граму–Шмидту

□

Предложение

Для любой квадратичной формы q на n-мерном векторном пространстве над полем комплексных чисел существует базис, в котором

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$$

для некоторого $r \leqslant n$. При этом число r является инвариантом квадратичной функции q; более того, оно совпадает с рангом q.

Определение

Выражение $q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$ для квадратичной формы q над полем комплексных чисел называется её нормальным видом.

Предложение

Для любой квадратичной формы q на n-мерном векторном пространстве над полем вещественных чисел существует базис, в котором

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$$

для некоторых k и l, удовлетворяющих условию $r = k + l \leqslant n$. При этом число r является инвариантом квадратичной функции q; более того, оно совпадает с рангом q.

Определение

Выражение $q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$ для квадратичной формы q над полем вещественных чисел называется её нормальным видом. Числа k и l называются, соответственно, её положительным и отрицательным индексами инерции.

Теорема (закон инерции)

Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами квадратичной функции (т.е. не зависят от выбора базиса).

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ — два базиса векторного пространства V над $\mathbb{R}$, в которых

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = \tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_s^2 - \tilde{x}_{s+1}^2 - \cdots - \tilde{x}_{s+t}^2. \qquad (\star)$$

Предположим, что $k > s$. Положим $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}\rangle$ и $W = \langle\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{s+1}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}\rangle$. Формула Грассмана $\implies$ $\dim(U \cap W) = k + n - s - \dim(U + W) \geqslant k - s > 0$. Пусть $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u} \in U \cap W$. Имеем

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k = \mu_{s+1} \tilde{\boldsymbol{e}}_{s+1} + \cdots + \mu_n \tilde{\boldsymbol{e}}_n.$$

Подставляем в $(\star)$: $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2 = -\mu_{s+1}^2 - \cdots - \mu_n^2$. $\square$

▸ к эрмитовым формам

Теорема (теорема Якоби)

Если все угловые миноры Δ_i *матрицы* Q *квадратичной формы* $q\colon V \to \mathbb{R}$ *в некотором базисе* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *пространства* V *не равны нулю, то отрицательный индекс инерции формы* q *равен числу тех* $i \leqslant n$, *для которых* $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.

Доказательство. Прямое следствие метода Якоби и закона инерции. $\square$

Упражнение

Докажите, что теорема Якоби остаётся верной, если среди миноров Δ_i есть нулевые, но все миноры, соседние с нулевыми, ненулевые.

Положительно определённые билинейные функции

Определение

Квадратичная форма $q\colon V \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной, если $q(\boldsymbol{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in V$. Симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная форма положительно определена.

Квадратичная форма $q\colon V \to \mathbb{R}$ называется отрицательно определенной, если $q(\boldsymbol{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in V$. Симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется отрицательно определенной, если соответствующая ей квадратичная форма отрицательно определена.

Аналогично определяются неотрицательно и неположительно определённые квадратичные формы и симметричные билинейные функции.

Замечание

Нормальный вид положительно определённой квадратичной формы в n-мерном пространстве есть $x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Теорема (критерий Сильвестра)

Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — любой базис в нём. Симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ положительно определена $\iff$ все угловые миноры Δ_i её матрицы B в базисе $\boldsymbol{E}$ положительны.

Доказательство

$\Longrightarrow$: Индукция по n. Пусть $n > 1$, для меньших верно. Положим $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}\rangle$. Ограничение b на U положительно определено + индуктивное предположение $\Longrightarrow$ $\Delta_i > 0$ для $i < n$. Пусть $\tilde{\boldsymbol{E}}$ — базис, в котором матрица $\tilde{B}$ диагональна, и пусть C — матрица перехода от $\tilde{\boldsymbol{E}}$ к $\boldsymbol{E}$. Положительная определённость + формула изменения матрицы $\Longrightarrow$

$$\Delta_n = \det B = \det C^T \cdot \det \tilde{B} \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot \det \tilde{B} > 0.$$

$\Longleftarrow$: по формуле Якоби. □

Упражнения

1. Докажите, что симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ отрицательно определена $\iff$ знаки угловых миноров Δ_i её матрицы B в произвольном базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ строго чередуются, причём $\Delta_1 < 0$.
2. Докажите, что симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ неотрицательно определена $\iff$ все главные миноры её матрицы B в произвольном базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ неотрицательны.

Полуторалинейные функции

Всюду в этом разделе V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$.

На векторных пространствах над $\mathbb{C}$ не бывает положительно определённых билинейных функций: $b(i\mathbf{x}, i\mathbf{x}) = -b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Определение

Функция $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если

1. b линейна по первому (или второму) аргументу, т.е.

$$b(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \text{и} \quad b(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$;

2. b антилинейна по второму (или первому) аргументу, т.е.

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad \text{и} \quad b(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \overline{\lambda} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ (черта — комплексное сопряжение).

Пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в V. Полуторалинейная функция, как и билинейная, полностью определяется своими значениями $b_{ij} = b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ на парах базисных векторов: если x_i , y_i — координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в $\boldsymbol{E}$, то

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i \overline{y}_j = (x_1, \dots, x_n)\, B \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \vdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix},$$

где

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \dots & b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \dots & b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \dots & b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

— матрица полуторалинейной функции b.

В другом базисе $\boldsymbol{E}'$ та же функция b имеет матрицу

$$\boxed{B' = C^T B \overline{C}},$$

где $C = (c_{ij})$ — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$ и $\overline{C} = (\overline{c}_{ij})$.

Эрмитовы полуторалинейные функции

Определение

Полуторалинейная функция b называется эрмитовой, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$
$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}\,.$$
Полуторалинейная функция b называется косоэрмитовой, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$
$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\overline{b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}\,.$$
Квадратная матрица $B \in M_n(\mathbb{C})$ называется эрмитовой (косоэрмитовой), если $B^T = \overline{B}$, т.е. $b_{ij} = \overline{b}_{ji}$ (если $B^T = -\overline{B}$, т.е. $b_{ij} = -\overline{b}_{ji}$).

Полуторалинейная функция (косо)эрмитова $\iff$ её матрица в некотором (любом) базисе (косо)эрмитова.

Если B — эрмитова матрица, то

- Все диагональные элементы B вещественные
- Определитель $\det B$ вещественный: $\overline{\det B} = \det \overline{B} = \det B^T = \det B$.

Если B — косоэрмитова матрица, то все диагональные элементы B чисто мнимые.

Всякая полуторалинейная функция есть сумма эрмитовой и косоэрмитовой:

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \overline{b(\mathbf{y},\mathbf{x})}\right) + \frac{1}{2}\left(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \overline{b(\mathbf{y},\mathbf{x})}\right).$$

Каждой эрмитовой полуторалинейной функции b соответствует эрмитова квадратичная форма

$$q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Замечание

Всякая эрмитова квадратичная функция принимает только вещественные значения.

Предложение

Всякая эрмитова полуторалинейная функция b однозначно определяется своей эрмитовой квадратичной функцией q.

$$q(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) = q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) \pm b(\mathbf{x},\mathbf{y}) \pm b(\mathbf{y},\mathbf{x})$$
$$q(\mathbf{x} \pm i\mathbf{y}) = q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) \mp ib(\mathbf{x},\mathbf{y}) \pm ib(\mathbf{y},\mathbf{x})$$
$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\Big(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + iq(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - iq(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\Big)$$

Теорема

В n-мерном векторном пространстве V над $\mathbb{C}$ для всякой эрмитовой полуторалинейной функции b существует базис $\boldsymbol{E}$, в котором функция b и соответствующая ей эрмитова квадратичная функция q имеют нормальный вид

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1\overline{y}_1+\ldots+x_k\overline{y}_k-x_{k+1}\overline{y}_{k+1}-\ldots-x_{k+\ell}\overline{y}_{k+\ell},\quad q(\boldsymbol{x})=|x_1|^2+\ldots+|x_k|^2-|x_{k+1}|^2-\ldots-|x_{k+\ell}|^2$$

(здесь x_i и y_i — координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в $\boldsymbol{E}$).

(Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы Лагранжа.)

Числа k и ℓ — положительный и отрицательный индексы инерции формы q.

Теорема (закон инерции)

Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами эрмитовой квадратичной формы (т.е. не зависят от выбора базиса).

(Доказательство дословно повторяет доказательство в вещественном случае.)

Определение

Эрмитова квадратичная форма q (и соответствующая эрмитова полуторалинейная функция) положительно определена, если $q(\boldsymbol{x}) > 0$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Эрмитова квадратичная форма положительно определена $\iff$ $k = n$ и $\ell = 0$.

Теорема (формула Якоби)

Пусть $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ — эрмитова полуторалинейная функция на n-мерном пространстве V над $\mathbb{C}$, B — её матрица в некотором базисе $\boldsymbol{E}$ и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — угловые миноры B. Положим $\Delta_0 = 1$.

Если все Δ_i, $i \leqslant n$, отличны от нуля, то существует базис $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ пространства V, в котором квадратичная функция q, ассоциированная с b, имеет вид

$$q(y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \cdots + y_n\tilde{\boldsymbol{e}}_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2,$$

причём матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$ верхне-унитреугольна.

Доказательство дословно повторяет доказательство в случае билинейной функции.

Теорема (критерий Сильвестра)

Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $\boldsymbol{E}$ — любой базис в нём. Эрмитова полуторалинейная функция на V положительно определена $\iff$ все угловые миноры её матрицы в базисе $\boldsymbol{E}$ положительны.

Доказательство дословно повторяет доказательство в вещественном случае.

Евклидовы пространства

Определение

Скалярным произведением на векторном пространстве над $\mathbb{R}$ называется фиксированная на этом пространстве положительно определенная симметричная билинейная функция. Скалярное произведение обозначается $(\cdot\,,\cdot)$.

Евклидовым (векторным) пространством называется конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с фиксированным скалярным произведением.

Примеры (скалярного произведения)

- $|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \widehat{\vec{x}, \vec{y}}$ в обычном пространстве.
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$.
- $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t) g(t)\, dt$ в $C([0,1])$.

Всюду ниже V — n-мерное евклидово пространство.

Определение

Длиной вектора $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве V называется число
$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$
Угол $\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}$ между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — это число $\alpha \in [0, \pi]$ такое, что
$$\cos \alpha = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}.$$

Угол определён для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ в силу следующего утверждения:

Неравенство Коши–Буняковского

Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$
причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пропорциональны.

Доказательство. Если $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, имеем $(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}) \geqslant \boldsymbol{0}$ для всех $t \in \mathbb{R}$, т.е.
$t^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - 2t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0 \implies$ дискриминант неположительный.
Дискриминант равен 0 $\iff$ $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. □

Неравенство треугольника

Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *евклидова пространства*

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Доказательство. Имеем $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$.
Неравенство Коши–Буняковского $\Longrightarrow$ $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 \leqslant (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2$. $\square$

Определение

Для векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ евклидова пространства матрица

$$G(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \ldots & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_k) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \ldots & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_2) & \ldots & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) \end{pmatrix}$$

называется матрицей Грама.

Теорема

Для произвольных векторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ *евклидова пространства* V

$$\det G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) \geqslant 0,$$

причём $\det G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = 0 \iff$ *векторы* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Векторы $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ линейно зависимы $\iff$ $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, причём не все λ_i равны нулю, откуда для каждого $\boldsymbol{v}_i$

$$0 = (\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i) = \lambda_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_i) + \dots + \lambda_k(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i) = \lambda_1 g_{1i} + \dots + \lambda_k g_{ki},$$

где g_{ji} — элементы матрицы Грама, т.е. строки матрицы Грама линейно зависимы.

Пусть система $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ линейно независима (тогда $k \leqslant n = \dim V$). Дополним её до базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. $\det G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$ — это угловой минор Δ_k матрицы положительно определённой симметричной билинейной функции $(\cdot, \cdot)$. Критерий Сильвестра $\Longrightarrow$ $\Delta_k > 0$. □

Предложение

Пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *— произвольный базис евклидова пространства* V, $G = (g_{ij}) = G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ *и* $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{e}_i$ *— любые векторы в* V. *Тогда*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g_{ij} = (x_1, \ldots, x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются ортогональными (запись $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$), если они ортогональны относительно $(\cdot\,,\cdot)$, т.е. если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Имеем $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \iff$ либо $|\boldsymbol{x}| = 0$ (т.е. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$), либо $|\boldsymbol{y}| = 0$ (т.е. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$), либо $\cos \widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}} = 0$.

Теорема Пифагора

Если $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, *то* $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2$.

Система векторов ортогональна, когда все векторы в ней попарно ортогональны.

Предложение

Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Определение

Система векторов $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ в евклидовом пространстве называется ортонормированной, если она ортогональна и каждый вектор $\boldsymbol{v}_i$ базиса имеет единичную длину, т.е. $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$ для $i, j \leqslant k$.

Предложение

Базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ евклидова пространства ортонормирован тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:

1. $G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = E$;
2. *для любых* $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ *и* $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$ *(или для любых* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *и* $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$*)*
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \qquad (\text{или} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y});$$
3. *координаты любого вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *вычисляются по формуле* $x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$ *для* $i \leqslant n$, *т.е.*
$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Если $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — любой базис пространства V, то, применив к нему алгоритм Якоби, мы получим ортогональный базис $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_i - \frac{(\boldsymbol{e}_i, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}{(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{e}_i, \tilde{\boldsymbol{e}}_{i-1})}{(\tilde{\boldsymbol{e}}_{i-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{i-1})}\tilde{\boldsymbol{e}}_{i-1}.$$

При этом матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$ верхне-унитреугольная. Положив $\hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\tilde{\boldsymbol{e}}_i}{|\tilde{\boldsymbol{e}}_i|}$ для $i \leqslant n$, мы получим ортонормированный базис $\hat{\boldsymbol{E}} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$. Матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\hat{\boldsymbol{E}}$ верхнетреугольная, на диагонали стоя́т $\frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{e}}_i|} = \sqrt{\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}}$.

Можно нормировать базисные векторы сразу:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{e}_1|}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i - (\boldsymbol{e}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \cdots - (\boldsymbol{e}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_{i-1})\hat{\boldsymbol{e}}_{i-1}}{|\boldsymbol{e}_i - (\boldsymbol{e}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \cdots - (\boldsymbol{e}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_{i-1})\hat{\boldsymbol{e}}_{i-1}|}.$$

Теорема

Во всяком евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Более того, ортонормированный базис любого подпространства евклидова пространства можно дополнить до ортонормированного базиса всего пространства.

Упражнения

1. Докажите, что во всяком счётномерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением существует ортонормированный базис.
2. Верно ли, что любую ортонормированную систему векторов в таком пространстве можно дополнить до ортонормированного базиса?
3. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{E}$ — произвольный базис в нём. Покажите, что на V существует единственное скалярное произведение, относительно которого базис $\boldsymbol{E}$ является ортонормированным.

Линейные функции на евклидовом пространстве

Скалярное произведение невырождено $\Longrightarrow$ его корреляции $(\cdot\,,\cdot)_{\text{лев}} = (\cdot\,,\cdot)_{\text{пр}}$ — изоморфизмы. Скалярное произведение симметрично $\Longrightarrow$ они совпадают. Будем обозначать их $\mathscr{C}$.

Для каждого линейного функционала $f : V \to \mathbb{R}$ *на евклидовом пространстве* V *найдётся вектор* $\boldsymbol{v}_f \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$*.*

Соответствие $\mathscr{C} : \boldsymbol{v} \mapsto f_{\boldsymbol{v}}$ — изоморфизм $V \to V^*$, и если $\boldsymbol{E}$ — любой ортонормированный базис в V и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — взаимный с ним базис в V^*, то относительно базисов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ этот изоморфизм имеет матрицу E.