Линейная алгебра и геометрия

Лекция 9. Билинейные функции

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Билинейные функции

Пусть V — векторное пространство над полем K.

Определение

Билинейной функцией на V называется функция $b\colon V \times V \to K$, линейная по каждому аргументу.

Линейность по каждому аргументу означает, что для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ и любого $\lambda \in K$

$$
\begin{aligned}
b(x + y, z) = b(x, z) + b(y, z), &\qquad b(x, y + z) = b(x, y) + b(x, z), \\
b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y), &\qquad b(x, \lambda y) = \lambda b(x, y).
\end{aligned}
$$

Билинейные функции складываются и умножаются на числа поточечно. Относительно этих операций все билинейные функции на V образуют векторное пространство над полем K. Будем обозначать его $\mathscr{B}(V)$.

Примеры

- Скалярное произведение в обычном пространстве.
- Для любых $f, g \in V^*$ $\ b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{y})$ — билинейная функция на V.
- Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ $\ b(f, g) = f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{y})$ — билинейная функция на V^*.
- $\operatorname{tr} AB$ для $A, B \in M_n(K)$.
- В пространстве непрерывных функций на $[0, 1]$

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx, \qquad \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) \cdot f(x) \cdot g(y)\, dx dy,$$

где φ — фиксированная непрерывная функция на $[0, 1]$.

Корреляции и ядра

Задание билинейной функции $b\colon V \times V \to K$ равносильно заданию линейного отображения

$$b_{\text{лев}}\colon V \to V^*, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}).$$

Это отображение называется левой корреляцией билинейной функции b. Аналогично определяется правая корреляция

$$b_{\text{пр}}\colon V \to V^*, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}).$$

Отображения $b \mapsto b_{\text{лев}}$ и $b \mapsto b_{\text{пр}}$ — изоморфизмы между пространством $\mathscr{B}(V)$ и пространством $\mathscr{L}(V, V^*)$ линейных отображений $V \to V^*$. ▸ к матрицам

▸ к тензорам

Ядра левой и правой корреляций называются, соответственно, левым и правым ядрами билинейной функции:

$$\operatorname{Ker}_{\text{лев}} b = \{\boldsymbol{v} \in V : b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in V\}, \quad \operatorname{Ker}_{\text{пр}} b = \{\boldsymbol{v} \in V : b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in V\}.$$

Упражнение

Приведите пример векторного пространства V и билинейной функции $b \in \mathscr{B}(V)$, для которой одно из ядер тривиально, а другое нет.

Вектор $\boldsymbol{u} \in V$ ортогонален слева вектору $\boldsymbol{v}$, а вектор $\boldsymbol{v}$ ортогонален справа вектору $\boldsymbol{u}$, если $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Левое ортогональное дополнение ${}^{\perp}U$ подпространства $U \subset V$ — это множество векторов, ортогональных слева каждому вектору $\boldsymbol{u} \in U$:

$$ {}^{\perp}U = \{\boldsymbol{x} \in V : b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0 \ \forall \boldsymbol{u} \in U\}. $$

Аналогичным образом определяется правое ортогональное дополнение $U^{\perp}$:

$$ U^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V : b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{u} \in U\}. $$

Левое ортогональное дополнение ${}^{\perp}U$ — не что иное как аннулятор $\operatorname{Ann} U$ относительно свёртки $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, а правое ортогональное дополнение $U^{\perp}$ — это $\operatorname{Ann} U$ относительно свёртки $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

Свойства правого ортогонального дополнения

- $U^{\perp}$ — подпространство пространства V, и если $W \underset{\text{lin}}{\subset} U \underset{\text{lin}}{\subset} V$, то $W^{\perp} \underset{\text{lin}}{\supset} U^{\perp}$.
- $U \subset {}^{\perp}(U^{\perp})$.
- $\operatorname{Ker}_{\text{пр}} b \underset{\text{lin}}{\subset} U^{\perp}$ для любого $U \underset{\text{lin}}{\subset} V$, $\operatorname{Ker}_{\text{пр}} b = V^{\perp}$.

Свойства левого ортогонального дополнения аналогичны.

Предложение

Пусть b *— билинейная функция на векторном пространстве* V *и* $U \underset{\text{lin}}{\subset} V$.

1. *Левое ортогональное дополнение* ${}^{\perp}U$ *подпространства* U *— это прообраз при левой корреляции* $b_{лев}\colon V \to V^*$ *аннулятора*

$$U^0 = \operatorname{Ann} U = \{\boldsymbol{f} \in V^* : (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in U\}$$

   подпространства U *(относительно естественного спаривания* $c(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$*).*
2. $U^{\perp} = b_{пр}^{-1}(U^0)$.

Упражнение

Докажите, что если подпространство U векторного пространства V конечномерно и ограничение билинейной функции $b\colon V \times V \to K$ на это подпространство невырождено, то $V = U \oplus U^{\perp}$.

Билинейные функции на конечномерных пространствах

Всюду ниже V — конечномерное векторное пространство (если не указано иное).

Матрица билинейной функции

Пусть V — n-мерное векторное пространство, $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в V и b — любая билинейная функция на V.

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \dots & b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \dots & b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \dots & b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

называется матрицей Грама, или просто матрицей, а её элементы $b_{ij} = b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ — коэффициентами билинейной функции b в базисе $\boldsymbol{E}$.

Для любых векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n$

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \dots, x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Пусть даны два базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n\}$ векторного пространства V, C — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$ и B — матрица билинейной функции $b\colon V \times V \to K$ в базисе $\boldsymbol{E}$. Тогда её матрица B' в базисе $\boldsymbol{E}'$ вычисляется по формуле

$$\boxed{B' = C^T BC}\,.$$

Следовательно, *ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса.* Ранг матрицы билинейной функции b в любом базисе называется рангом билинейной функции b и обозначается $\operatorname{rank} b$.

Предложение

Пусть b — билинейная функция на V, $\boldsymbol{E}$ — любой базис пространства V, B — матрица b в этом базисе и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — взаимный с $\boldsymbol{E}$ базис пространства V^*. Тогда матрица правой корреляции $b_{пр}$ относительно базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ равна B, а матрица левой корреляции $b_{лев}$ относительно тех же базисов равна B^T.

Предложение

$\dim \operatorname{Ker}_{лев} b = \dim \operatorname{Ker}_{пр} b$.

(В бесконечномерном случае это не так.)

Упражнение

Приведите пример билинейной функции b, для которой $\operatorname{Ker}_{\text{лев}} b \neq \operatorname{Ker}_{\text{пр}} b$.

Теорема

Следующие свойства билинейной функции b на n-мерном векторном пространстве V равносильны:

1. *функция b невырождена, т.е.* $\operatorname{Ker}_{лев} b = \operatorname{Ker}_{пр} b = \{\mathbf{0}\}$;
2. *матрица Грама функции b в некотором базисе невырождена;*
3. *матрица Грама функции b в любом базисе невырождена;*
4. *левая корреляция* $b_{лев} \colon V \to V^*$ *— изоморфизм;*
5. *правая корреляция* $b_{пр} \colon V \to V^*$ *— изоморфизм;*
6. *для любого* $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ *существует* $\boldsymbol{u} \in V$ *такой, что* $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \neq 0$;
7. *для любого* $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ *существует* $\boldsymbol{u} \in V$ *такой, что* $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$;
8. *для любой линейной функции* $f \colon V \to K$ *существует* $\boldsymbol{v} \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$;
9. *для любой линейной функции* $f \colon V \to K$ *существует* $\boldsymbol{v} \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$.

При выполнении этих условий вектор $\boldsymbol{v}$ в 8 и 9 определён однозначно.

Предложение

Если билинейная функция b на конечномерном пространстве V невырождена, то для всякого подпространства $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \textit{и} \quad ({}^{\perp}U)^{\perp} = U = {}^{\perp}(U^{\perp}).$$

Доказательство. Первые два равенства следуют из того, что ${}^{\perp}U$ и $U^{\perp}$ — прообразы $U^0 \subset V^*$ при изоморфизмах $b_{\text{лев}}$ и $b_{\text{пр}}$ и $\dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^{\perp}U)^{\perp}$ и ${}^{\perp}(U^{\perp})$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. □

Симметричные и кососимметричные билинейные функции

Ниже V — произвольное векторное пространство над полем K.

Определение

Билинейная функция b на V называется симметричной (или симметрической), если $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Билинейная функция b на V называется кососимметричной (кососимметрической, антисимметричной), если $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Предложение

Билинейная функция b на V кососимметрична $\iff$ $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$.

(Достаточно рассмотреть $b(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.)

Множества симметричных и кососимметричных билинейных функций являются векторными пространствами относительно поточечных операций. Будем обозначать их $\mathscr{B}_{\text{сим}}(V)$ и $\mathscr{B}_{\text{кос}}(V)$.

Предложение

Множества $\mathscr{B}_{сим}(V)$ и $\mathscr{B}_{кос}(V)$ всех симметричных и всех кососимметричных билинейных функций на V являются линейными подпространствами векторного пространства $\mathscr{B}(V)$. Более того, $\mathscr{B}(V) = \mathscr{B}_{сим}(V) \oplus \mathscr{B}_{кос}(V)$.

Доказательство. Симметричное и кососимметричное слагаемые определяются так:

$$b_{\text{сим}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{b(\mathbf{x},\mathbf{y})+b(\mathbf{y},\mathbf{x})}{2}, \qquad b_{\text{кос}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{b(\mathbf{x},\mathbf{y})-b(\mathbf{y},\mathbf{x})}{2}. \qquad \square$$

Отображение $\mathscr{B}(V) \to \mathscr{B}(V)$, определённое правилом $b \mapsto b_{\text{сим}}$, является линейным оператором. Это оператор проектирования пространства $\mathscr{B}(V)$ на подпространство $\mathscr{B}_{\text{сим}}(V)$ параллельно $\mathscr{B}_{\text{кос}}(V)$. Он называется симметрированием.

Отображение $\mathscr{B}(V) \to \mathscr{B}(V)$, определённое правилом $b \mapsto b_{\text{кос}}$, является линейным оператором. Это оператор проектирования пространства $\mathscr{B}(V)$ на подпространство $\mathscr{B}_{\text{кос}}(V)$ параллельно $\mathscr{B}_{\text{сим}}(V)$. Он называется альтернированием.

Левая и правая ортогональность относительно (косо)симметричной билинейной функции b совпадают: для любого $U \underset{\text{lin}}{\subset} V$ имеем $U^{\perp} = {}^{\perp}U$.

Следовательно, левое ядро совпадает с правым и называется просто ядром: $V^{\perp} = {}^{\perp}V = \operatorname{Ker} b$.

Предложение

Если b — (косо)симметричная билинейная функция и U — подпространство пространства V с тем свойством, что $\operatorname{Ker} b \oplus U = V$, то ограничение функции b на U невырождено.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} b|_{U \times U}$. Для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ имеем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} b$ и $\boldsymbol{w} \in U$, $\implies$ $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0 \implies \boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} V \cap U$. $\square$

Упражнение

Покажите, что для произвольных билинейных функций это, вообще говоря, не так.

Всюду ниже пространство V предполагается n-мерным.

Матрица $B = (b_{ij})$ любой симметричной билинейной функции на V симметрична, т.е. удовлетворяет условию $B^T = B$.

Матрица $B = (b_{ij})$ любой кососимметричной билинейной функции на V кососимметрична, т.е. удовлетворяет условию $B^T = -B$.

Теорема (Лагранжа)

Для симметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует базис пространства V, в котором матрица b диагональна.

Доказательство. Если $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Предположим, что $\dim V = n > 1$ и для пространств меньшей размерности теорема верна. Если $b \equiv 0$, то доказывать нечего. Пусть $b \not\equiv 0$. Тогда существует $\boldsymbol{e}_1$, для которого $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) \neq 0$ (надо рассмотреть $b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$). Подпространство $U = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^{\perp}$ имеет размерность $n-1$ (так как это пространство решений уравнения $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = 0$), и $U \cap \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$. Значит, $V = U \oplus \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$. В U существует базис $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, в котором матрица ограничения $b|_{U\times U}$ диагональна. $\square$

Определение

Говорят, что симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to K$ имеет в базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ пространства V канонический (или диагональный) вид, если матрица b в этом базисе диагональна, т.е. для всех векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$ значение $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ вычисляется по формуле вида $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$. При этом базис $\boldsymbol{E}$ называется каноническим базисом для b.

Определение

Базис векторного пространства V, в котором матрица кососимметричной билинейной функции b имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & & & & & \text{\Large 0} \\ & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

называется симплектическим базисом относительно b.

Теорема

Для любой кососимметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует симплектический базис.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $b \equiv 0$. Пусть $\dim V = n > 1$ и для меньших n теорема верна. Если $b \equiv 0$, то доказывать нечего. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}$ — любые два вектора, для которых $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}) \neq 0$ (они существуют и не пропорциональны друг другу, так как $b \not\equiv 0$ и $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 0$). Положим $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}$. Пусть $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\rangle^{\perp}$. Имеем $\dim U = n - 2$. Действительно, $\dim U \geqslant n - 2$, поскольку U — это пространство решений системы двух линейных уравнений $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = 0$ и $b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = 0$, и $U \cap \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$, поскольку для любого вектора $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e} - 2 \in \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ имеем $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$ и $b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$. Значит, $V = U \oplus \langle\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\rangle$. По индуктивному предположению в U есть нужный базис $\{\boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ для ограничения b. $\square$

Следствие

На векторном пространстве V над полем характеристики $\neq 2$ существует невырожденная кососимметричная функция $\iff$ размерность V чётна.

Иногда кососимметричной называют билинейную функцию b на V с тем свойством, что $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$. При таком определении доказанная теорема становится верной для любого поля.