Линейная алгебра и геометрия

Лекция 9. Билинейные функции

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Билинейные функции

Пусть V — векторное пространство над полем K.

Определение

Билинейной функцией на V называется функция $b\colon V \times V \to K$, линейная по каждому аргументу.

Линейность по каждому аргументу означает, что для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ и любого $\lambda \in K$

$$b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z), \qquad b(x,y+z) = b(x,y) + b(x,z),$$
$$b(\lambda x,y) = \lambda b(x,y), \qquad b(x,\lambda y) = \lambda b(x,y).$$

Билинейные функции складываются и умножаются на числа поточечно. Относительно этих операций все билинейные функции на V образуют векторное пространство над полем K. Будем обозначать его $\mathscr{B}(V)$.

Примеры

- Скалярное произведение в обычном пространстве.
- Для любых $f, g \in V^*$ $\;b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{y})$ — билинейная функция на V.
- Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ $\;b(f, g) = f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{y})$ — билинейная функция на V^*.
- $\operatorname{tr} AB$ для $A, B \in M_n(K)$.
- В пространстве непрерывных функций на $[0, 1]$

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx, \qquad \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) \cdot f(x) \cdot g(y)\, dx dy,$$

где φ — фиксированная непрерывная функция на $[0, 1]$.

Корреляции и ядра

Задание билинейной функции $b\colon V\times V\to K$ равносильно заданию линейного отображения

$$b_{\text{лев}}\colon V\to V^*,\qquad \boldsymbol{v}\mapsto b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}).$$

Это отображение называется левой корреляцией билинейной функции b. Аналогично определяется правая корреляция

$$b_{\text{пр}}\colon V\to V^*,\qquad \boldsymbol{v}\mapsto b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}).$$

Отображения $b\mapsto b_{\text{лев}}$ и $b\mapsto b_{\text{пр}}$ — изоморфизмы между пространством $\mathscr{B}(V)$ и пространством $\mathscr{L}(V,V^*)$ линейных отображений $V\to V^*$. ▸ к матрицам

▸ к тензорам

Ядра левой и правой корреляций называются, соответственно, левым и правым ядрами билинейной функции:

$$\operatorname{Ker}_{\text{лев}} b=\{\boldsymbol{v}\in V : b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})=0\ \forall \boldsymbol{x}\in V\},\quad \operatorname{Ker}_{\text{пр}} b=\{\boldsymbol{v}\in V : b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=0\ \forall \boldsymbol{x}\in V\}.$$

Упражнение

Приведите пример векторного пространства V и билинейной функции $b\in\mathscr{B}(V)$, для которой одно из ядер тривиально, а другое нет.

Вектор $\boldsymbol{u} \in V$ ортогонален слева вектору $\boldsymbol{v}$, а вектор $\boldsymbol{v}$ ортогонален справа вектору $\boldsymbol{u}$, если $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Левое ортогональное дополнение ${}^{\perp}U$ подпространства $U \subset V$ — это множество векторов, ортогональных слева каждому вектору $\boldsymbol{u} \in U$:

$$ {}^{\perp}U = \{\boldsymbol{x} \in V : b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0 \ \forall \boldsymbol{u} \in U\}. $$

Аналогичным образом определяется правое ортогональное дополнение $U^{\perp}$:

$$ U^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V : b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{u} \in U\}. $$

Левое ортогональное дополнение ${}^{\perp}U$ — не что иное как аннулятор $\operatorname{Ann} U$ относительно свёртки $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, а правое ортогональное дополнение $U^{\perp}$ — это $\operatorname{Ann} U$ относительно свёртки $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

Свойства правого ортогонального дополнения

- $U^{\perp}$ — подпространство пространства V, и если $W \underset{\text{lin}}{\subset} U \underset{\text{lin}}{\subset} V$, то $W^{\perp} \underset{\text{lin}}{\supset} U^{\perp}$.
- $U \subset {}^{\perp}(U^{\perp})$.
- $\operatorname{Ker}_{\text{пр}} b \underset{\text{lin}}{\subset} U^{\perp}$ для любого $U \underset{\text{lin}}{\subset} V$, $\operatorname{Ker}_{\text{пр}} b = V^{\perp}$.

Свойства левого ортогонального дополнения аналогичны.

Определение

Ненулевой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ называется изотропным, если он ортогонален (слева = справа) сам себе. Множество всех изотропных векторов — изотропный конус. Подпространство $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$ изотропно (слева/справа), если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{u} \in U$, которому ортогонален (слева/справа) каждый $\boldsymbol{x} \in U$. Подпространство $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$ вполне изотропно, если $U = U^{\perp}$ $(= {}^{\perp}U)$.

Определение

Билинейная функция невырождена, если оба её ядра тривиальны.

Упражнения

1. Заметьте, что билинейная функция b на векторном пространстве V невырождена тогда и только тогда, когда $V^{\perp} = {}^{\perp}V = \{\mathbf{0}\}$.
2. Покажите, что $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$ изотропно слева или справа тогда и только тогда, когда ограничение $b|_{U\times U} \colon U \times U \to K$ вырождено.
3. Приведите пример невырожденной билинейной функции на пространстве V, для которой всякое одномерное подпространство $U \subset V$ вполне изотропно.

Предложение

Пусть b — *билинейная функция на векторном пространстве* V *и* $U \underset{\text{lin}}{\subset} V$.

1. *Левое ортогональное дополнение* ${}^{\perp}U$ *подпространства* U — *это прообраз при левой корреляции* $b_{лев}: V \to V^*$ *аннулятора*
$$U^0 = \operatorname{Ann} U = \{\boldsymbol{f} \in V^* : (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in U\}$$
подпространства U *(относительно естественного спаривания* $c(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$*).*
2. $U^{\perp} = b_{пр}^{-1}(U^0)$.
3. *Подпространство* U *вполне изотропно тогда и только тогда, когда его образы* $b_{лев}(U)$ *и* $b_{пр}(U)$ *при левой и правой корреляциях содержатся в аннуляторе* U^0.

Упражнение

Докажите, что если подпространство U векторного пространства V конечномерно и ограничение билинейной функции $b: V \times V \to K$ на это подпространство невырождено, то $V = U \oplus U^{\perp}$.

Билинейные функции на конечномерных пространствах

Всюду ниже V — конечномерное векторное пространство (если не указано иное).

Матрица билинейной функции

Пусть V — n-мерное векторное пространство, $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в V и b — любая билинейная функция на V.

Матрица
$$B = \begin{pmatrix} b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \ldots & b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \ldots & b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \ldots & b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$
называется матрицей Грама, или просто матрицей, а её элементы $b_{ij} = b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ — коэффициентами билинейной функции b в базисе $\boldsymbol{E}$.

Для любых векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$
$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \ldots, x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Пусть даны два базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n\}$ векторного пространства V, C — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$ и B — матрица билинейной функции $b\colon V \times V \to K$ в базисе $\boldsymbol{E}$. Тогда её матрица B' в базисе $\boldsymbol{E}'$ вычисляется по формуле

$$\boxed{B' = C^T BC}.$$

Следовательно, *ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса.* Ранг матрицы билинейной функции b в любом базисе называется рангом билинейной функции b и обозначается $\operatorname{rank} b$.

Предложение

Пусть b — *билинейная функция на* V, $\boldsymbol{E}$ — *любой базис пространства* V, B — *матрица* b *в этом базисе и* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — *взаимный с* $\boldsymbol{E}$ *базис пространства* V^*. *Тогда матрица правой корреляции* $b_{\textit{пр}}$ *относительно базисов* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ *равна* B, *а матрица левой корреляции* $b_{\textit{лев}}$ *относительно тех же базисов равна* B^T.

▸ к скалярному произведению

Предложение

$\dim \operatorname{Ker}_{\textit{лев}} b = \dim \operatorname{Ker}_{\textit{пр}} b$.

(В бесконечномерном случае это не так.)

Упражнение

Приведите пример билинейной функции b, для которой $\operatorname{Ker}_{\text{лев}} b \neq \operatorname{Ker}_{\text{пр}} b$.

Теорема

Следующие свойства билинейной функции b *на* n*-мерном векторном пространстве* V *равносильны:*

1. *функция* b *невырождена, т.е.* $\mathrm{Ker}_{лев}\, b = \mathrm{Ker}_{пр}\, b = \{\mathbf{0}\}$;
2. *матрица Грама функции* b *в некотором базисе невырождена;*
3. *матрица Грама функции* b *в любом базисе невырождена;*
4. *левая корреляция* $b_{лев} : V \to V^*$ *— изоморфизм;*
5. *правая корреляция* $b_{пр} : V \to V^*$ *— изоморфизм;*
6. *для любого* $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ *существует* $\boldsymbol{u} \in V$ *такой, что* $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \neq 0$;
7. *для любого* $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ *существует* $\boldsymbol{u} \in V$ *такой, что* $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$;
8. *для любой линейной функции* $f : V \to K$ *существует* $\boldsymbol{v} \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$;
9. *для любой линейной функции* $f : V \to K$ *существует* $\boldsymbol{v} \in V$ *такой, что* $f(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in V$.

При выполнении этих условий вектор $\boldsymbol{v}$ *в* 8 *и* 9 *определён однозначно.*

Предложение

Если билинейная функция b на конечномерном пространстве V невырождена, то для всякого подпространства $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \text{и} \quad ({}^{\perp}U)^{\perp} = U = {}^{\perp}(U^{\perp}).$$

Доказательство. Первые два равенства следуют из того, что ${}^{\perp}U$ и $U^{\perp}$ — прообразы $U^0 \subset V^*$ при изоморфизмах $b_{\text{лев}}$ и $b_{\text{пр}}$ и $\dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^{\perp}U)^{\perp}$ и ${}^{\perp}(U^{\perp})$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. □

Упражнение

Докажите, что размерность вполне изотропного подпространства невырожденной билинейной функции на пространстве V не превосходит $\frac{1}{2}\dim V$.

Канонический оператор

Билинейная функция b на V невырождена $\iff$ её корреляции $b_{\text{лев}}\colon V \to V^*$ и $b_{\text{пр}}\colon V \to V^*$ — изоморфизмы. Линейный оператор $\varkappa_b = b_{\text{пр}}^{-1} \circ b_{\text{лев}}\colon V \to V$ называется канонический оператором невырожденной билинейной функции b.

Теорема

Канонический оператор $\varkappa_b\colon V \to V$ невырожденной билинейной функции $b\colon V \times V \to K$ является изоморфизмом. Это единственный линейный оператор $V \to V$ с тем свойством, что

$$\boxed{b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \varkappa_b \boldsymbol{x})} \quad \text{для любых } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

Доказательство. Из определения следует, что если B — матрица b в некотором базисе $\boldsymbol{E}$, то матрица канонического оператора $\varkappa_b$ в $\boldsymbol{E}$ равна $B^{-1}B^T$. Любой оператор с указанным свойством должен иметь ту же матрицу. □

Имеем изоморфизмы $\mathscr{B}(V) \cong \mathscr{L}(V, V^*)$: $b \mapsto b_{\text{лев}}$ и $\mathscr{B}(V) \cong \mathscr{L}(V, V^*)$: $b \mapsto b_{\text{пр}}$, а также изоморфизм $b \mapsto \varkappa_b$ между группой невырожденных билинейных функций на V и группой изоморфизмов $V \to V$.

Симметричные и кососимметричные билинейные функции

Ниже V — произвольное векторное пространство над полем K.

Определение

Билинейная функция b на V называется симметричной (или симметрической), если $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ для любых векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$.

Билинейная функция b на V называется кососимметричной (кососимметрической, антисимметричной), если $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ для любых векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$.

Предложение

Если характеристика поля K отлична от 2, то билинейная функция b на V кососимметрична $\iff$ $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$.

(Достаточно рассмотреть $b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$.)

Множества симметричных и кососимметричных билинейных функций являются векторными пространствами относительно поточечных операций. Будем обозначать их $\mathscr{B}_{\text{сим}}(V)$ и $\mathscr{B}_{\text{кос}}(V)$.

Предложение

Множества $\mathscr{B}_{сим}(V)$ и $\mathscr{B}_{кос}(V)$ всех симметричных и всех кососимметричных билинейных функций на V являются линейными подпространствами векторного пространства $\mathscr{B}(V)$. Более того, $\mathscr{B}(V) = \mathscr{B}_{сим}(V) \oplus \mathscr{B}_{кос}(V)$.

Доказательство. Симметричное и кососимметричное слагаемые определяются так:
$$b_{\text{сим}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{2}, \qquad b_{\text{кос}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{2}. \qquad \square$$

Отображение $\mathscr{B}(V) \to \mathscr{B}(V)$, определённое правилом $b \mapsto b_{\text{сим}}$, является линейным оператором. Это оператор проектирования пространства $\mathscr{B}(V)$ на подпространство $\mathscr{B}_{\text{сим}}(V)$ параллельно $\mathscr{B}_{\text{кос}}(V)$. Он называется симметрированием.

Отображение $\mathscr{B}(V) \to \mathscr{B}(V)$, определённое правилом $b \mapsto b_{\text{кос}}$, является линейным оператором. Это оператор проектирования пространства $\mathscr{B}(V)$ на подпространство $\mathscr{B}_{\text{кос}}(V)$ параллельно $\mathscr{B}_{\text{сим}}(V)$. Он называется альтернированием.

Левая и правая ортогональность относительно (косо)симметричной билинейной функции b совпадают: для любого $U \underset{\text{lin}}{\subset} V$ имеем $U^\perp = {}^\perp U$.

Следовательно, левое ядро совпадает с правым и называется просто ядром: $V^\perp = {}^\perp V = \operatorname{Ker} b$.

Предложение

Если b — (косо)симметричная билинейная функция и U — подпространство пространства V с тем свойством, что $\operatorname{Ker} b \oplus U = V$, то ограничение функции b на U невырождено.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} b|_{U\times U}$. Для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ имеем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} b$ и $\boldsymbol{w} \in U$, $\implies b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0 \implies \boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} V \cap U$. □

Упражнение

Покажите, что для произвольных билинейных функций это, вообще говоря, не так.

Всюду ниже пространство V предполагается n-мерным.

Матрица $B = (b_{ij})$ любой симметричной билинейной функции на V симметрична, т.е. удовлетворяет условию $B^T = B$.

Матрица $B = (b_{ij})$ любой кососимметричной билинейной функции на V кососимметрична, т.е. удовлетворяет условию $B^T = -B$.

Теорема (Лагранжа)

Для симметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует базис пространства V, в котором матрица b диагональна.

Доказательство. Если $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Предположим, что $\dim V = n > 1$ и для пространств меньшей размерности теорема верна.
Если $b \equiv 0$, то доказывать нечего. Пусть $b \not\equiv 0$. Тогда существует $\boldsymbol{e}_1$, для которого $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) \neq 0$ (надо рассмотреть $b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$). Подпространство $U = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^{\perp}$ имеет размерность $n-1$ (так как это пространство решений уравнения $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = 0$), и $U \cap \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$. Значит, $V = U \oplus \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$. В U существует базис $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, в котором матрица ограничения $b|_{U \times U}$ диагональна. □

▸ к эрмитовым функциям

Определение

Говорят, что симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to K$ имеет в базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ пространства V канонический (или диагональный) вид, если матрица b в этом базисе диагональна, т.е. для всех векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$ значение $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ вычисляется по формуле вида $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$. При этом базис $\boldsymbol{E}$ называется каноническим базисом для b.

Определение

Базис векторного пространства V, в котором матрица кососимметричной билинейной функции b имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & & & & & \mathbf{0} \\ & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

называется симплектическим базисом относительно b.

Теорема

Для любой кососимметричной билинейной функции b на конечномерном векторном пространстве V над любым полем характеристики $\neq 2$ существует симплектический базис.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $b \equiv 0$. Пусть $\dim V = n > 1$ и для меньших n теорема верна. Если $b \equiv 0$, то доказывать нечего. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}$ — любые два вектора, для которых $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}) \neq 0$ (они существуют и не пропорциональны друг другу, так как $b \not\equiv 0$ и $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 0$). Положим $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}$. Пусть $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\rangle^{\perp}$. Имеем $\dim U = n - 2$. Действительно, $\dim U \geqslant n - 2$, поскольку U — это пространство решений системы двух линейных уравнений $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = 0$ и $b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = 0$, и $U \cap \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$, поскольку для любого вектора $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e} - 2 \in \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ имеем $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$ и $b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$. Значит, $V = U \oplus \langle\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\rangle$. По индуктивному предположению в U есть нужный базис $\{\boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ для ограничения b. $\square$

Следствие

На векторном пространстве V *над полем характеристики* $\neq 2$ *существует невырожденная кососимметричная функция* $\iff$ *размерность* V *чётна.*

Иногда кососимметричной называют билинейную функцию b на V с тем свойством, что $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$. При таком определении доказанная теорема становится верной для любого поля.

Квадратичные формы

Всюду ниже V — n-мерное векторное пространство над произвольным полем K.

Определение

Пусть $b\colon V \times V \to K$ — симметричная билинейная функция. Функция $q\colon V \to K$, определённая правилом

$$q(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \qquad \text{для каждого } \boldsymbol{x} \in V,$$

называется квадратичной формой (или квадратичной функцией), ассоциированной с b.

Если $B = (b_{ij})$ — матрица симметричной билинейной функции b в некотором базисе, то

$$q(\boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_n)\, B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в том же базисе. В координатах:

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j.$$

Определение

Матрицей квадратичной формы q, ассоциированной с симметричной билинейной функцией b, в данном базисе называется матрица b в этом базисе. Ранг этой матрицы называется рангом квадратичной формы q.

Поляризация

Если характеристика поля K не равна 2, то по данной квадратичной форме q можно однозначно восстановить симметричную билинейную функцию b, с которой она ассоциирована:

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}(q(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x}) - q(\boldsymbol{y})).$$

Процедура восстановления b по q называется процедурой поляризации. Таким образом, если характеристика поля K не равна 2, то имеется взаимно однозначное соответствие между симметричными билинейными функциями и квадратичными формами.

Согласно теореме Лагранжа для любой квадратичной формы $q\colon V \to K$ существует базис, в котором она записывается в виде суммы квадратов с коэффициентами:

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Такое выражение называется канонческим (или диагональным) видом квадратичной формы q.

Здесь и всюду дальше обозначения вида $x_1, \ldots, x_n$, $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, $y_1, \ldots, y_n$ используются для координат вектора, к которому применяется рассматриваемая квадратичная форма, в рассматриваемом базисе (из контекста всегда ясно, каком). Иногда мы пишем $q(x_1, \ldots, x_n)$ вместо $q(\boldsymbol{x})$, подразумевая, что каждый вектор может быть отождествлён с набором его координат.

Существует несколько алгоритмов приведения квадратичной формы к каноническому виду. Мы рассмотрим два.

Метод Лагранжа: выделение полных квадратов

Пусть характеристика поля $\neq 2$ и в некотором базисе

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_{ij}x_i x_j.$$

Возможны два случая:

1. $b_{ii} \neq 0$ *хотя бы для одного* $i \leqslant n$

Пусть $b_{11} \neq 0$. Собираем вместе все слагаемые с x_1 и выносим b_{11} за скобки:

$$q(\boldsymbol{x}) = b_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{b_{12}}{b_{11}}x_1x_2 + \dots + 2\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_1x_n\right) + \dots .$$

Выделяем полный квадрат:

$$q(\boldsymbol{x}) = b_{11}\left(x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n\right)^2 - \frac{b_{12}^2}{b_{11}^2}x_2^2 - \dots - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}^2}x_n^2 + \dots .$$

Делаем замену переменных:

$$y_1 = x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n, \quad y_2 = x_2, \ \dots, \ y_n = x_n.$$

Получаем $q(\boldsymbol{x}) = b_{11}y_1^2 + \tilde{q}(y_2, \dots, y_n)$. Дальше по рекурсии.

2. $b_{11} = b_{22} = \dots = b_{nn} = 0$. Ищем $i < j$, для которых $b_{ij} \neq 0$. Пусть $b_{12} \neq 0$. Делаем подстановку:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3, \dots, x_n = y_n.$$

В выражении $q(y_1, \dots, y_n)$ той же квадратичной формы в новых координатах коэффициент при y_1^2 равен $2b_{12} \neq 0$. Применяем алгоритм 1.

Метод Якоби: ортогонализация

Теорема (формула Якоби)

Пусть $b\colon V \times V \to K$ *— симметричная билинейная функция на* n*-мерном векторном пространстве над любым полем* K, B *— её матрица в некотором базисе* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *и* $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *— угловые миноры матрицы* B. *Положим* $\Delta_0 = 1$.

Если все Δ_i, $i \leqslant n$, *отличны от нуля, то существует базис* $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ *векторного пространства* V, *в котором квадратичная функция* q, *ассоциированная с* b, *имеет вид*

$$q(y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \cdots + y_n\tilde{\boldsymbol{e}}_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2,$$

причём матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ *к* $\tilde{\boldsymbol{E}}$ *верхне-унитреугольна (верхнетреугольна и все диагональные элементы равны* 1*).*

▸ к эрмитовым функциям

Доказательство. Индукция по n. Пусть $n > 1$, для меньших n доказано.

Положим $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}\rangle$. По индуктивному предположению для билинейной функции $b|_{U\times U}$ в U есть базис $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}\}$ с нужными свойствами. Для $i, j < n$ имеем $b(\tilde{\boldsymbol{e}}_i, \tilde{\boldsymbol{e}}_j) = 0$, если $i \neq j$, и $b(\tilde{\boldsymbol{e}}_i, \tilde{\boldsymbol{e}}_i) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$.

Положим

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{e}_n - \frac{b(\boldsymbol{e}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \dots - \frac{b(\boldsymbol{e}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}.$$

Покажем, что базис $\tilde{\boldsymbol{E}} = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ обладает нужными свойствами.

Матрица C перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\tilde{\boldsymbol{E}}$ верхне-унитреугольна.

Для $k < n$ имеем

$$b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = b\Big(\tilde{\boldsymbol{e}}_n - \frac{b(\boldsymbol{e}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \dots - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1},\ \tilde{\boldsymbol{e}}_k\Big) =$$
$$= b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)} b(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{e}_k) - \dots - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1})} b(\tilde{\boldsymbol{e}}_{n-1}, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) =$$
$$= b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) - \frac{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_k)}{b(\tilde{\boldsymbol{e}}_k, \tilde{\boldsymbol{e}}_k)} b(\tilde{\boldsymbol{e}}_k, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = 0.$$

$\Longrightarrow$ матрица $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ функции b в базисе $\tilde{\boldsymbol{E}}$ диагональна, диагональные элементы суть $\tilde{b}_{ii} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ для $i < n$ и $\tilde{b}_{nn} = b(\tilde{\boldsymbol{e}}_n, \tilde{\boldsymbol{e}}_n)$. Имеем $\det \tilde{B} = \det C^T \cdot \det B \cdot \det C = \det B = \Delta_n$. Значит, $\tilde{b}_{nn} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

▸ к Граму–Шмидту

□

Квадратичные формы над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$

Предложение

Для любой квадратичной формы q на n-мерном векторном пространстве над полем комплексных чисел существует базис, в котором

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$$

для некоторого $r \leqslant n$. При этом число r является инвариантом квадратичной функции q; более того, оно совпадает с рангом q.

Определение

Выражение $q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$ для квадратичной формы q над полем комплексных чисел называется её нормальным видом.

Предложение

Для любой квадратичной формы q на n-мерном векторном пространстве над полем вещественных чисел существует базис, в котором

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$$

для некоторых k и l, удовлетворяющих условию $r = k + l \leqslant n$. При этом число r является инвариантом квадратичной функции q; более того, оно совпадает с рангом q.

Определение

Выражение $q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$ для квадратичной формы q над полем вещественных чисел называется её нормальным видом. Числа k и l называются, соответственно, её положительным и отрицательным индексами инерции.

Теорема (закон инерции)

Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами квадратичной функции (т.е. не зависят от выбора базиса).

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ — два базиса векторного пространства V над $\mathbb{R}$, в которых

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = \tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_s^2 - \tilde{x}_{s+1}^2 - \cdots - \tilde{x}_{s+t}^2. \qquad (\star)$$

Предположим, что $k > s$. Положим $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}\rangle$ и $W = \langle\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{s+1}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}\rangle$. Формула Грассмана $\Longrightarrow$ $\dim(U \cap W) = k + n - s - \dim(U + W) \geqslant k - s > 0$. Пусть $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u} \in U \cap W$. Имеем

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k = \mu_{s+1} \tilde{\boldsymbol{e}}_{s+1} + \cdots + \mu_n \tilde{\boldsymbol{e}}_n.$$

Подставляем в $(\star)$: $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2 = -\mu_{s+1}^2 - \cdots - \mu_n^2$. □

▸ к эрмитовым формам

Теорема (теорема Якоби)

Если все угловые миноры Δ_i *матрицы* Q *квадратичной формы* $q\colon V \to \mathbb{R}$ *в некотором базисе* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *пространства* V *не равны нулю, то отрицательный индекс инерции формы* q *равен числу тех* $i \leqslant n$*, для которых* $\Delta_i \cdot \Delta_{i-1} < 0$.

Доказательство. Прямое следствие метода Якоби и закона инерции. $\square$

Упражнение

Докажите, что теорема Якоби остаётся верной, если среди миноров Δ_i есть нулевые, но все миноры, соседние с нулевыми, ненулевые.

Положительно определённые билинейные функции

Определение

Квадратичная форма $q\colon V \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной, если $q(\boldsymbol{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in V$. Симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная форма положительно определена.

Квадратичная форма $q\colon V \to \mathbb{R}$ называется отрицательно определенной, если $q(\boldsymbol{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in V$. Симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется отрицательно определенной, если соответствующая ей квадратичная форма отрицательно определена.

Аналогично определяются неотрицательно и неположительно определённые квадратичные формы и симметричные билинейные функции.

Замечание

Нормальный вид положительно определённой квадратичной формы в n-мерном пространстве есть $x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Теорема (критерий Сильвестра)

Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — любой базис в нём. Симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ положительно определена $\iff$ все угловые миноры Δ_i её матрицы B в базисе $\boldsymbol{E}$ положительны.

Доказательство

$\Longrightarrow$: Индукция по n. Пусть $n > 1$, для меньших верно. Положим $U = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}\rangle$. Ограничение b на U положительно определено + индуктивное предположение $\Longrightarrow$ $\Delta_i > 0$ для $i < n$. Пусть $\tilde{\boldsymbol{E}}$ — базис, в котором матрица $\tilde{B}$ диагональна, и пусть C — матрица перехода от $\tilde{\boldsymbol{E}}$ к $\boldsymbol{E}$. Положительная определённость + формула изменения матрицы $\Longrightarrow$

$$\Delta_n = \det B = \det C^T \cdot \det \tilde{B} \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot \det \tilde{B} > 0.$$

$\Longleftarrow$: по формуле Якоби. □

▸ к эрмитовым функциям

Упражнения

1. Докажите, что симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ отрицательно определена $\iff$ знаки угловых миноров Δ_i её матрицы B в произвольном базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ строго чередуются, причём $\Delta_1 < 0$.
2. Докажите, что симметричная билинейная функция $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ неотрицательно определена $\iff$ все главные миноры её матрицы B в произвольном базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ неотрицательны.