Линейная алгебра и геометрия

Лекция 8. Комплексификация и овеществление пространств и линейных отображений. Инвариантные двухмерные подпространства у вещественного оператора.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Комплексификация

Пусть $(V,+,\cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Векторное пространство $V_{\mathbb{C}} = (V \times V, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$ над $\mathbb{C}$, элементами которого являются пары $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in V \times V$, а операции определены правилами

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}) \quad \text{и} \quad (\lambda + i\mu)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{y}, \mu\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y})$$

(для краткости мы пишем $+$ вместо $+_{\mathbb{C}}$), называется комплексификацией пространства V. При этом векторы пространства V отождествляются с векторами вида $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})$ в пространстве $V_{\mathbb{C}}$.

Для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ имеем $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) + i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$. Поэтому каждый вектор $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in V_{\mathbb{C}}$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \rightleftarrows \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}.$$

Теорема

Любой базис $\boldsymbol{E}$ *пространства* V *является одновременно и базисом пространства* $V_{\mathbb{C}}$.

Доказательство. То, всякий вектор $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} \in V_{\mathbb{C}}$ выражается через $\boldsymbol{E}$ (с комплексными коэффициентами), очевидно. Проверим, что множество $\boldsymbol{E}$ линейно независимо над $\mathbb{C}$. Любая линейная комбинация элементов $\boldsymbol{E}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет вид $\sum_{i \leqslant n}(\lambda_i + i\mu_i)\boldsymbol{e}_{r_i}$, где $\boldsymbol{e}_{r_i}$ — попарно различные векторы из $\boldsymbol{E}$ и $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$. Если $\sum_{i \leqslant n}(\lambda_i + i\mu_i)\boldsymbol{e}_{r_i} = \boldsymbol{0}$, то $\sum_{i \leqslant n}\lambda_i\boldsymbol{e}_{r_i} + i\sum_{i \leqslant n}\mu_i\boldsymbol{e}_{r_i} = \boldsymbol{0}$, т.е. $(\sum_{i \leqslant n}\lambda_i\boldsymbol{e}_{r_i}, \sum_{i \leqslant n}\mu_i\boldsymbol{e}_{r_i}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$, и из линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_{r_i}$ над $\mathbb{R}$ следует, что $\lambda_i = \mu_i = 0$ для всех $i \leqslant n$. □

Следствие

Размерность комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ *любого векторного пространства* V *над* $\mathbb{R}$ *равна размерности пространства* V.

Не всякий базис пространства $V_{\mathbb{C}}$ является одновременно базисом пространства V. Однако в любом базисе, который является таковым, координаты любого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ как элемента $V_{\mathbb{C}}$ совпадают с его координатами как элемента V.

Пусть V и U — два векторных пространства над $\mathbb{R}$. Произвольное линейное отображение $f : V \to U$ однозначно продолжается до линейного отображения $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}$ по формуле

$$f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + if(\boldsymbol{y}).$$

Отображение $f_{\mathbb{C}}$ называется комплексификацией отображения f.

Предположим, что пространства V и U конечномерны. Вспомним, что всякий базис $\boldsymbol{E}$ в V (базис $\boldsymbol{B}$ в U) является одновременно базисом в $V_{\mathbb{C}}$ (в $U_{\mathbb{C}}$), а матрица линейного отображения состоит из столбцов координат образов базисных векторов. Поскольку $f(\boldsymbol{e}) \in U$ для любого $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$, а координаты в базисе $\boldsymbol{B}$ любого вектора $\boldsymbol{x} \in U$ как элемента U сопадают с координатами в том же базисе этого вектора как элемента $V_{\mathbb{C}}$, видим, что матрица отображения $f_{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей отображения f.

Овеществление

Пусть $(V, +, \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Забудем про возможность умножать векторы из V на комплексные числа и оставим только умножение на числа из $\mathbb{R}$, т.е. заменим операцию $\cdot : V \times \mathbb{C} \to V$ на её ограничение $\cdot_{\mathbb{R}} : V \times \mathbb{R} \to V$. Множество V и операцию $+$ оставим без изменений. В результате мы получим векторное пространство $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ над $\mathbb{R}$, которое будем обозначать $V_{\mathbb{R}}$. Оно называется овеществлением пространства V.

Теорема

Если $\boldsymbol{E}$ *— базис векторного пространства* V *над полем* $\mathbb{C}$*, то* $\boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E}$ *— базис* $V_{\mathbb{R}}$.

(Здесь $i\boldsymbol{E} = \{i\boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}\}$.)

Доказательство. Для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ (однозначно) определены векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in \boldsymbol{E}$ и числа $x_1 = y_1 + iz_1, \ldots, x_n = y_n + iz_n \in \mathbb{C}$ такие, что $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = (y_1 + iz_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (y_n + iz_n)\boldsymbol{e}_1 = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n + z_1(i\boldsymbol{e}_1) + \cdots + z_n(i\boldsymbol{e}_1)$. Значит, $\langle \boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E} \rangle = V$. Множество $\boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E}$ линейно независимо над $\mathbb{R}$. Действительно, любая линейная комбинация векторов из $\boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E}$ представима как $\sum_{i \leqslant n} \alpha_{r_i} \boldsymbol{e}_{r_i} + \sum_{i \leqslant m} \beta_{s_i}(i\boldsymbol{e}_{s_i})$, где $\boldsymbol{e}_{r_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{r_n}, \boldsymbol{e}_{s_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{s_m} \in \boldsymbol{E}$ (причём $\boldsymbol{e}_{r_i} \neq \boldsymbol{e}_{r_j}$ для $i \neq j$ и $\boldsymbol{e}_{s_i} \neq \boldsymbol{e}_{s_j}$ для $i \neq j$) и $\alpha_{r_1}, \ldots, \alpha_{r_n}, \beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_m} \in \mathbb{R}$. Для каждого индекса r_i, который не встречается среди индексов s_j, положим $\beta_{r_i} = 0$, и для каждого индекса s_j, который не встречается среди индексов r_i, положим $\alpha_{r_i} = 0$. В результате мы сможем записать нашу линейную комбинацию в виде $(\alpha_{t_1} + i\beta_{t_1})\boldsymbol{e}_{t_1} + \cdots + (\alpha_{t_k} + i\beta_{t_k})\boldsymbol{e}_{t_k}$, где $\{t_1, \ldots, t_k\} = \{r_1, \ldots, r_n\} \cup \{s_1, \ldots, s_m\}$ и все $\boldsymbol{e}_{t_i}$ разные. Из линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_{t_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{t_k}$ над $\mathbb{C}$ следует, что если наша линейная комбинация равна $\mathbf{0}$, то $\alpha_{t_i} = \beta_{t_i} = 0$ для всех $i \leqslant k$, а значит, $\alpha_{r_i} = 0$ для $i \leqslant n$ и $\beta_{s_i} = 0$ для $i \leqslant m$. $\square$

Упражнение

Покажите, что если V — векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_\iota : \iota \in I\}$ (I — любое множество индексов) — его базис и вектор $\boldsymbol{x} \in V$ имеет в этом базисе координаты $x_{\iota_1} = y_{\iota_1} + iz_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_n} = y_{\iota_n} + iz_{\iota_n}$, то в качестве элемента пространства $V_\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ тот же вектор имеет в базисе $\boldsymbol{E} \cup i\boldsymbol{E}$ координаты $y_{\iota_1}, \ldots, y_{\iota_n}, z_{\iota_1}, \ldots, z_{\iota_n}$.

Следствие

Если V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\dim V = n$, то $\dim V_\mathbb{R} = 2n$.

Комплексификация и овеществление линейных отображений

Пусть теперь V и U — два векторных пространства над $\mathbb{C}$ и $f : V \to U$ — линейное отображение. Это же самое отображение можно рассматривать также и как отображение $f : V_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$ (потому что несущие множества у пространств V и $V_{\mathbb{R}}$ и у пространств U и $U_{\mathbb{R}}$ одни и те же). Мы будем обозначать отображение f как $f_{\mathbb{R}}$ в том случае, когда рассматриваем отображение $f = f_{\mathbb{R}}$ из $V_{\mathbb{R}}$ в $U_{\mathbb{R}}$.

Относительно операций $+$ и $\cdot_{\mathbb{R}}$ отображение $f_{\mathbb{R}}$ остаётся линейным. Действительно, $f_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = f_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{x}) + f_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{y})$ для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_{\mathbb{R}} = V$ и $f_{\mathbb{R}}(\lambda \boldsymbol{x}) = f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) = \lambda f_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \in V_{\mathbb{R}} = V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Поэтому в случае, когда U и V конечномерны, определена не только его матрица A как отображения $V \to U$, но и матрица $A_{\mathbb{R}}$ как отображения $V_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$.

Теорема

Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{C}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f : V \to U$ — линейное отображение с матрицей $A = B + iC$ относительно этих базисов. Тогда матрица f как отображения $V_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$ относительно базисов $\boldsymbol{E}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, i\boldsymbol{b}_1, \ldots, i\boldsymbol{b}_m\}$ равна $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$. По определению матрицы линейного отображения каждый вектор $f(\boldsymbol{e}_j)$, $j \leqslant n$, имеет координаты $a_{1j} = b_{1j} + ic_{1j}, \ldots, a_{mj} = b_{mj} + ic_{mj}$ в базисе $\boldsymbol{B}$ (когда он рассматривается как элемент U), а значит, координаты $b_{1j}, \ldots, b_{mj}, c_{1j}, \ldots, c_{mj}$ в базисе $\boldsymbol{E}_{\mathbb{R}}$ (когда он рассматривается как элемент $U_{\mathbb{R}}$). В силу линейности f над $\mathbb{C}$ каждый вектор $f(i\boldsymbol{e}_j)$, $j \leqslant n$, имеет координаты $ia_{1j} = -c_{1j} + ib_{1j}, \ldots, ia_{mj} = -c_{mj} + ib_{mj}$ в базисе $\boldsymbol{B}$ (когда он рассматривается как элемент U), а значит, координаты $-c_{1j}, \ldots, -c_{mj}, b_{1j}, \ldots, b_{mj}$ в базисе $\boldsymbol{E}_{\mathbb{R}}$ (когда он рассматривается как элемент $U_{\mathbb{R}}$). Из определения матрицы линейного отображения вытекает требуемое утверждение. □

Пусть теперь V и U — два векторных пространства над $\mathbb{R}$ и $f\colon V \to U$ — линейное отображение. Это отображение порождает отображение

$$f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}, \quad \boldsymbol{x} + i\,\boldsymbol{y} \mapsto f(\boldsymbol{x}) + i\,f(\boldsymbol{y}).$$

Относительно операций $+$ и $\cdot_{\mathbb{C}}$ оно остаётся линейным. Действительно,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= f_{\mathbb{C}}((\boldsymbol{x}_1 + i\,\boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + i\,\boldsymbol{y}_2)) = f_{\mathbb{C}}((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + i\,(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)) \\ &= f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + i\,f(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) + i\,(f(\boldsymbol{y}_1) + f(\boldsymbol{y}_2))) \\ &= (f(\boldsymbol{x}_1) + i\,f(\boldsymbol{y}_1)) + (f(\boldsymbol{x}_2) + i\,f(\boldsymbol{y}_2)) = f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x}_1 + i\,\boldsymbol{y}_1) + f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x}_2 + i\,\boldsymbol{y}_2) \\ &= f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u}) + f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

для $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1 + i\,\boldsymbol{y}_1 \in V_{\mathbb{C}}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_2 + i\,\boldsymbol{y}_2 \in V_{\mathbb{C}}$ и

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(\lambda\boldsymbol{u}) &= f_{\mathbb{C}}((a + i\,b)(\boldsymbol{x} + i\,\boldsymbol{y})) = f_{\mathbb{C}}((a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y}) + i\,(-b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y})) \\ &= f(a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y}) + i\,f(-b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}) = af(\boldsymbol{x}) - b\,f(\boldsymbol{y}) - i\,b\,f(\boldsymbol{x}) + i\,a\,f(\boldsymbol{y}) \\ &= (a + i\,b)(f(\boldsymbol{x}) + i\,f(\boldsymbol{y})) = (a + i\,b)f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + i\,\boldsymbol{y}) = \lambda f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

для $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + i\,\boldsymbol{y} \in V_{\mathbb{C}}$.

Теорема

Пусть V и U — два конечномерных векторных пространства над $\mathbb{R}$ с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ соответственно, и пусть $f : V \to U$ — линейное отображение с матрицей A относительно этих базисов. Тогда матрица A также является матрицей отображения $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}$ в тех же базисах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$.

Доказательство. Действительно, $f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{e}_i) = f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_j$ для $i = 1, \ldots, n$. Из определения матрицы линейного отображения вытекает требуемое утверждение. $\square$

Примеры

1. Комплексификация одномерного арифметического пространства $\mathbb{R}^1$ — арифметическое пространство $\mathbb{C}^1$. Каждое комплексное число $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, можно трактовать как пару (x, y), причём пары умножаются на числа именно по тому закону, который по определению действует в комплексификации: $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu) \implies (x + iy)(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$. Базис $\{\boldsymbol{e}\} = \{1\}$ пространства $\mathbb{R}^1$ является одновременно и базисом в $\mathbb{C}^1$ — любой элемент $\mathbb{C}^1$ есть некоторое комплексное число, умноженное на 1.

Примеры

2. Овеществление одномерного пространства $\mathbb{C}^1$ изоморфно двумерному пространству $\mathbb{R}^2$. Изоморфизм задаётся правилом $\varphi\colon x + iy \mapsto (x, y)$. Базису $\{\boldsymbol{e}\} = \{1\}$ в пространстве $\mathbb{C}^1$ соответствует базис $\{1, i\}$ овеществления, который при изоморфизме φ переходит в стандартный базис $\{(1,0),(0,1)\}$.

   Рассмотрим поворот $f\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$ на угол α. В области определения и области значений отображения f возьмём один и тот же базис $\{\boldsymbol{e}\} = \{1\}$. При повороте базисный вектор 1 переходит в вектор $\cos\alpha + i\sin\alpha$. Значит, поворот имеет матрицу $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ (размера 1×1). Матрица f как отображения $\mathbb{C}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^1_{\mathbb{R}}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{e}, i\boldsymbol{e}\} = \{1, i\} = \{(1,0),(0,1)\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Примеры

3. Пусть $f : V \to V$ есть оператор на одномерном комплексным (над $\mathbb{C}$) пространством. Тогда $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ для некоторого $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ и всех $\boldsymbol{x} \in V$. Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{e} \in V$ образует базис. Тогда (λ) есть матрица оператора f размера 1×1.

   Найдем матрицу A оператора $f_{\mathbb{R}}$ в базисе $\boldsymbol{e}, i\boldsymbol{e}$. Так как

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{e}) = f(\boldsymbol{e}) &= \lambda \boldsymbol{e} = (a + i\,b)\boldsymbol{e} &&= a\boldsymbol{e} + b\,i\boldsymbol{e},\\
f_{\mathbb{R}}(i\boldsymbol{e}) = f(i\boldsymbol{e}) &= i\,f(\boldsymbol{e}) = i(a + i\,b)\boldsymbol{e} &&= -b\boldsymbol{e} + a\,i\boldsymbol{e},
\end{aligned}
$$

   то

$$
A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.
$$

Инвариантные двухмерные подпространства вещественного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ оператор в n-мерном вещественном (над полем $\mathbb{R}$) пространстве V и A матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ пространства V. Пусть $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ есть комплексификация оператора $\mathcal{A}$. Тогда матрица A также является матрицей оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в базисе $\boldsymbol{E}$. Следовательно, $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) = \chi_A(t)$.

Пусть $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ есть комплексный корень (то есть $b \neq 0$) характеристического многочлена $\chi_A(t)$ и $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$ есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ. Тогда

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} + i\mathcal{A}\boldsymbol{y} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (a + i\,b)(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y}) + i(b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\boldsymbol{x} &= a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y}, \\ \mathcal{A}\boldsymbol{y} &= b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Покажем, что вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ линейно независимы. Предположим противное. Тогда $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{z}$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{z} \in V$. Тогда $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} = (\alpha + i\beta)\boldsymbol{z}$ и

$$(\alpha + i\beta)\mathcal{A}\boldsymbol{z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (a + i\,b)(\alpha + i\beta)\boldsymbol{z}.$$

Следовательно, $\mathcal{A}\boldsymbol{z} = (a + i\,b)\boldsymbol{z}$, откуда вытекает, что $b = 0$. Противоречие.

Следовательно, $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ образуют базис в $U = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. Из $(\star)$ вытекает, что U инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$ подпространство V и

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

является матрицей оператора $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$ в базисе $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$. Тогда

$$\chi_{\mathcal{B}}(t) = (a - t)^2 + b^2 = (a + i\,b - t)(a - i\,b - t) = (\lambda - t)(\bar{\lambda} - t).$$

Получаем, что в $U_{\mathbb{C}}$ есть два собственных вектора с собственными значениями λ и $\bar{\lambda}$ оператора $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. Собственный вектор с собственным значением λ — это $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$.

Так как
$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}\boldsymbol{x} - i\mathcal{A}\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y} - i(b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}) = (a - i\,b)(\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}),$$
то вектор $\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ (тогда и $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$) с собственным значением $\bar{\lambda}$.

Подведем итог.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечно мерном вещественном пространстве V, $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ есть комплексный корень $(b \neq 0)$ характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$ есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ. Тогда

- $U = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ *является двухмерным инвариантным подпространством* V;
- *для* $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$, $\operatorname{Sp} \mathcal{B}|_{\mathbb{C}} = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, *вектор* $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ *является собственным вектором оператора* $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ *с собственным значением* λ *и* $\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ *является собственным вектором оператора* $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ *с собственным значением* $\bar{\lambda}$;
- *матрица*
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
является матрицей оператора $\mathcal{B}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.

Следствие

У оператора в конечномерном вещественном пространстве есть либо одномерное либо двухмерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть λ есть некоторый корень (вещественный или комплексный) характеристического многочлена оператора.

Если λ вещественный корень, то линейная оболочка собственного вектора будет одномерным инвариантным подпространством.

Если λ комплексный корень, то из теоремы вытекает, что существует двухмерное инвариантное подпространство. $\square$