# Линейная алгебра и геометрия

## Лекция 7. Единственность жордановой формы нильпотентного оператора. Корневые подпространства. Жорданова форма оператора.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

# Единственность жорданова базис для нильпотентного оператора

В жордановом базисе $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_{11} \leftarrow \boldsymbol{e}_{12} \leftarrow \dots \leftarrow \boldsymbol{e}_{1k_1}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_{m1} \leftarrow \boldsymbol{e}_{m2} \leftarrow \dots \leftarrow \boldsymbol{e}_{mk_m}\}$ матрица нильпотентного оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид, который называется жордановой формой:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k_1 & 1 & 2 & 3 & \dots & k_2 & \dots \dots\dots & 1 & 2 & 3 & \dots & k_m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{matrix} & & & \Large 0 \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & \begin{matrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Блоки называются жордановыми клетками. В каждой клетке первый столбец нулевой, а все остальные столбцы (если они есть) ненулевые. Число клеток (серий) равно числу нулевых столбцов. Остальные столбцы линейно независимы. Значит, число клеток $= \dim V - \operatorname{rank} A$.

При возведении $A$ в квадрат каждая единица либо сдвигается вправо на одну позицию, либо исчезает (если она находится в последнем столбце своей клетки). При этом вторые столбцы всех клеток (размера $\geqslant 2$) становятся нулевыми. Все ненулевые столбцы остаются линейно независимыми. Поэтому $\operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A -$ число клеток размера $\geqslant 2$.

...

При умножении матрицы $A^k$ на $A$ каждая единица либо сдвигается вправо на одну позицию, либо исчезает (если она находится в последнем столбце своей клетки). При этом $(k+1)$-е столбцы всех клеток (размера $\geqslant k+1$) становятся нулевыми. Все ненулевые столбцы остаются линейно независимыми. Поэтому $\operatorname{rank} A^{k+1} = \operatorname{rank} A^k -$ число клеток размера $\geqslant k+1$.

Таким образом, полагая $A^0 = E$, можем написать общую формулу: для каждого натурального $k$

$$\text{число клеток размера} \geqslant k = \operatorname{rank} A^{k-1} - \operatorname{rank} A^k$$

(считаем, что $\operatorname{rank} A^0 = \dim V$), откуда

$$\boxed{\text{число клеток размера } k = \operatorname{rank} A^{k-1} - 2\operatorname{rank} A^k + \operatorname{rank} A^{k+1}}.$$

Вывод: Жорданова форма матрицы нильпотентного оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток на диагонали.

**Теорема (о разложении оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора)**

*Пусть $\mathcal{A}$ оператор в конечномерном пространстве $V$. Тогда*

(1) *оператор $\mathcal{A}$ в раскладывается в прямую сумму нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ и невырожденного оператора $\mathcal{S}$;*

(2) $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \{\boldsymbol{x} \in V : \mathcal{A}^i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *для некоторого* $i\}$;

(3) *если оператор $\mathcal{A}$ вырожденный, то $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$, $m = \dim\operatorname{Dom}\mathcal{N}$ равно алгебраической кратности $0$ и $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$.*

Доказательство. (1) Рассмотрим последовательность $V \underset{\text{lin}}{\supseteq} \operatorname{Im}\mathcal{A} \underset{\text{lin}}{\supseteq} \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \underset{\text{lin}}{\supseteq} \ldots$ . Если $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{i+1} \neq \operatorname{Im}\mathcal{A}^i$, то $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^{i+1} < \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^i$. Значит, для некоторого $k$ имеем $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^k$.

Положим $U = \operatorname{Im}\mathcal{A}^k$. Так как $\mathcal{A}(U) = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^k = U$, то подпространство $U$ инвариантно и оператор $\mathcal{S} = \mathcal{A}|_U$ невырожден.

Положим $W = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$. Подпространство $W$ инвариантно. Так как $\mathcal{A}^k(W) = \{\mathbf{0}\}$, то оператор $\mathcal{N} = \mathcal{A}|_W$ нильпотентен.

Покажем, что $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Предположим противное, то есть $I = U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$. Подпространство $I$ инвариантно как пересечение инвариантных подпространств. Так как $I$ инвариантное подпространство для невырожденного оператора $\mathcal{S} = \mathcal{A}|_U$, то оператор $\mathcal{A}|_I$ невырожден. Так как $I$ инвариантное подпространство для нильпотентного оператора $\mathcal{N} = \mathcal{A}|_W$, то оператор $\mathcal{A}|_I$ нильпотентен. Противоречие, так как любой нильпотентный оператор вырожден.

Подпространства $U$ и $W$ инвариантны, и $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Поскольку $\dim V = \dim U + \dim W$, имеем $V = U \oplus W$, и $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$. При этом $\mathcal{S}$ невырожден и $\mathcal{N}$ нильпотентен.

(2) Так как $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$, то $\mathcal{A}^i = \mathcal{S}^i \oplus \mathcal{N}^i$ и, учитывая, что оператор $\mathcal{S}^i$ невырожден, получаем $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^i = \operatorname{Ker} \mathcal{N}^i \subset \operatorname{Dom} \mathcal{N}$. Так как $\operatorname{Dom} \mathcal{N} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$, то

$$\operatorname{Dom} \mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \mathcal{A}^i = \{\mathbf{x} \in V : \mathcal{A}^i \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ для некоторого } i\}$$

(3) Так как $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$, то $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{S}}(\lambda)\chi_{\mathcal{N}}(\lambda)$. Так как оператор $\mathcal{S}$ невырожден, то $0 \notin \operatorname{Sp} \mathcal{S}$ и $0$ не является корнем многочлена $f(\lambda) = \chi_{\mathcal{S}}(\lambda)$. Так как оператор $\mathcal{N}$ нильпотентен, то, в силу теоремы о характеристическом многочлене нильпотентного оператора, $\chi_{\mathcal{N}}(\lambda) = (-\lambda)^m$, где $m = \dim W$.

Если оператор $\mathcal{A}$ вырожденен, то $m > 0$, $0 \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ и $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = f(\lambda)(-\lambda)^m$, где $f(0) \neq 0$. Следовательно, $m$ равно алгебраической кратности $0$. Из теоремы о характеристическом многочлене нильпотентного оператора вытекает $\mathcal{N}^m = \Theta_W$. Оператор $\mathcal{A}^m = \mathcal{S}^m \oplus \mathcal{N}^m = \mathcal{S}^k \oplus \Theta_W$ раскладывается в прямую сумму невырожденного оператора $\mathcal{S}^m$ и нулевого оператора $\Theta_W$. Следовательно $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^k = W = \operatorname{Dom} \mathcal{N}$. □

# Корневые векторы и подпространства

Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n$ над полем $K$ и $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейный оператор.

**Определение**

Ненулевой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ называется корневым вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим числу $\lambda \in K$, если существует натуральное $m$, для которого $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Наименьшее такое $m$ называется высотой корневого вектора $\boldsymbol{v}$.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — корневой вектор высоты $m$, отвечающий числу $\lambda$. Тогда вектор $\boldsymbol{u} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m-1}\boldsymbol{v}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda$:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{u} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{u} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}.$$

Значит, $\lambda$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$, т.е. корень его характеристического многочлена.

Легко видеть, что все корневые векторы, отвечающие корню $\lambda$, вместе с $\mathbf{0}$ образуют подпространство в $V$.

### Определение

Множество всех корневых векторов, отвечающих корню $\lambda$, называется **корневым подпространством** и обозначается $V^{\lambda}_{\mathcal{A}}$.

Будем писать $V^{\lambda}$ вместо $V^{\lambda}_{\mathcal{A}}$, если из контекста понятно о каком операторе идет речь.

### Замечание

Для любого собственного значения $\lambda$ корневое подпространство $V^{\lambda}$ содержит собственное подпространство $V_{\lambda}$.

**Предложение (о нулевом корневом подпространстве вырожденного оператора)**

*Если* $\mathcal{A}$ *вырожденный оператор, то* $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$, $V^0 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$, *где* $m$ *есть алгебраическая кратность* $0$ *и* $\dim V^0 = m$.

Доказательство. Из теоремы о разложении оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного оператора вытекает, что оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму $\mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$ невырожденного и нильпотентного оператора, при этом $\operatorname{Dom}\mathcal{N} = \{\boldsymbol{x} \in V : \mathcal{A}^i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ для некоторого $i\} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$ и $\dim\operatorname{Dom}\mathcal{N} = m$. Из определения корневого подпространства вытекает $V^0 = \operatorname{Dom}\mathcal{N}$. $\square$

**Теорема (о корневом подпространстве)**

*Для любого собственного значения $\lambda$ корневое подпространство $V^\lambda$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Размерность $m = \dim V^\lambda$ равна алгебраической кратности собственного значения $\lambda$ и $V^\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$. Для $\mathcal{K} = \mathcal{A}|_{V^\lambda}$, $\chi_\mathcal{K}(t) = (\lambda - t)^m$.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{v} \in V^\lambda$ — корневой вектор высоты $k$, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k(\mathcal{A}\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, то есть $\mathcal{A}\boldsymbol{v}$ тоже является корневым вектором высоты $k$.

Положим $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$. Тогда оператор $\mathcal{B}$ вырожден и $0 \in \operatorname{Sp}\mathcal{B}$. Из предложения о нулевом корневом подпространстве вырожденного оператора вытекает, что $V^0_\mathcal{B} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^m$, где $m$ есть алгебраическая кратность $0$ оператора $\mathcal{B}$ и $\dim V^0_\mathcal{B} = m$.

Из определения корневого подпространства вытекает, что $V^\lambda = V^\lambda_\mathcal{A} = V^0_\mathcal{B}$. Так как $\chi_\mathcal{B}(t) = \chi_\mathcal{A}(\lambda + t)$, то $m$ равно алгебраической кратности $\lambda$ оператора $\mathcal{A}$.

Следовательно, $m = \dim V^\lambda_\mathcal{A}$ равна алгебраической кратности собственного значения $\lambda$ оператора $\mathcal{A}$ и $V^\lambda_\mathcal{A} = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$.

Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{B}|_{V^\lambda}$. Оператор $\mathcal{N}$ нильпотентный, из теореме о характеристическом многочлене нильпотентного оператора вытекает $\chi_{\mathcal{N}}(t) = (-t)^m$. Так как $\mathcal{N} = \mathcal{K} - \lambda\mathcal{E}$, то $\chi_{\mathcal{N}}(t) = \chi_{\mathcal{K}}(t+\lambda)$. Тогда $\chi_{\mathcal{K}}(t+\lambda) = (-t)^m$ и, следовательно, $\chi_{\mathcal{K}}(t) = (\lambda - t)^m$. $\square$

**Теорема (о разложении на корневые подпространства)**

*Пусть* $\mathcal{A}$ *оператор в конечномерном пространстве* $V$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *пространство* $V$ *раскладывается в прямую сумму корневых подпространств;*

(2) *характерестический многочлен раскладывается на линейные множители;*

(3) *если* $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $k_i$ *есть алгебраическая кратность собственного значения* $\lambda_i$ *для* $i = 1, \ldots, m$, *то*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \ldots (\lambda_m - \lambda)^{k_m} \quad \text{и}$$

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m}.$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Sp}\mathcal{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$, $k_i$ есть алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_i$ для $i=1,\dots,m$. Тогда

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=f(\lambda)(\lambda_1-\lambda)^{k_1}(\lambda_2-\lambda)^{k_2}\dots(\lambda_m-\lambda)^{k_m}, \tag{i}$$

где $f(\lambda)$ есть некоторый многочлен без корней. Характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$, в силу теоремы Гамильтона–Кэли, является аннулирующим для оператора $\mathcal{A}$. Многочлены $f(\lambda)$, $(\lambda_1-\lambda)^{k_1}$, …, $(\lambda_m-\lambda)^{k_m}$ попарно взаимно просты, поэтому из теоремы о разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму вытекает, что

$$V=\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})\oplus\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})^{k_1}\oplus\dots\oplus\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_m\mathcal{E})^{k_m}$$

и слагаемые в этом разложении инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$. Обозначим $V^*=\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}|_{V^*}$ и $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}}$ для $i=1,\dots,m$. Из теоремы о корневом подпространстве вытекает, что

$$V^{\lambda_i}=\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{k_i},\ \dim V^{\lambda_i}=k_i \text{ и } \chi_{\mathcal{A}_i}(\lambda)=(\lambda_i-\lambda)^{k_i} \text{ для } i=1,\dots,m. \tag{ii}$$

Получаем

$$\begin{gathered} V=V^*\oplus V^{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V^{\lambda_m},\\ \mathcal{A}=\mathcal{A}^*\oplus\mathcal{A}_1\oplus\dots\oplus\mathcal{A}_m. \end{gathered} \tag{iii}$$

Из (iii) вытекает $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}^*}(\lambda)\chi_{\mathcal{A}_1}(\lambda)\dots\chi_{\mathcal{A}_m}(\lambda)$. Из (i) и (ii) вытекает

$$\chi_{\mathcal{A}^*}(\lambda) = f(\lambda). \tag{iv}$$

Импликации (3)⇒(1) и (3)⇒(2) очевидны.

Докажем (1)⇒(3). Из (1) вытекает, что $V^* = \{\mathbf{0}\}$. Тогда $\chi_{\mathcal{A}^*}(\lambda) = 1$. Из (i) и (iv) вытекает (3).

Докажем (2)⇒(1). Из (2) вытекает, что $f(\lambda)$ является константой. Из (iv) вытекает $\chi_{\mathcal{A}^*}(\lambda)$ является константой. Следовательно, $V^* = \{\mathbf{0}\}$. Из (iii) вытекает (1). □

# Жорданова форма оператора

Для любого $\lambda \in K$ и любого натурального $k$ матрица размера $k$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

называется жордановой клеткой порядка $k$ с собственным значением $\lambda$. Для $k = 1$ имеем $J_1(\lambda) = (\lambda)$. Блочно-диагональная матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

называется жордановой матрицей.

Если матрица $A$ линейного оператора $\mathcal{A}$ является жордановой в некотором базисе, то этот базис называется жордановым базисом, а сама матрица $A$ называется жордановой нормальной формой (или просто жордановой формой) матрицы оператора $\mathcal{A}$. Про матрицу $A$ при этом говорят, что она приводится к жордановой форме.

Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ таков, что для некоторого $\lambda \in K$ оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ нильпотентен. Мы видели, что для всякого нильпотентного оператора существует жорданов базис (причём все собственные числа жордановых клеток в его жордановой форме равны нулю). В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k_1 & 1 & 2 & 3 & \dots & k_2 & \dots & \dots\dots & 1 & 2 & 3 & \dots & k_m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{matrix} & & & \mathbf{0} \\ & \begin{matrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \begin{matrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_m}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $k_i$ есть алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_i$ для $i = 1, \ldots, m$. Если у линейного оператора $\mathcal{A}$ характерестический многочлен раскладывается в произведение линейных множителей, то $V$ раскладывается в прямую сумму корневых подпространств:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m}.$$

Все операторы $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}} - \lambda_i \mathcal{E}$ нильпотентны. Для каждого $i \leqslant m$ возьмём жорданов базис $\boldsymbol{E}_i$ оператора $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}}$ в корневом пространстве $V^{\lambda_i}$. Тогда $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{E}_m$ — базис пространства $\boldsymbol{E}$, и в этом базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет жорданову матрицу. Итак,

если характерестический многочлен многочлен линейного оператора в конечномерном векторном пространстве над полем $K$ раскладывается в произведение линейных множителей (в частности, если поле $K$

алгебраически замкнуто), то существует жорданов базис для этого оператора.

Пусть $l_i$ геометрическая кратность собственного значения $\lambda_i$. Тогда $l_i$ равно количеству жордановых клеток оператора $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}} - \lambda_i \mathcal{E}$. У операторов $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}} - \lambda_i \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}}$ жордановы базисы и количество жордановых клеток совпадают. Следовательно, $l_i$ равно количеству жордановых клеток оператора $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}}$. Пусть $k_{i1}, \ldots, k_{il_i}$ — размеры жордановых клеток в базисе жордановом базисе $\boldsymbol{E}_i$. Из вида жордановой матрицы понятно, что жорданова матрица $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}}$ состоит из клеток $J_{k_{i1}}(\lambda_i), \ldots, J_{k_{il_i}}(\lambda_i)$.

$$A = \begin{pmatrix}
J_{k_{11}}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & J_{k_{12}}(\lambda_1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & J_{k_{1l_1}}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & J_{k_{21}}(\lambda_2) & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & J_{k_{2l_2}}(\lambda_2) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{k_{m1}}(\lambda_m) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{k_{ml_m}}(\lambda_m)
\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & & & 0 & & & & & & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \\
0 & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & \lambda_1 & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & \lambda_i & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & \lambda_i & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \lambda_i & & & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & & & \lambda_m & 1 & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
0 & & & & & & & & & & & 0 & & & \lambda_m & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \lambda_m
\end{pmatrix}$$

### Замечание

Для любых натуральных $r$ и $s$ и любых различных $\mu, \lambda \in K$ $(J_r(\lambda) - \mu E)^s$ — верхнетреугольная матрица с диагональными элементами $(\lambda - \mu)^s$ и $(J_r(\lambda) - \lambda E)^r = \Theta$.

Для любого $r$ и любого $i \leqslant k$ матрица $(A - \lambda_i E)^r$ имеет блочно-диагональный вид с блоками $J_{k_{js}}(\lambda_j - \lambda_i)^r$. Все такие блоки с $j \neq i$ невырождены, а блоки $J_{k_{is}}(\lambda_i - \lambda_i)^r$ вырождены и при $k_{is} \leqslant r$ равны $\Theta$.

$$(A - \lambda_i E)^r =$$

$$= \begin{pmatrix}
J_{k_{11}}(\lambda_1-\lambda_i)^r & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & J_{k_{1m_1}}(\lambda_1-\lambda_i)^r & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{k_{i1}}(0)^r & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{k_{im_2}}(0)^r & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{k_{k1}}(\lambda_k-\lambda_i)^r & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{k_{km_k}}(\lambda_k-\lambda_i)^r
\end{pmatrix}$$

Отсюда и из формулы для числа жордановых клеток данного размера у нильпотентного оператора вытекает такое утверждение:

**Теорема**

*Если матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ приводится к жордановой форме, то эта форма определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на диагонали. А именно, для любого $\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$ и любого натурального $k$*

$$\boxed{\textit{число клеток } J_k(\lambda) = \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k-1} - 2\operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k} + \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k+1}}$$

(ранг оператора $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^0$ полагается равным нулю).