Линейная алгебра и геометрия

Лекция 6. Теорема Гамильтона–Кэли. Нильпотентный оператор.

Существование жордановой формы для нильпотентный оператора.

Характеристический многочлен нильпотентного оператора.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Теорема Гамильтона–Кэли

Теорема Гамильтона–Кэли

Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном векторном пространстве V характеристический многочлен является аннулирующим.

Докажем сначала частный случай теоремы Гамильтона–Кэли.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{x} \in V$ и $\langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \ldots \rangle = V$. Тогда для $\mathcal{A}$ выполняется теорема Гамильтона–Кэли, то есть $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \Theta$.

Доказательство. Пусть $n = \dim V$.

Покажем, что система векторов $\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$ является базисом в V. Положим

$$k = \max\{j : \text{ вектора } \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \ldots, \mathcal{A}^j\boldsymbol{x} \text{ линейно независимы}\}.$$

Так как $\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \dots, \mathcal{A}^k\boldsymbol{x}$ линейно независимы, а вектора $\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \dots, \mathcal{A}^{k+1}\boldsymbol{x}$ линейно зависимы, то $\mathcal{A}^{k+1}\boldsymbol{x} \in U = \langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \dots, \mathcal{A}^k\boldsymbol{x} \rangle$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{A}^i\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}^{i+1}\boldsymbol{x} \in U$ для $i = 0, \dots, k$. Следовательно, U инвариантное подпространство V. Тогда $\mathcal{A}^i\boldsymbol{x} \in U$ для любого натурального i и, следовательно, $U = \langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \dots \rangle = V$. Тогда $\dim U = n$ и $k = n - 1$. Получаем, система векторов $\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$ линейна независима и полна в V.

Разложим вектор $\mathcal{A}^n\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\boldsymbol{x}\}$:

$$\mathcal{A}^n\boldsymbol{x} = b_0\boldsymbol{x} + b_1\mathcal{A}\boldsymbol{x} + \dots + b_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}\boldsymbol{x}.$$

Положим

$$f(x) = x^n - b_{n-1}x^{n-1} - \dots - b_1 x - b_0.$$

Тогда $f(\mathcal{A})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Так как

$$f(\mathcal{A})(\mathcal{A}^i\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}^i(f(\mathcal{A})(\boldsymbol{x})) = \mathcal{A}^i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

для всех i, то $f(\mathcal{A}) = \Theta$. Для завершения доказательства достаточно показать, что $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-1)^n f(\lambda)$.

Выпишем матрицу $A_{b_0\ldots b_{n-1}}$ оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{E}$:

$$A_{b_0\ldots b_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A_{b_0\ldots b_{n-1}} - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & b_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Индукцией по n докажем

$$\det(A_{b_0\ldots b_{n-1}} - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n - b_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - b_1\lambda - b_0). \qquad (\star)$$

Разложим определитель матрицы $A_{b_0\dots b_{n-1}} - \lambda E$ по верхней строчке:
$\det(A_{b_0\dots b_{n-1}} - \lambda E) =$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} + (-1)^n b_0 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \det(A_{b_1\dots b_{n-1}} - \lambda E) + (-1)^n b_0$$

$$= -\lambda(-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} - b_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - b_2\lambda - b_1) + (-1)^n b_0$$

$$= (-1)^n(\lambda^n - b_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - b_1\lambda - b_0).$$

Формула $(\star)$ доказана. Из $(\star)$ вытекает $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-1)^n f(\lambda)$. $\square$

Доказательство теоремы Гамильтона–Кэли. Пусть $\boldsymbol{x} \in V$. Нам достаточно доказать, что $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Положим $U = \langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^2\boldsymbol{x}, \ldots \rangle$ и $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$. Из доказанного предложения вытекает $\chi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \Theta$. Следовательно, $\chi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\boldsymbol{x} = \chi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Из предложения о характерестическом многочлене оператора, ограниченного на инвариантном подпространстве, вытекает, что $\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ делит $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$, то есть $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = g(\lambda)\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ для некоторого многочлена $g(\lambda)$. Следовательно

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\boldsymbol{x} = g(\mathcal{A})\chi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\boldsymbol{x} = g(\mathcal{A})\big(\chi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\boldsymbol{x}\big) = g(\mathcal{A})\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

Нильпотентные операторы

Определение

Оператор $\mathcal{A}$ называется нильпотентным, если $\mathcal{A}^h = \Theta$ для некоторого натурального h. Минимальное натуральное число h, для которого $\mathcal{A}^h = \Theta$, называется высотой (или ступенью нильпотентности) оператора $\mathcal{A}$.

Всюду в этом разделе V — конечномерное векторное пространство и $\mathcal{A}$ — нильпотентный оператор в V высоты $h > 0$.

Существование жорданова базис для нильпотентного оператора

Назовём серией конечную последовательность ненулевых векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k \in V$ такую, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_{i-1}$ для $i > 1$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathcal{A}} \boldsymbol{u}_1 \xleftarrow{\mathcal{A}} \boldsymbol{u}_2 \xleftarrow{\mathcal{A}} \dots \xleftarrow{\mathcal{A}} \boldsymbol{u}_k.$$

Вектор $\boldsymbol{u}_1$ — *первый член* серии, $\boldsymbol{u}_k$ — *последний член*, и число k — *длина* серии. Ясно, что $k \leqslant p$. Базис пространства V называется жордановым для оператора $\mathcal{A}$, если он распадается в серии.

Теорема

Для любого нильпотентного оператора в конечномерном пространстве существует жорданов базис.

Лемма 1

Высота h оператора $\mathcal{A}$ равна наибольшей из длин серий.

Доказательство. Если имеется серия длины k, то $\mathcal{A}^{k-1} \neq \Theta \implies h > k - 1$.

С другой стороны, $\mathcal{A}^{h-1} \neq \Theta \implies \exists\ \boldsymbol{u}_h \in V$, для которого $\mathcal{A}^{h-1}\boldsymbol{u}_h \neq \mathbf{0}$. Серия $\boldsymbol{u}_1 = \mathcal{A}^{h-1}\boldsymbol{u}_h \longleftarrow \boldsymbol{u}_2 = \mathcal{A}^{h-2}\boldsymbol{u}_{h_1} \longleftarrow \dots \longleftarrow \boldsymbol{u}_{h-1} = \mathcal{A}\boldsymbol{u}_h \longleftarrow \boldsymbol{u}_h$ имеет длину h. □

Лемма 2

Векторы, составляющие серию, линейно независимы.

Доказательство. Индукция по длине серии k. Если $k = 1$, доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и для меньших k утверждение верно.

Пусть $\boldsymbol{u}_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{u}_k$ — серия, и пусть $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}$. Применим $\mathcal{A}$:

$$\lambda_1 \mathcal{A} \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \mathcal{A} \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \mathcal{A} \boldsymbol{u}_{k-1} + \lambda_k \mathcal{A} \boldsymbol{u}_k = \mathcal{A}\mathbf{0},$$

откуда $\lambda_2 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{u}_{k-1} = \mathbf{0}$. По индуктивному предположению $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Поскольку $\boldsymbol{u}_1 \neq \mathbf{0}$ и $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}$, имеем $\lambda_1 = 0$. □

Лемма 3

Система векторов, распадающаяся на непересекающиеся серии, линейно независима $\iff$ *линейно независима система первых векторов этих серий.*

Доказательство. Пусть данная система состоит из серий

$$\boldsymbol{u}_{11} \leftarrow \boldsymbol{u}_{12} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{u}_{1k_1}, \quad \boldsymbol{u}_{21} \leftarrow \boldsymbol{u}_{22} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{u}_{2k_2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{u}_{m1} \leftarrow \boldsymbol{u}_{m2} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{u}_{mk_m}.$$

Если она линейно независима, то линейна независима и её часть, состоящая из первых векторов.

Обратную импликацию будем доказывать индукцией по максимальной длине k серий в системе (т.е. по $k = \max_{i \leqslant m} k_i$). Если $k = 1$, то система целиком состоит из первых векторов. Предположим, что $k > 1$ и для меньших k утверждение верно.

Пусть

$$\lambda_{11}\boldsymbol{u}_{11} + \lambda_{12}\boldsymbol{u}_{12} + \cdots + \lambda_{1k_1}\boldsymbol{u}_{1k_1} + \cdots + \lambda_{m1}\boldsymbol{u}_{m1} + \lambda_{m2}\boldsymbol{u}_{m2} + \cdots + \lambda_{mk_m}\boldsymbol{u}_{mk_m} = \boldsymbol{0}.$$

Применим оператор $\mathcal{A}$:

$$\lambda_{11}\mathcal{A}\boldsymbol{u}_{11} + \lambda_{12}\mathcal{A}\boldsymbol{u}_{12} \cdots + \lambda_{1k_1}\mathcal{A}\boldsymbol{u}_{1k_1} + \cdots + \lambda_{m1}\mathcal{A}\boldsymbol{u}_{m1} + \lambda_{m2}\mathcal{A}\boldsymbol{u}_{m2} + \cdots + \lambda_{mk_m}\mathcal{A}\boldsymbol{u}_{mk_m} =$$

$$= \lambda_{12}\boldsymbol{u}_{11} + \cdots + \lambda_{1k_1}\boldsymbol{u}_{1\,k_1-1} + \cdots + \lambda_{m2}\boldsymbol{u}_{m1} + \cdots + \lambda_{mk_m}\boldsymbol{u}_{m\,k_m-1} = \boldsymbol{0}.$$

Каждая серия стала короче. По индуктивному предположению $\lambda_{12} = \cdots = \lambda_{1k_1} = \cdots = \lambda_{m2} = \cdots = \lambda_{mk_m} = 0$. Исходная линейная комбинация принимает вид

$$\lambda_{11}\boldsymbol{u}_{11} + \cdots + \lambda_{m1}\boldsymbol{u}_{m1} = \boldsymbol{0}.$$

Первые векторы серий линейно независимы $\Longrightarrow$ $\lambda_{11} = \cdots = \lambda_{m1} = 0$. $\square$

Доказательство теоремы. Индукция по высоте оператора h. Если $h = 1$, то $\mathcal{A} = \Theta$ и годится любой базис. Пусть $h > 1$ и для меньших h утверждение верно.

Подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subset V$ инвариантно, и высота ограничения $\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}$ равна $h-1$. По индуктивному предположению для $\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}$ существует жорданов базис

$$\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_{11} \leftarrow \boldsymbol{e}_{12} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{e}_{1k_1},\ \ \boldsymbol{e}_{21} \leftarrow \boldsymbol{e}_{22} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{e}_{2k_2},\ \ \ldots,\ \ \boldsymbol{e}_{m1} \leftarrow \boldsymbol{e}_{m2} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{e}_{mk_m}\}.$$

Первые векторы серий из базиса составляют базис пересечения $\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Действительно, ясно, что они линейно независимы. Все они принадлежат $\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, а значит, $\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ содержит их линейную оболочку. С другой стороны, если $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \setminus \langle\{\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{21}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m1}\}\rangle$, то в разложении $\boldsymbol{u}$ по базису $\boldsymbol{E}$ коэффициент при хотя бы одном векторе $\boldsymbol{e}_{rs}$, где $r \leqslant m$ и $1 < s \leqslant k_s$, окажется ненулевым:

$$\boldsymbol{u} = u_{11}\boldsymbol{e}_{11} + u_{12}\boldsymbol{e}_{12} + \cdots + u_{1k_1}\boldsymbol{e}_{1k_1} + \cdots + u_{r\,s-1}\boldsymbol{e}_{r\,s-1} + u_{rs}\boldsymbol{e}_{rs} + \cdots + u_{mk_m}\boldsymbol{e}_{mk_m}.$$

Поскольку

$$\mathcal{A}\boldsymbol{u} = u_{12}\boldsymbol{e}_{11} + u_{13}\boldsymbol{e}_{12} + \cdots + u_{1k_1}\boldsymbol{e}_{1\,k_1-1} + \cdots + u_{rs}\boldsymbol{e}_{r\,s-1} + \cdots + u_{mk_m}\boldsymbol{e}_{m\,k_m-1},$$

$u_{rs}\boldsymbol{e}_{r\,s-1} \neq \boldsymbol{0}$ и вектор $\boldsymbol{e}_{r\,s-1}$ не выражается через остальные, видим, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, т.е. $\boldsymbol{u} \notin \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Следовательно, $\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ содержится в линейной оболочке первых векторов серий, а значит, совпадает с ней.

Дополним линейно независимую систему $\{\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m1}\}$ до базиса $\boldsymbol{E}'$ в $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, добавив векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_l$. Каждый из них образует серию длины 1.

Пусть $\boldsymbol{e}_{1k_1} = \mathcal{A}\boldsymbol{e}_{1\,k_1+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{mk_m} = \mathcal{A}\boldsymbol{e}_{m\,k_m+1}$. Имеем набор серий

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'' = \{\boldsymbol{e}_1, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_l, \quad & \boldsymbol{e}_{11} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{e}_{1k_1} \leftarrow \boldsymbol{e}_{1\,k_1+1}, \\ & \boldsymbol{e}_{21} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{e}_{2k_2} \leftarrow \boldsymbol{e}_{2\,k_2+1}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_{m1} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{e}_{mk_m} \leftarrow \boldsymbol{e}_{m\,k_m+1}\}.\end{aligned}$$

По лемме 3 векторы в этом наборе линейно независимы. Покажем, что любой вектор $\boldsymbol{w} \in V$ выражается через них.

Вектор $\mathcal{A}\boldsymbol{w}$ принадлежит $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и потому разлагается по базису $\boldsymbol{E}$:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{w} = w_{11}\boldsymbol{e}_{11} + \cdots + w_{1k_1}\boldsymbol{e}_{1k_1} + \cdots + w_{m1}\boldsymbol{e}_{11} + \cdots + w_{1k_1}\boldsymbol{e}_{1k_1}.$$

Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{w}_1 = w_{11}\boldsymbol{e}_{12} + \cdots + w_{1k_1}\boldsymbol{e}_{1\,k_1+1} + \cdots + w_{m1}\boldsymbol{e}_{12} + \cdots + w_{mk_m}\boldsymbol{e}_{m\,k_m+1}.$$

Имеем $\mathcal{A}\boldsymbol{w}_1 = \mathcal{A}\boldsymbol{w}$. Следовательно, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_1 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, а значит, $\boldsymbol{w}_2$ выражается через векторы из базиса ядра $\boldsymbol{E}'$. Вспомнив, что $\boldsymbol{w}_1$ выражается через векторы из $\boldsymbol{E}''$, видим, что $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ выражается через векторы из $\boldsymbol{E}''$. $\square$

Характеристический многочлен нильпотентного оператора

Теорема (о характеристическом многочлене нильпотентного оператора)

Оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном пространстве V является нильпотентным если и только если $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) У нильпотентного оператора существует жорданова форма и она представляет собой верхнетреугольную матрицу с нулями на диагонали. Следовательно, $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n$.
($\Leftarrow$) Если $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n$, то из теоремы Гамильтона–Кэли вытекает $(-\mathcal{A})^n = \Theta$ и, следовательно, $\mathcal{A}^n = \Theta$. $\square$