Линейная алгебра и геометрия

Лекция 5. Операторы. Инвариантные подпространства. Собственные вектора и собственные подпространства. Характеристический многочлен. Диагонализируемые операторы.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Линейные операторы

Определение

Линейный оператор в векторном пространстве V — это любое линейное отображение $f\colon V \to V$.

При определении матрицы линейного оператора в области определения и образе, как правило, берётся один и тот же базис.

Пусть V — конечномерное векторное пространство с базисом $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Матрица линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ в базисе $\boldsymbol{E}$ — это квадратная матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$, которая определяется равенством

$$\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i.$$

В j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Как и любое линейное отображение, всякий линейный оператор $A\colon V \to V$ однозначно определяется образами базисных векторов пространства V, которые могут быть любыми. Всякая квадратная матрица порядка n является матрицей некоторого линейного оператора в данном базисе.

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ — частный случай линейного отображения, его матрица A в базисе $\boldsymbol{E}$ связывает координаты векторов и их образов в этом базисе точно так же, как и в общем случае: для любого вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ из пространства V и его образа $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$ имеем

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}.$$

Когда базис в пространстве V фиксирован и векторы отождествляются со столбцами их координат в этом базисе, пишут просто $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

В случае оператора формула преобразования матрицы при замене базиса имеет тот же вид, что и в случае общего линейного отображения: если V — конечномерное пространство, $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ — два базиса в нём, $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейный оператор, который имеет матрицу A в базисе $\boldsymbol{E}$ и матрицу A' в базисе $\boldsymbol{E}'$, а T — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$, то

$$\boxed{A' = T^{-1}AT}.$$

Определение

Говорят, что квадратные матрицы A и B с коэффициентами из поля K подобны (над полем K), если существует невырожденная матрица C с коэффициентами из K, для которой $\boxed{A = C^{-1}BC}$.

Теорема

Пусть V — векторное пространство конечной размерности n.

Квадратные матрицы A и B порядка n подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора $V \to V$ в некоторых базисах пространства V.

Доказательство. *Достаточность* немедленно следует из формулы преобразования матрицы оператора при замене базиса: $A' = T^{-1}AT$.

Необходимость вытекает из той же формулы преобразования матрицы, а также того, что любая квадратная матрица порядка n является матрицей некоторого оператора $V \to V$ в любом данном базисе, и что любая невырожденная матрица является матрицей перехода от некоторого базиса пространства V к некоторому другому базису. □

Мы будем называть любую характеристику матриц, которая сохраняется преобразованием подобия, т.е. отображением матриц $A \mapsto C^{-1}AC$ для любой невырожденной матрицы C, матричным инвариантом (примеры — определитель и ранг). Любую характеристику операторов в векторном пространстве, не зависящую от выбора базиса в этом пространстве, будем называть инвариантом оператора. Любой инвариант матрицы оператора (в частности, её определитель и ранг) является инвариантом оператора.

Размерность подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ пространства V называется рангом оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{rank}\mathcal{A}$. В силу доказанного в разделе о линейных отображениях равенства $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{rank} A$ (где A — матрица оператора $\mathcal{A}$) имеем

$$\boxed{\operatorname{rank}\mathcal{A} = \operatorname{rank} A}.$$

Таким образом, ранг оператора — это просто ранг его матрицы (в любом базисе).

Определителем оператора $\mathcal{A}$ называется определитель его матрицы в любом базисе.

Ранг и определитель — инварианты оператора.

Алгебра линейных операторов

Алгебра над полем K — это четвёрка $(A, +, \times, \cdot)$, где $+ \colon A \times A \to A$ — операция сложения элементов A (сумма $+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ обозначается $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$), $\times \colon A \times A \to A$ — операция умножения элементов A (произведение $\times(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ обозначается $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$) и $\cdot \colon K \times A \to A$ — операция умножения элементов A на числа из K (произведение $\cdot(\boldsymbol{x}, \lambda)$ обозначается $\lambda \boldsymbol{x}$), обладающие следующими свойствами:

1. $(V, +, \cdot)$ — векторное пространство над полем K;
2. для любых $\lambda \in K$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ умножение $\times \colon A \times A \to A$ *билинейно*, т.е. для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in A$ и $\lambda, \mu \in K$ выполняются условия
   - $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}$,
   - $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}$,
   - $(\lambda \boldsymbol{x}) \times (\mu \boldsymbol{y}) = (\lambda \cdot \mu)(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$.

Элементами алгебры $(A, +, \times, \cdot)$ считаются элементы множества A. Вместо $(A, +, \times, \cdot)$ пишут просто A.

Если в алгебре A имеется *единица*, т.е. элемент $\boldsymbol{e} \in A$ такой, что $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}$ для любого $\boldsymbol{x} \in A$, то A называется алгеброй с единицей.

Упражнение

1. Покажите, что условие ❷ в определении алгебры равносильно условию
   ❷′ для любых $\lambda \in K$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ $\quad (\lambda \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \times (\lambda \boldsymbol{y})$.
2. Пусть K — поле и $(R, +, \times)$ — кольцо с единицей. Предположим, что существует сохраняющий единицу гомоморфизм колец $f : K \to R$, образ которого $f(K)$ содержится в центре кольца R (центр — это множество элементов, коммутирующих по умножению со всеми остальными элементами). Для $\lambda \in K$ и $\boldsymbol{x} \in R$ положим $\lambda \boldsymbol{x} = f(\lambda) \times \boldsymbol{x}$. Тем самым определена операция $\cdot : R \times K \to R$: для $\lambda \in K$ и $\boldsymbol{x} \in R$ полагаем $\cdot(\boldsymbol{x}, \lambda) = \lambda \boldsymbol{x}$.
   - Проверьте, что $(R, +, \times, \cdot)$ — алгебра с единицей над полем K.
   - Заметьте, что любая алгебра с единицей $(A, +, \times, \cdot)$ получается таким способом из кольца $(A, +, \times)$.

Обозначение

Множество всех линейных операторов в векторном пространстве V обозначается через $\operatorname{End} V$.

На множестве $\operatorname{End} V$ всех линейных операторов в векторном пространстве V над полем K имеются алгебраические операции: *произведение* операторов — композиция $\circ$:

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\boldsymbol{v} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{v}) \quad \text{для } \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{End} V \text{ и } \boldsymbol{v} \in V,$$

сумма и умножение на число поточечные:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{v} + \mathcal{B}\boldsymbol{v} \quad \text{и} \quad (\lambda\mathcal{A})\boldsymbol{v} = \mathcal{A}(\lambda\boldsymbol{v}) \quad \text{для } \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{End} V,\ \boldsymbol{v} \in V \text{ и } \lambda \in K.$$

Множество $\operatorname{End} V$ с этими операциями является (ассоциативной) алгеброй с единицей. Единица — *тождественный* оператор $\mathcal{E}$, ноль — *нулевой* оператор Θ ($\mathcal{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $\Theta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ для всех $\boldsymbol{x} \in V$).

Упражнение

Докажите, что оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ *идемпотентный*, т.е. $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$, если и только если $\mathcal{A}$ является проектированием на некоторое подпространство.

Множество $M_n(K)$ всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля K тоже является алгеброй с единицей.

Две алгебры A и A' над одним и тем же полем K изоморфны, если существует биекция $\varphi\colon A \rightleftarrows A'$, сохраняющая все операции, т.е. такая, что $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ $\forall\, x, y \in A$, $\lambda \in K$.

Теорема

Для любого n-мерного векторного пространства V над полем K алгебры $\operatorname{End} V$ и $M_n(K)$ изоморфны.

Доказательство. Зафиксируем базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в пространстве V. Пусть $\varphi\colon \operatorname{End} V \to M_n(K)$ — отображение, которое каждому линейному оператору $\mathcal{A}$ ставит в соответствие его матрицу A в базисе $\boldsymbol{E}$. Это биекция.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{End} V$ и $\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, и пусть $\varphi(\mathcal{A}) = A = (a_{ij})$, $\varphi(\mathcal{B}) = B = (b_{ij})$ и $\varphi(\mathcal{C}) = C = (c_{ij})$. Тогда для любого $k \leqslant n$ имеем

$$\mathcal{C}\boldsymbol{e}_k = (\mathcal{A}\mathcal{B})\boldsymbol{e}_k = \mathcal{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\Big)\boldsymbol{e}_i.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{C}\boldsymbol{e}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\boldsymbol{e}_i.$$

В силу единственности разложения вектора по базису получаем $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, т.е. $C = AB$. Таким образом, $\varphi(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{B})\varphi(\mathcal{B})$. Аналогично проверяется, что $\varphi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{B}) + \varphi(\mathcal{B})$ и $\varphi(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\varphi(\mathcal{A})$. □

Следствие

Для любого конечномерного векторного пространства V *над полем* K

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2.$$

Замечание

Линейный оператор $\mathcal{B}$ является обратным к оператору $\mathcal{A}$ относительно умножения в алгебре $\operatorname{End} V$ тогда и только тогда, когда операторы $\mathcal{A}$ и B взаимно обратны как отображения. Обозначение: $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

Не для всякого линейного оператора существует обратный: например, у проектирования на собственное подпространство обратного нет. Оператор, у которого есть обратный (т.е. биективный), называется невырожденным.

Замечание

Оператор $\mathcal{A}$ невырожден $\iff$ выполнено любое из равносильных условий

- $\det \mathcal{A} \neq 0$,
- $\mathcal{A}$ инъективен и сюръективен,
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$,
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$,
- $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$.

Инвариантные подпространства, разложение оператора в сумму операторов

Определение

Подпространство U векторного пространства V называется инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}: V \to V$, если $\mathcal{A}U \subset U$, т.е. $\mathcal{A}\boldsymbol{u} \in U$ для любого вектора $\boldsymbol{u} \in U$.

Ограничение $\mathcal{A}|_U$ линейного оператора $\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство U является линейным оператором в U.

Замечание

1. Подпространства $\{\mathbf{0}\}$ и V инвариантны всегда.
2. Образ и прообраз инвариантного подпространства являются инвариантными подпространствами.
3. Для любого оператора $\mathcal{A}$ подпространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ инвариантны.
4. Для любого оператора $\mathcal{A}$ и для любого многочлена f любое инвариантное подпространство U оператора $\mathcal{A}$ является инвариантным подпространством для $f(\mathcal{A})$.

Пусть $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ и каждое V_i является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$. Положим $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$. Тогда $\boldsymbol{x} \in V$ однозначно представляется как

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m, \text{ где } \boldsymbol{x}_i \in V_i \text{ для } i = 1, \ldots, m$$

и

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \mathcal{A}_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \mathcal{A}_m\boldsymbol{x}_m.$$

В этом случае говорят, что оператор $\mathcal{A}$ является прямой суммой операторов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ и этот факт записывается как

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_m.$$

Если $\boldsymbol{E}_i = \{\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ik_i}\}$ базис пространства V_i и

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k_i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_i1} & a_{k_i2} & \ldots & a_{k_ik_i} \end{pmatrix}$$

матрица оператора $\mathcal{A}_i$ в этом базисе, то матрица A оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \text{\Huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Huge 0} & & A_{m-1} & \\ & & & & A_m \end{pmatrix},$$

в базисе $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{E}_m$.

Обратно, если в некотором базисе $\boldsymbol{E}$ матрица оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ имеет блочно-диагональный вид с диагональными блоками $A_1, \ldots, A_m$, то V раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств $V_1, \ldots, V_m$ таких, что для каждого $i \leqslant m$ A_i — матрица ограничения $\mathcal{A}|_{V_i}$ и базис $\boldsymbol{E}$ составлен из базисов подпространств U_i.

Разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму

Многочлены от операторов

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in K[x]$ — многочлен с коэффициентами из поля K и $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. Тогда определён оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_0\mathcal{E} + a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{A}^2 + \cdots + a_m\mathcal{A}^m.$$

Если пространство V конечномерно и A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе, то оператор $f(\mathcal{A})$ имеет в этом базисе матрицу

$$f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m.$$

Замечание

Для любого оператора $\mathcal{A}$ и любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ операторы $f(\mathcal{A})$ и $g(\mathcal{A})$ (так же как и их матрицы) коммутируют: $f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})$. То есть

$$f(\mathcal{A})\big(g(\mathcal{A})(\boldsymbol{x})\big) = g(\mathcal{A})\big(f(\mathcal{A})(\boldsymbol{x})\big)$$

для любого $\boldsymbol{x} \in V$.

Определение

Ненулевой многочлен $f(x) \in K[x]$ называется аннулирующим многочленом для линейного оператора $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \Theta$. Аналогично определяется аннулирующий многочлен для матрицы.

Предложение

Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном векторном пространстве V существует аннулирующий многочлен.

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Рассмотрим операторы $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^{n^2}$. Некоторая их нетривиальная линейная комбинация $a_0\mathcal{E} + a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{A}^2 + \cdots + a_{n^2}\mathcal{A}^{n^2}$ равна нулевому оператору Θ, потому что $\dim \operatorname{End} V = n^2$. Многочлен $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n^2}x^{n^2}$ является аннулирующим для $\mathcal{A}$. $\square$

Упражнение

Покажите, что если A — верхнетреугольная (диагональная) матрица порядка n с диагональными элементами $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, то матрица $f(A)$ тоже верхнетреугольная (диагональная) и имеет диагональные элементы $f(a_{11})$, $f(a_{22})$, …, $f(a_{nn})$:

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ 0 & a_{22} & & \ast & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1\,n-1} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{11}) & & & & \\ 0 & f(a_{22}) & & \ast & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & f(a_{n-1\,n-1}) & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f(a_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ *— линейный оператор в векторном пространстве* V, $f(x)$ *— аннулирующий многочлен для* $\mathcal{A}$ *и* $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ *для взаимно простых многочленов* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$. *Тогда* $\mathcal{A}$ *раскладывается в прямую сумму операторов* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *таких, что* $f_1(\mathcal{A}_1) = \Theta$ *и* $f_2(\mathcal{A}_2) = \Theta$. *Кроме того,*

$$\mathrm{Dom}\,\mathcal{A}_1 = \ker f_1(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\, f_2(\mathcal{A}), \qquad \mathrm{Dom}\,\mathcal{A}_2 = \ker f_2(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\, f_1(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Поскольку $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно просты, существуют многочлены $g_1(x)$ и $g_2(x)$, для которых $g_1(x) \cdot f_1(x) + g_2(x) \cdot f_2(x) = 1$, т.е. $g_1(\mathcal{A}) \cdot f_1(\mathcal{A}) + g_2(\mathcal{A}) \cdot f_2(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. Для любого $\boldsymbol{x} \in V$ имеем

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = f_1(\mathcal{A})(g_1(\mathcal{A})\boldsymbol{x}) + f_2(\mathcal{A})(g_2(\mathcal{A})\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, f_1(\mathcal{A}) + \mathrm{Im}\, f_2(\mathcal{A}).$$

Значит, $V = \mathrm{Im}\, f_1(\mathcal{A}) + \mathrm{Im}\, f_2(\mathcal{A})$.

Поскольку $f(\mathcal{A}) = f_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A}) = f_2(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A}) = \Theta$, имеем $\mathrm{Im}\, f_1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ker}\, f_2(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Im}\, f_2(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ker}\, f_1(\mathcal{A})$.

Значит, $V = \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$. Эта сумма прямая: если $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$, то

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{E}\boldsymbol{x} = g_1(\mathcal{A})(f_1(\mathcal{A})\boldsymbol{x}) + g_2(\mathcal{A})(f_2(\mathcal{A})\boldsymbol{x}) = g_1(\mathcal{A})\mathbf{0} + g_2(\mathcal{A})\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Итак, $V = \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$. Подпространства $\operatorname{Ker} f_i(\mathcal{A})$ инвариантны: если $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f_i(\mathcal{A})$, то $\mathcal{A}\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f_i(\mathcal{A})$, так как $f_i(\mathcal{A})\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \mathcal{A}f_i(\mathcal{A})\boldsymbol{x} = \mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Положим

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})}, \qquad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}|_{\operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})}.$$

Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, $f_1(\mathcal{A}_1) = \Theta$ и $f_2(\mathcal{A}_2) = \Theta$. Так как $V = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}) + \operatorname{Im} f_2(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$, $\operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$ и $\operatorname{Im} f_2(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})$, то

$$\operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A}), \qquad \operatorname{Im} f_2(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}).$$

□

Теорема (о разложение оператора с аннулирующим многочленом в прямую сумму)

Пусть $\mathcal{A}$ *— линейный оператор в векторном пространстве* V, $f(x)$ *— аннулирующий многочлен для* $\mathcal{A}$ *и* $f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)$, *где многочлены* $f_i(x)$ *и* $f_j(x)$ *взаимно просты для различных* i *и* j. *Тогда* $\mathcal{A}$ *раскладывается в прямую сумму операторов* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m$ *таких, что* $f_i(\mathcal{A}_i) = \Theta$ *и*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{A}_i = \ker f_i(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_1(\mathcal{A}) f_2(\mathcal{A}) \dots f_{i-1}(\mathcal{A}) f_{i+1}(\mathcal{A}) \dots f_m(\mathcal{A})$$

для $i = 1, 2, \dots, m$.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по m. Для $m = 2$ теорема вытекает из предложения. Пусть $m > 2$.

Пусть $i \in \{1, \dots, m\}$. Положим $g_i(x) = f(x)/f_i(x)$. Так как многочлены $f_i(x)$ и $g_i(x)$ взаимно просты и $f(x) = f_i(x) g_i(x)$, то из предложения вытекает, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i \oplus \mathcal{B}_i$, где $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{\operatorname{Ker} f_i(\mathcal{A})}$ и $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}|_{\operatorname{Ker} g_i(\mathcal{A})}$. Кроме того, $\operatorname{Ker} f_i(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} g_i(\mathcal{A})$ и $\operatorname{Ker} g_i(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} f_i(\mathcal{A})$.

Покажем что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_m$. Из предположения индукции вытекает, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_{m-1}$. Осталось заметить, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_m \oplus \mathcal{A}_m$. $\square$

Собственные векторы. Характеристический многочлен

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем K. Вектор $\boldsymbol{v} \in V$ называется собственным вектором линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$, если $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ для некоторого числа $\lambda \in K$. При этом λ называется собственным значением, отвечающим собственному вектору $\boldsymbol{v}$.

Множество собственных значений линейного оператора называется спектром этого оператора и обозначается как $\mathsf{Sp}\,\mathcal{A}$.

Пример

Пусть $V = U \oplus W$ и $\mathcal{A}$ — проектирование на подпространство U параллельно W. Собственными векторами оператора $\mathcal{A}$ являются все ненулевые векторы $\boldsymbol{u} \in U$ (им всем отвечает собственное значение 1) и все ненулевые векторы $\boldsymbol{w} \in W$ (им всем отвечает собственное значение 0). Если оба подпространства U и W ненулевые, то спектр $\mathcal{A}$ равен $\{0, 1\}$. Если $U \neq \{\mathbf{0}\}$ и $W = \{\mathbf{0}\}$, то спектр равен $\{1\}$. Если $U = \{\mathbf{0}\}$ и $W \neq \{\mathbf{0}\}$, то спектр равен $\{0\}$. Если оба подпространства U и W нулевые, то спектр $\mathcal{A}$ пуст.

С этого момента мы будем предполагать, что все рассматриваемые операторы действуют в конечномерных пространствах, если только явно не оговорено противное.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в конечномерном пространстве V. Ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in V$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, которому отвечает собственное значение λ, тогда и только тогда, когда координаты $x_1, \ldots, x_n$ этого вектора в любом базисе пространства V удовлетворяют условию

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad (A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(здесь A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в том же базисе, а E — единичная матрица). Другими словами, $(x_1, \ldots, x_n)$ — решение однородной системы уравнений с матрицей $A - \lambda E$. Эта система имеет ненулевое решение $\iff \det(A - \lambda E) = 0$. Приходим к следующему выводу:

Предложение

Пусть $\boldsymbol{E}$ — произвольный базис конечномерного пространства V, и $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейный оператор с матрицей A в этом базисе. Число λ является собственным значением, отвечающим некоторому собственному вектору оператора $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$.

Определение

Пусть A — произвольная квадратная матрица. Многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом матрицы A, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ — характеристическим уравнением матрицы A.

Предложение

Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Доказательство. Если $A = C^{-1}BC$, то

$$\det(A - \lambda E) = \det(C^{-1}BC - \lambda E) = \det(C^{-1}BC - \lambda C^{-1}EC) = \\ = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det C = \det(A - \lambda E).$$

$\square$

Определение

Пусть V — конечномерное векторное пространство, в котором задан некоторый базис, и $\mathcal{A}\colon V \to V$ — любой линейный оператор. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в данном базисе. Многочлен

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом оператора $\mathcal{A}$, а уравнение $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ — характеристическим уравнением оператора $\mathcal{A}$.

Из независимости характеристического многочлена от базиса вытекает такое утверждение:

Следствие

Коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами линейного оператора.

Упражнение

Покажите, что коэффициент характеристического многочлена матрицы A (оператора с матрицей A) при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$.

Из инвариантности коэффициентов характеристического многочлена вытекает, что

- след матрицы является матричным инвариантом;
- след матрицы линейного оператора (в любом базисе) является инвариантом оператора.

След матрицы оператора (в любом базисе) называется следом линейного оператора.

Замечание

Спектр оператора совпадает с множеством корней его характеристического многочлена.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ есть оператор в конечномерном пространстве V, U инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство и $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$. Тогда характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ делит характерестический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$.

Доказательство. Предположим, что $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис пространства V, в котором первые k векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ образуют базис подпространства U, так что $V = U \oplus \langle\{\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}\rangle$. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Для каждого $i \leqslant k$ имеем $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{ki}\boldsymbol{e}_k$ (так как $\mathcal{A}U \subset U$), причём числа $a_{1i}, \ldots, a_{ki}$ образуют i-й столбец матрицы B ограничения $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ подпространства U.

Вывод: Матрица A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{E}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица ограничения $\mathcal{B}$, а C — некоторая матрица.

Так как
$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E)\det(C - \lambda E) = \chi_B(\lambda)\chi_C(\lambda) = \chi_{\mathcal{B}}(\lambda)\chi_C(\lambda)$,
то $\chi_{\mathcal{B}}(\lambda)$ делит $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$. $\square$

Собственные подпространства

Определение

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V над полем K и любого $\lambda \in K$ подпространство
$$V_\lambda = \{\mathbf{x} \in V : \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} \subset V$$
называется собственным подпространством оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ. Оно состоит из нулевого вектора и всех собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению λ.

Лемма

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V над полем K и любого $\lambda \in K$ операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ имеют одни и те же инвариантные подпространства.

Доказательство. Если U — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$ и $\boldsymbol{x} \in U$, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\boldsymbol{x} = \mathcal{A}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} \in U + U = U$. Отсюда следует, что U инвариантно для $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$. То, что всякое подпространство, инвариантное для $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, инвариантно и для $\mathcal{A}$, проверяется аналогично. □

Предложение

Пусть V — векторное пространство над полем K, $\mathcal{A}$ — линейный оператор и λ — собственное значение $\mathcal{A}$. Тогда собственное подпространство V_λ является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. Ясно, что $V_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Осталось применить лемму. □

Теорема

Собственные векторы любого линейного оператора, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ — собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$, отвечающие разным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и пусть дана их линейная комбинация $\mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{u}_n$, равная нулевому вектору $\mathbf{0}$. Нам надо доказать, что $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$.

Применим индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение верно. Пусть $n > 1$ и для меньших n всё доказано. Имеем

$$\mathcal{A}(\mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{u}_n) = \mu_1 \mathcal{A} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_n \mathcal{A} \boldsymbol{u}_n = \mu_1 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_n \lambda_n \boldsymbol{u}_n = \mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Вычитая данную линейную комбинацию, умноженную на λ_n, получаем

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_n)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\boldsymbol{u}_{n-1} + \mu_n(\lambda_n - \lambda_n)\boldsymbol{u}_n =$$
$$= \mu_1(\lambda_1 - \lambda_n)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\boldsymbol{u}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

Эта сумма — линейная комбинация собственных векторов с разными собственными значениями с числом слагаемых $< n$. Поскольку $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ для $i < n$, из индуктивного предположения следует, что $\mu_i = 0$ для $i \leqslant n - 1$. Из того, что данная линейная комбинация равна нулевому вектору, получаем $\mu_n = 0$. $\square$

Следствие

Сумма собственных подпространств любого линейного оператора является прямой суммой.

Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Диагонализируемые операторы.

Пусть λ собственное значение оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном пространстве V.

Тогда λ корень характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$. Кратность корня l в $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ называется алгебраической кратностью собственного значения λ.

Размерность $\dim V_\lambda$ собственного подпространства V_λ называется геометрической кратностью собственного значения λ.

Предложение

Геометрическая кратность собственного значения оператора не превосходит алгебраической кратности.

Доказательство. Собственное подпространство V_λ инвариантно, поэтому $\chi_{\mathcal{B}}(t)$ делит $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, где $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_{V_\lambda}$. Так как $\mathcal{B} = \lambda\mathcal{E}$, то $\chi_{\mathcal{B}}(t) = (\lambda - t)^k$, где $k = \dim V_\lambda$ — геометрическая кратность λ. Следовательно, $(\lambda - t)^k$ делит $\chi_{\mathcal{A}}(t)$. $\square$

Говорят, что оператор в конечномерном векторном пространстве диагонализируем, если в некотором базисе его матрица диагональна.

Предложение (о операторе с диагональной матрицей)

Пусть матрица $A = (a_{ij})$ *оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *диагональна,* $\operatorname{Sp}\mathcal{A} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $N_j = \{i : a_{ii} = \lambda_j\}$ *и* $k_j = |N_j|$ *для* $j = 1, \dots, m$. *Тогда*

(1) *базис* $\boldsymbol{E}$ *состоит из собственных векторов оператора* $\mathcal{A}$;

(2) $\bigcup_{j=1}^{m} N_j = \{1, \dots, n\}$;

(3) $V_{\lambda_j} = \langle\{\boldsymbol{e}_i : i \in N_j\}\rangle$ *для* $j = 1, \dots, m$;

(4) V *является прямой суммой собственных подпространств;*

(5)
$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda_j - t)^{k_j}$$

(6) *для* $j = 1, \dots, m$, *геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения* λ_j *совпадают.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Так как $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i = a_{ii}\boldsymbol{e}_i$, то $\boldsymbol{e}_i$ собственный вектор с собственным значение a_{ii}. Тогда $a_{ii} = \lambda_j$ для некоторого j и $i \in N_j$. Мы доказали (1) и (2).

(3) Ясно, $\langle\{\boldsymbol{e}_i : i \in N_j\}\rangle \subset V_{\lambda_j}$. Докажем обратное включение. Пусть $\boldsymbol{x} \in V_{\lambda_j}$ и $(x_1, \ldots, x_n)$ координаты $\boldsymbol{x}$. Так как $\lambda_j\boldsymbol{x} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$, то $\lambda_j x_i = a_{ii}x_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Если $x_i \neq 0$, то $\lambda_j = a_{ii}$ и, следовательно, $i \in N_j$. Отсюда вытекает, что $\boldsymbol{x} \in \langle\{\boldsymbol{e}_i : i \in N_j\}\rangle$.

(4) вытекает из (2) и (3).

Так как $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - t)$, то (5) вытекает из (2).

(6) Из (5) вытекает, что алгебраическая кратность λ_j равна k_j. Из (3) вытекает, что геометрическая кратность $\dim V_{\lambda_j}$ равна $|N_j| = k_j$. □

Теорема

Для оператора $\mathcal{A}$ в конечномерном пространстве V следующие условия эквивалентны:

(1) *$\mathcal{A}$ диагонализируем;*

(2) *в пространстве V имеется базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$;*

(3) *V является прямой суммой собственных подпространств;*

(4) *характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители и для каждого собственного значения геометрическая и алгебраическая кратность совпадают.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) вытекает из пункта (1) предложения о операторе с диагональной матрицей.

(2)$\Rightarrow$(1) Матрица оператора в базисе, состоящий из собственных векторов, диагональна.

(3)⇒(2) Пусть $\boldsymbol{E}$ есть объедение некоторых базисов собственных подпространств. Тогда $\boldsymbol{E}$ есть базис V и состоит из собственных векторов.

(1)⇒(3) вытекает из пункта (4) предложения о операторе с диагональной матрицей.

(1)⇒(4) вытекает из пунктов (5) и (6) предложения о операторе с диагональной матрицей.

(4)⇒(3) Пусть U есть сумма собственных подпространств. Ранее было доказано, что это сумма прямая. Осталось доказать, что $U = V$. Размерность $\dim U$ есть сумма геометрических кратностей собственных значений. Так как для каждого собственного значения геометрическая и алгебраическая кратность совпадают, то $\dim U$ равна сумме алгебраических кратностей собственных значений. Так как характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители и степень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ равна $\dim V$, то сумма алгебраических кратностей собственных значений равна $\dim V$. Следовательно, $\dim U = \dim V$. Отсюда вытекает $U = V$. □