Линейная алгебра и геометрия

Лекция 4. Аннулятор и нуль-пространство. Линейные отображения.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Аннулятор и нуль-пространство

Пусть $X \subset V$ и $Y \subset V^*$. Положим

$$\operatorname{Ann} X = X^\circ = \{\boldsymbol{f} \in V^* : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in X\}, \quad \text{— аннулятор множества } X$$

$$Y_\circ = \{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{f} \in Y\}, \quad \text{— нуль-пространство множества } Y.$$

Лемма (о двойственности аннулятора и нуль-пространства)

Пусть $U = V^*$ и $\delta : V \to U^* = V^{**}$ канонический изоморфизм. Тогда

$$\delta(Y_\circ) = Y^\circ, \ \delta(X)_\circ = X^\circ \ \text{и} \ (Y^\circ)_\circ = (Y_\circ)^\circ.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\delta(Y_\circ) &= \{\delta(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{f} \in Y\} = \{\delta_{\boldsymbol{v}} : \boldsymbol{v} \in V, \delta_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}) = 0 \ \forall \boldsymbol{f} \in Y\} \\
&= \{\boldsymbol{g} \in U^* : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}) = 0 \ \forall \boldsymbol{f} \in Y\} = Y^\circ. \\
\delta(X)_\circ &= \{\boldsymbol{f} \in V^* : \delta(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{f}) = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in X\} = \{\boldsymbol{f} \in V^* : \delta_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}) = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in X\} \\
&= \{\boldsymbol{f} \in V^* : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in X\} = X^\circ.
\end{aligned}$$

Положим $Z = Y_\circ$. Тогда $\delta(Z) = \delta(Y_\circ) = Y^\circ$ и $\delta(Z)_\circ = Z^\circ = (Y_\circ)^\circ$. Получаем

$$(Y^\circ)_\circ = \delta(Z)_\circ = (Y_\circ)^\circ.$$

$\square$

Если $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$, то $X^\circ \subset X'^\circ$ и $Y^\circ \subset Y'^\circ$.

Лемма (а)

(1) X° *линейное подпространство* V^* *и* $X^\circ = \langle X \rangle^\circ$.

(2) $Y_\circ$ *линейное подпространство* V *и* $Y_\circ = \langle Y \rangle_\circ$,

Доказательство. (1) Пусть $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l \in \langle X \rangle^\circ$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ и $\boldsymbol{f} = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \lambda_l \boldsymbol{f}_l$. Так как

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + \lambda_l \boldsymbol{f}_l(\boldsymbol{v}) = 0$$

для любого $\boldsymbol{v} \in X$, то $\boldsymbol{f} \in \langle X \rangle^\circ$. Следовательно, X° линейное подпространство V^*.

Докажем $X^\circ = \langle X \rangle^\circ$. Отметим, $X^\circ \supset \langle X \rangle^\circ$. Покажем, что $X^\circ \subset \langle X \rangle^\circ$. Пусть $\boldsymbol{f} \in X^\circ$. Для доказательства $\boldsymbol{f} \in \langle X \rangle^\circ$ надо проверить, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ для любого $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k \in \langle X \rangle$ (где $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in X$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$). Так как $\boldsymbol{x}_i \in X$ и $\boldsymbol{f} \in X^\circ$, то $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i) = 0$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k) = \lambda_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = 0.$$

(2) Из леммы о двойственности аннулятора и нуль-пространства вытекает $Y_\circ = \delta^{-1}(Y^\circ)$. Так как δ^{-1} является изоморфизмом, то (1) $\Rightarrow$ (2). □

Лемма (b)

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ *базис* V, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ *взаимный базис* V^* *и* $k \le n$. *Тогда* $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}^\circ = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle$ *и* $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle_\circ = \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k \rangle$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{f} = f_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + f_n \boldsymbol{\varepsilon}_n \in V^*$. Тогда $\boldsymbol{f} \in \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}^\circ \Leftrightarrow$

$$0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i) = (f_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + f_n \boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{e}_i) = f_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1(\boldsymbol{e}_i) + \dots + f_n \boldsymbol{\varepsilon}_n(\boldsymbol{e}_i) = f_i$$

для $i = 1, \dots, k \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \in \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle$.

Из леммы (a) вытекает $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle_\circ = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}_\circ$. Пусть $\boldsymbol{v} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n \boldsymbol{e}_n \in V$. Тогда $\boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}_\circ \Leftrightarrow$

$$0 = \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\varepsilon}_i(x_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n \boldsymbol{e}_n) = x_1 \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_1) + \dots + x_n \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_n) = x_i$$

для $i = k+1, \dots, n \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k \rangle$. □

Теорема

Пусть $X \subset V$ *и* $Y \subset V^*$. *Тогда*

(1) $(X^\circ)_\circ = \langle X \rangle$ *и* $\operatorname{rank} X + \dim X^\circ = \dim V$;

(2) $(Y_\circ)^\circ = \langle Y \rangle$ *и* $\operatorname{rank} Y + \dim Y_\circ = \dim V$.

Доказательство. Пусть $n = \dim V$.

(1) Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ максимальная линейно независимая система в X. Дополним $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ до базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ взаимный базис V^*. Так как $\langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k \rangle = \langle X \rangle$, то из леммы (a) вытекает, что $X^\circ = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}^\circ$. Из леммы (b) вытекает $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k\}^\circ = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle$ и $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle_\circ = \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k \rangle$. Следовательно, $(X^\circ)_\circ = \langle X \rangle$. Так как $\operatorname{rank} X = k$ и $\dim X^\circ = n - k$, то $\operatorname{rank} X + \dim X^\circ = n = \dim V$.

(2) Из леммы о двойственности аннулятора и нуль-пространства вытекает $(Y^\circ)_\circ = (Y_\circ)^\circ$. Из (1) вытекает $(Y^\circ)_\circ = \langle Y \rangle$ и $\operatorname{rank} Y + \dim Y^\circ = \dim U$. Следовательно, $(Y_\circ)^\circ = \langle Y \rangle$. Так как $Y^\circ = \delta(Y_\circ)$, то $\dim Y^\circ = \dim Y_\circ$. Учитывая $\dim U = \dim V$, получаем $\operatorname{rank} Y + \dim Y_\circ = \dim V$. $\square$

Функционалы и подпространства

Определение

Ядром линейного функционала $\boldsymbol{f}$ на произвольном векторном пространстве V над любым полем K называется множество

$$\operatorname{Ker}\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Замечания

1. Ядро произвольного линейного функционала на векторном пространстве является подпространством этого пространства.
2. Для произвольного множества $F \subset V^*$ $\quad F_\circ = \bigcap_{\boldsymbol{f} \in F} \operatorname{Ker}\boldsymbol{f}$.
3. Пусть V — векторное пространство с базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Если $\boldsymbol{f}$ — линейная функция на V с координатами $(f_1, \ldots, f_n)$ во взаимном базисе, то

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Ker}\boldsymbol{f} \iff \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \iff f_1 \cdot x_1 + \cdots + f_n \cdot x_n = 0.$$

Теорема

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K. Тогда множество $U \subset V$ является подпространством пространства $V \iff U$ есть пересечение ядер $\dim V - \operatorname{rank} U$ линейных функционалов.

Доказательство. Импликация $\Longleftarrow$ вытекает из того, что пересечение подпространств является подпространством. Докажем $\Longrightarrow$.

Возьмём любой базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ в U. Дополним его до базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в пространстве V. Пусть $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ — взаимный базис в V^*. Вектор $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \in V$ принадлежит $U \iff x_{k+1} = \cdots = x_n = 0 \iff$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{k+2}(\boldsymbol{x}) = \cdots = \boldsymbol{\varepsilon}_n(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

$\square$

Линейные отображения и линейные операторы

Линейные отображения

Пусть V и W — векторные пространства над полем K.

Определение

Отображение $f\colon V \to W$ называется *линейным*, если f сохраняет операции сложения и умножения на число:

1. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;
2. $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ для всех $\lambda \in K$ и $\mathbf{x} \in V$.

Простейшие свойства линейных отображений

- $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$;
- $f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Упражнение

Докажите эти свойства.

Примеры

- Линейные функции являются линейными отображениями из векторного пространства V над полем K в поле K, рассматриваемое как векторное пространство над самим собой.
- Поворот обычной плоскости.
- Если $V = U \oplus W$, то проектирование на подпространство U параллельно W можно рассматривать как отображение $V \to V$ и как отображение $V \to U$. В обоих случаях это линейное отображение.
- Дифференцирование — линейное отображение пространства (непрерывно) дифференцируемых функций на заданном промежутке числовой прямой в пространство всех (непрерывных) функций на этом промежутке.

Замечание

Пусть V и U — любые векторные пространства над одним и тем же полем K. На множестве $\mathscr{L}(V, U)$ линейных отображений $V \to U$ определены поточечные операции сложения и умножения на число: $(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$, $\lambda f(\boldsymbol{x}) = f(\lambda \boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \in V$, $\lambda \in K$. Относительно этих операций $\mathscr{L}(V, U)$ является векторным пространством.

Матрица линейного отображения

Всякое линейное отображение $f\colon V \to U$ однозначно определяется образами базисных векторов пространства V. В самом деле, если $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_\alpha : \alpha \in A\}$ (A — любое индексное множество) — базис пространства V, то для любого целого $n \leqslant |A|$, любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ и любого вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_{\alpha_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_{\alpha_n} \in V$ имеем

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_{\alpha_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_{\alpha_n}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_{\alpha_1}) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_{\alpha_n}).$$

Образами базисных векторов $\boldsymbol{e}_\alpha$ могут быть любые векторы $\boldsymbol{u}_\alpha \in U$, $\alpha \in A$. Действительно, для любых $\boldsymbol{u}_\alpha \in U$, $\alpha \in A$, отображение, определённое правилом

$$f(x_1\boldsymbol{e}_{\alpha_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_{\alpha_n}) = x_1\boldsymbol{u}_{\alpha_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_{\alpha_n}$$

для каждого $x_1\boldsymbol{e}_{\alpha_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_{\alpha_n} \in V$, линейно, и $f(\boldsymbol{e}_\alpha) = \boldsymbol{u}_\alpha$.

То же рассуждение в конечномерном случае выглядит так:
Если $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис пространства V, то для любого вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \in V$ имеем

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n).$$

Образами базисных векторов могут быть любые векторы $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in U$: для поизвольных $\boldsymbol{u}_i \in U$ отображение, определённое правилом

$$f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$$

для каждого $x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \in V$, линейно, и $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{u}_i$.

Пусть V и U конечномерны, $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис V и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ — базис U. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ образ $f(\boldsymbol{e}_j)$ вектора $\boldsymbol{e}_j$ принадлежит пространству U, а значит, его можно разложить по базису $\boldsymbol{B}$ этого пространства:

$$f(\boldsymbol{e}_j) = a_{1j}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{b}_m.$$

Матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрицей линейного отображения f относительно базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$. Столбцы матрицы линейного отображения — это столбцы координат векторов $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ в базисе $\boldsymbol{B}$.

Упражнения

Пусть V и U — конечномерные векторные пространства размерностей n и m соответственно. Зафиксируем в каждом из них произвольный базис.

1. Заметьте, что любая матрица размера $m \times n$ является матрицей некоторого линейного отображения $V \to U$ относительно зафиксированных базисов.
2. Покажите, что отображение, которое каждому линейному отображению $V \to U$ ставит в соответствие его матрицу относительно зафиксированных базисов, является изоморфизмом между векторными пространствами всех линейных отображений $V \to U$ и всех матриц размера $m \times n$.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ из пространства V разложим его образ $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ по базису $\boldsymbol{B}$ пространства U:

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{b}_m.$$

С другой стороны, имеем

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\Big(\sum_{i=n}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i\Big) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=n}^{m} a_{ij}x_j\Big)\boldsymbol{b}_i.$$

Единственность разложения вектора по базису $\Longrightarrow$ $y_i = \sum\limits_{j=n}^{m} a_{ij}x_j$ для каждого $i = 1, \ldots, m$. В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Когда базисы в пространствах V и U фиксированы и векторы отождествляются со столбцами их координат в этих базисах, пишут просто

$$\boldsymbol{y} = \boxed{f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}}.$$

Пример

Пусть $V = U \oplus W$, $\dim V = 7$, $\dim U = 4$. Возьмём базис $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ в U и дополним его до базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_7\}$ в V. Для проектирования $\pi \colon V \to U$ имеем $\pi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ для $i \leqslant 4$ и $\pi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}$ для $i = 5, 6, 7$. Значит, матрица π относительно базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ такова:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть V и U — конечномерные векторные пространства с базисами $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$, и пусть $f\colon V \to U$ — линейное отображение с матрицей A относительно базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$. Предположим, что $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n\} \subset V$ и $\boldsymbol{B}' = \{\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m\} \subset U$ — другие базисы и A' — матрица f относительно базисов $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + \dots + x'_n\boldsymbol{e}'_n \in V$ и его образа $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + y_m\boldsymbol{b}_m = y'_1\boldsymbol{b}'_1 + \dots + y'_m\boldsymbol{b}'_m$ имеем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Если T — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$ и S — матрица перехода от $\boldsymbol{B}$ к $\boldsymbol{B}'$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$S\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = AT\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = S^{-1}AT\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \implies A'\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = S^{-1}AT\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя вместо $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, видим, что $\boxed{A' = S^{-1}AT}$.

В курсе алгебры была доказана лемма:

Лемма

При умножении матрицы на невырожденную матрицу её ранг не изменяется.

Из неё и формулы преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса немедленно следует

Теорема

Ранг матрицы линейного отображения конечномерных векторных пространств не зависит от выбора базисов в этих пространствах.

Ядро и образ линейного отображения

Определение

Ядром линейного отображения $f : V \to U$ векторных пространств называется множество
$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \in V : f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_U\}.$$

Образом линейного отображения $f : V \to U$ векторных пространств называется множество
$$\operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{y} \in U : \exists \boldsymbol{x} \in V, \text{ для которого } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\} = \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in V\}.$$

Предложение

Ядро $\operatorname{Ker} f$ *любого линейного отображения* $f : V \to U$ *является подпространством пространства* V, *а образ* $\operatorname{Im} f$ *— подпространством пространства* U.

Доказательство. 1. $\operatorname{Ker} f \neq \varnothing$, так как $\mathbf{0}_V \in \operatorname{Ker} f$. Если $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ и λ — число, то $f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_U + \mathbf{0}_U = \mathbf{0}_U$ и $f(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u}) = \lambda\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_U$, т.е. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ и $\lambda\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f$.
2. $\operatorname{Im} f \neq \varnothing$, так как $\mathbf{0}_U = f(\mathbf{0}_V) \in \operatorname{Im} f$. Если $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ (т.е. $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{u}')$ и $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{v}')$ для некоторых $\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}' \in V$) и λ — число, то $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}')$ и $f(\lambda\boldsymbol{u}) = f(\lambda\boldsymbol{u}')$, откуда $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ и $\lambda\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f$. $\square$

Упражнения

1. Опишите всевозможные ядра и образы линейных отображений из векторного пространства V над полем K в поле K, рассматриваемое как векторное пространство над самим собой.
2. Найдите ядро и образ поворота обычной плоскости.
3. Пусть $V = U \oplus W$. Найдите ядро и образ проектирования на подпространство U параллельно W, рассматриваемое а) как отображение $V \to V$ и б) как отображение $V \to U$.
4. Найдите ядро и образ линейного отображения дифференцирования пространства непрерывно дифференцируемых функций на заданном промежутке числовой прямой в пространство всех непрерывных функций на этом промежутке.

Предложение

Линейное отображение $f\colon V \to U$ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. $\Longrightarrow$: $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$ и f инъективно $\Longrightarrow$ $f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}_U$ для $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_V$.
$\Longleftarrow$: Пусть $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$. Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ имеем $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, поэтому если $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$, то $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_U$, а значит, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} f$, так что если $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$, то $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}_V$, откуда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. □

Предложение

Если $f\colon V \to U$ — линейное отображение, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ и векторы $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ линейно независимы (в пространстве U), то и векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ линейно независимы (в пространстве V).

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_V$. Тогда $f(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n) = \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \lambda_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$. Поскольку векторы $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ линейно независимы, имеем $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Лемма

Если V *— конечномерное векторное пространство над полем* K *с базисом* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, U *— векторное пространство над* K *и* $f : V \to U$ *— линейное отображение, то*

$$\operatorname{Im} f = \langle f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) \rangle.$$

Доказательство. Для любых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ имеем

$$\lambda_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\boldsymbol{e}_n) = f(\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n).$$

□

Лемма

Пусть V *и* U *— конечномерные векторные пространства с базисами* $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *и* $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$, *и пусть* $f : V \to U$ *— линейное отображение с матрицей* A *относительно базисов* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{B}$. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A.$$

Доказательство. Достаточно вспомнить, что столбцы матрицы A — это координаты векторов $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ в базисе $\boldsymbol{B}$, и применить предыдущую лемму.

□

Теорема

Для любого линейного отображения $f\colon V \to U$ *конечномерного векторного пространства* V
$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}.$$

Доказательство. Выберем базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ в $\operatorname{Ker} f$ и дополним его до базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ во всём пространстве V. Имеем $f(\boldsymbol{e}_1) = \cdots = f(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{0}_U$. По лемме
$$\operatorname{Im} f = \langle\{f(\boldsymbol{e}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\}\rangle.$$
Надо доказать, что векторы $f(\boldsymbol{e}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ линейно независимы.

Пусть $\lambda_{k+1} f(\boldsymbol{e}_{k+1}) + \cdots + \lambda_n f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{0}_U$. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{x} = \lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$. Имеем $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_U$, т.е. $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}\rangle$. Значит, для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ имеем $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k = \lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$, и из линейной независимости базисных векторов $\boldsymbol{e}_i$ вытекает, что $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Следствие

Линейное отображение $f\colon V \to U$ *сюръективно тогда и только тогда, когда* $\dim U = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$.