Линейная алгебра и геометрия

Лекция 3. Прямая сумма нескольких подпространств. Сопряженное пространство.

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Прямая сумма нескольких подпространств

Пусть V — любое векторное пространство над полем K, а $V_1, \ldots, V_n$ — подпространства векторного пространства V.

Определение

Сумма $V_1 + \cdots + V_n$ подпространств $V_1, \ldots, V_n$ векторного пространства V — это множество

$$V_1 + \cdots + V_n = \{\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n : \boldsymbol{v}_1 \in V_1, \ldots, \boldsymbol{v}_1 \in V_1\}.$$

Сложение векторов ассоциативно $\Longrightarrow$ сложение подпространств ассоциативно.

Упражнения

1. Докажите, что $V_1 + \cdots + V_n$ — наименьшее подпространство пространства V, содержащее $V_1 \cup \cdots \cup V_n$.
2. Докажите, что если поле K содержит $\geqslant n$ элементов, $V_1, \ldots, V_n$ — подпространства векторного пространства V над полем K и $V_1 \cup \cdots \cup V_n = V_1 + \cdots + V_n$, то для некоторого $i \leqslant n$ имеем $V_i = V$.

Определение

Сумма $V_1 + \dots + V_n$ подпространств $V_1, \dots, V_n$ называется прямой суммой и обозначается $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, если каждый вектор $\boldsymbol{v} \in V_1 + \dots + V_n$ единственным образом представляется в виде $\boldsymbol{v}_1 + \dots + \boldsymbol{v}_n$, где $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ для $i = 1, \dots, n$. При этом $\boldsymbol{v}_i$ называется проекцией вектора $\boldsymbol{v}$ на подпространство V_i.

Теорема (о прямой сумме)

Для конечномерных подпространств $V_1, \dots, V_n$ следующие условия равносильны:

(1) *сумма $V_1 + \dots + V_n$ прямая;*

(2) *если векторы $\boldsymbol{v}_i$, $i \leqslant n$, удовлетворяют условиям $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ для $i \leqslant n$ и $\boldsymbol{v}_1 + \dots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{v}_1 = \dots = \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$;*

(3) *объединение любых базисов подпространств V_i, $i \leqslant n$, является базисом подпространства $V_1 + \dots + V_n$;*

(4) $\dim V_1 + \dots + V_n = \dim V_1 + \dots + \dim V_n$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{E}_i = \{\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ik_i}\}$ базис V_i для $i = 1, \ldots, n$ и $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{E}_n$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Так как $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}$ и $\mathbf{0} \in V_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то $\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_n$ для $\boldsymbol{x} \in V_1 + \cdots + V_n$ и $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i \in V_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то

$$(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u}_1) + \cdots + (\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}$ для $i = 1, \ldots, n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Система векторов $\boldsymbol{E}$ полна в $V_1 + \cdots + V_n$. Покажем что $\boldsymbol{E}$ линейно независима. Пусть

$$\lambda_{11}\boldsymbol{e}_{11} + \cdots + \lambda_{1k_1}\boldsymbol{e}_{1k_1} + \cdots + \lambda_{n1}\boldsymbol{e}_{n1} + \cdots + \lambda_{nk_n}\boldsymbol{e}_{nk_n} = \mathbf{0} \qquad (\star)$$

нулевая линейная комбинация векторов из $\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ik_i} \in \boldsymbol{E}_i$. Положим $\boldsymbol{v}_i = \lambda_{i1}\boldsymbol{e}_{i1} + \cdots + \lambda_{ik_i}\boldsymbol{e}_{ik_i}$. Тогда $\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ и каждое $\boldsymbol{v}_i \in V_i$. Из (2) вытекает $\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$. Так как вектора $\boldsymbol{e}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ik_i}$ линейно независимы, то все λ_{ij} равны 0. Следовательно, линейная комбинация $(\star)$ тривиальна.

$(3) \Rightarrow (2)$ Пусть $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ для $i \leqslant n$ и $\boldsymbol{v}_1 + \dots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$. Разложим каждое $\boldsymbol{v}_i$ по базису $\boldsymbol{E}_i$:

$$\boldsymbol{v}_i = \lambda_{i1}\boldsymbol{e}_{i1} + \dots + \lambda_{ik_i}\boldsymbol{e}_{ik_i}.$$

Тогда

$$\lambda_{11}\boldsymbol{e}_{11} + \dots + \lambda_{1k_1}\boldsymbol{e}_{1k_1} + \dots + \lambda_{n1}\boldsymbol{e}_{n1} + \dots + \lambda_{nk_n}\boldsymbol{e}_{nk_n} = \mathbf{0}.$$

Так как $\boldsymbol{E}$ базис, то все λ_{ij} равны 0. Следовательно все $\boldsymbol{v}_i$ равны $\mathbf{0}$.

$(3) \Rightarrow (4)$

$$\dim V_1 + \dots + V_n = |\boldsymbol{E}| = k_1 + \dots + k_n = |\boldsymbol{E}_1| + \dots + |\boldsymbol{E}_n| = \dim V_1 + \dots + \dim V_n.$$

$(4) \Rightarrow (3)$ Система векторов $\boldsymbol{E}$ полна в $V_1 + \dots + V_n$ и $|\boldsymbol{E}| \leq \dim V_1 + \dots + V_n \leq \operatorname{rank} \boldsymbol{E}$. Следовательно, $\boldsymbol{E}$ линейно независима. $\square$

Упражнение

Выяснить, какие импликации в теореме о прямой сумме выполняются и для бесконечномерных подпространств.

Говорят, что неодноточечные подпространства $V_1, \ldots, V_n$ линейно независимы, если любая система векторов $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, где $\boldsymbol{v}_i \in V_i \setminus \{\mathbf{0}\}$ для $i \leqslant n$, линейно независима.

Упражнение

1. Докажите, что для неодноточечных подпространства $V_1, \ldots, V_n$ следующие условия равносильны:
   - сумма $V_1 + \cdots + V_n$ прямая;
   - подпространства $V_1, \ldots, V_n$ линейно независимы;
   - $V_i \cap (V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{\mathbf{0}\}$ для всех $i < n$.
2. Подумайте, как распространить утверждения пункта 1 и теоремы о прямой сумме на случай бесконечного (не обязательно счётного) числа слагаемых.

Примеры

- Если $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис векторного пространства V, то
$$V = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \boldsymbol{e}_n \rangle.$$
- Пусть π_1 и π_2 — непараллельные плоскости в обычном пространстве. Тогда пространство является суммой двух подпространств — векторов, параллельных π_1, и векторов, параллельных π_2. Это не прямая сумма.
- Пусть π — плоскость в обычном пространстве и l — не параллельная ей прямая. Тогда пространство является суммой двух подпространств — векторов, параллельных π, и векторов, параллельных l. Это прямая сумма.
- Любая квадратная вещественная матрица A порядка n является суммой симметрической и кососимметрической матриц: $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$. Поэтому пространство $M_n(\mathbb{R})$ всех квадратных вещественных матриц порядка n является (прямой) суммой подпространства всех симметрических матриц и подпространства всех кососимметрических матриц.
- Пространство всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является прямой суммой подпространства всех чётных функций и подпространства всех нечётных функций.

Сопряжённое пространство

Линейные функции

Определение

Линейная функция (или линейный функционал, или линейная форма) на векторном пространстве V над полем K — это любое отображение $\boldsymbol{f}: V \to K$ со свойствами

1. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,
2. $\boldsymbol{f}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ для любых $\lambda \in K$, $\boldsymbol{x} \in V$.

Примеры

- На обычном пространстве: $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ для фиксированного вектора $\boldsymbol{a}$.
- На арифметическом пространстве K^n: $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ для $i \leqslant n$.
- На пространстве функций $K \to K$: $f \mapsto f(a)$ для фиксированного $a \in K$.
- На пространстве непрерывных вещественных функций: $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$.
- На пространстве дифференцируемых функций: $f \mapsto f'(a)$ для $a \in K$.
- На пространстве матриц: $A \mapsto \operatorname{tr} A$. Функция $A \mapsto \det A$ не линейна.

Множество всех линейных функций на векторном пространстве V над полем K образует векторное пространство над K относительно операций поточечного сложения функций и умножения функции на число:

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\quad (\lambda\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\lambda\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\quad \text{для } \boldsymbol{x}\in V,\ \lambda\in K.$$

Определение

Пространство всех линейных функций (функционалов, форм) на V называется сопряжённым пространством по отношению к V и обозначается V^*.

Пусть V — n-мерное пространство с базисом $\mathscr{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$. Значение линейной функции $\boldsymbol{f}\in V^*$ на векторе $\boldsymbol{x}\in V$ может быть выражено через координаты $(x_1,\ldots,x_n)$ этого вектора:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)=x_1\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+x_n\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)=f_1\cdot x_1+\cdots+f_n\cdot x_n,$$

где $f_i=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)$ для $i\leqslant n$. Числа $f_1,\ldots,f_n$ не зависят от вектора $\boldsymbol{x}$, они определяются только функцией $\boldsymbol{f}$ и базисом $\boldsymbol{E}$. Эти числа называются коэффициентами функции $\boldsymbol{f}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Всякая линейная функция $\boldsymbol{f} : V \to K$ однозначно определяется своими значениями на базисных векторах — коэффициентами $f_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f_n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)$. Коэффициентами могут быть любые числа.

Если $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in V^*$ и $\lambda \in K$, то

$$(f + g)_i = f_i + g_i \quad \text{и} \quad (\lambda f)_i = \lambda \cdot f_i \qquad \text{для } i \leqslant n.$$

Значит, отображение $\boldsymbol{f} \mapsto (f_1, \ldots, f_n)$ — изоморфизм между V^* и арифметическим пространством K^n.

Теорема

Любое конечномерное векторное пространство V изоморфно своему сопряжённому пространству V^*.

Упражнение

Покажите, что если векторное пространство V бесконечномерно, то пространства V и V^* не изоморфны.

Взаимный базис

Пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис векторного пространства V. Определим систему функционалов $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ в V^*, полагая

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \colon V \to K, \ \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \mapsto x_i,$$

функционал $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ вычисляет i-ю координату вектора $\boldsymbol{x}$. Этот функционал определяется тем, что

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \qquad \text{для } i, j \leqslant n$$

(δ_{ij} — *символ Кронекера*). Заметим, что строка коэффициентов функционала $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ — это i-я строка единичной матрицы. Значит, функционалы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы. Поскольку пространство V^* n-мерно, эти функционалы составляют в нём базис.

Определение

Базис $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ пространства V^*, определённый формулой $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, называется взаимным (а также двойственным или сопряжённым) базису $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ пространства V.

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}}$$

Для любого $\boldsymbol{x} \in V$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и всякого $i \leqslant n$ имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_i(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_n) = x_i,$$

и для любого функционала $\boldsymbol{f} \in V^*$ с координатами $(f_1, \ldots, f_n)$ в базисе $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ и всякого $i \leqslant n$ имеем

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i) = f_1\boldsymbol{\varepsilon}_1(\boldsymbol{e}_i) + \cdots + f_n\boldsymbol{\varepsilon}_n(\boldsymbol{e}_i) = f_i\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_i) = f_i.$$

Таким образом,

$$\boxed{x_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{x})} \qquad \text{и} \qquad \boxed{f_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)}.$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n) = x_1 \cdot f_1 + \cdots + x_n \cdot f_n.$$

Итак,

$$\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = f_1 \cdot x_1 + \cdots + f_n \cdot x_n} = (f_1, \ldots, f_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Преобразование координат в сопряжённом пространстве

Пусть даны два базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n\}$ векторного пространства V, и пусть $T = (t_{ij})$ — матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$. Рассмотрим базисы $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}' = \{\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n\}$ пространства V^*, сопряжённые к $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$, и матрицу перехода от $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ к $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$. Обозначим эту матрицу $S = (s_{ij})$.

Для $k, l \leqslant n$ имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_k = s_{1k}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + s_{nk}\boldsymbol{\varepsilon}_n \quad \text{и} \quad \boldsymbol{e}'_k = t_{1k}\boldsymbol{e}_1 + \dots + t_{nk}\boldsymbol{e}_n.$$

Из равенств $\boldsymbol{\varepsilon}'_k(\boldsymbol{e}'_l) = \delta_{kl}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ вытекает, что

$$\delta_{kl} = \boldsymbol{\varepsilon}'_k(\boldsymbol{e}'_l) = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}\boldsymbol{\varepsilon}_i\Bigl(\sum_{j=1}^{n} t_{jl}\boldsymbol{e}_j\Bigr) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ik}t_{jl}\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}t_{il}.$$

Следовательно, $S^{\mathsf{T}}T = E$ и

$$\boxed{S = (T^{-1})^{\mathsf{T}}}.$$

Доказательство с помощью матриц

Так как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)\begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix},$$

то

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ E \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ T^\top S \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in K^n$. Следовательно, $E = T^\top S$ и

$$\boxed{S = (T^{-1})^\top}.$$

Естественный изоморфизм между V и V^{**}

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Тогда между V и $V^{**} = (V^*)^*$ имеется *естественный* изоморфизм, который не зависит от выбора базиса или каких-либо других объектов.

Для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ определим функцию $\delta_{\boldsymbol{x}} : V^* \to K$ правилом

$$\delta_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{для } \boldsymbol{x} \in V.$$

Она линейна, т.е. $\delta_{\boldsymbol{x}} \in V^{**}$.

Функцию $\delta_{\boldsymbol{x}}$ называют функцией вычисления.

Теорема

Для всякого конечномерного векторного пространства V отображение

$$\delta\colon V \to V^{**}, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \delta_{\boldsymbol{v}},$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Проверим, что отображение δ линейно. Для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ и $\boldsymbol{f} \in V^*$ имеем

$$\delta_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \delta_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}) + \delta_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}) = (\delta_{\boldsymbol{x}} + \delta_{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{f}),$$

т.е. $\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}) + \delta(\boldsymbol{y})$. Аналогично доказывается, что $\delta(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\delta(\boldsymbol{x})$.

Проверим, что δ биективно. Возьмём любой базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в V и взаимный базис $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ в V^*.
Для $i, j \leqslant n$ имеем $\delta_{\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = \boldsymbol{\varepsilon}_j(\boldsymbol{e}_i) = \delta_{ij}$. Значит, $\{\delta_{\boldsymbol{e}_1}, \ldots, \delta_{\boldsymbol{e}_n}\}$ — базис пространства V^{**}, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$. Отображение δ переводит вектор $\boldsymbol{x} \in V$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в вектор $\delta(\boldsymbol{x}) \in V^{**}$ с теми же координатами в базисе $\{\delta_{\boldsymbol{e}_1}, \ldots, \delta_{\boldsymbol{e}_n}\}$:

$$\delta(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\delta(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n\delta(\boldsymbol{e}_n) = x_1\delta_{\boldsymbol{e}_1} + \cdots + x_n\delta_{\boldsymbol{e}_n}.$$

Значит, δ — биекция. □

Соответствие $\boldsymbol{x} \mapsto \delta_{\boldsymbol{x}}$ позволяет отождествлять пространства V и V^{**}, причём для этого отождествления не требуется фиксировать базис или что бы то ни было ещё. Так что каждый вектор $\boldsymbol{x} \in V$ можно рассматривать как линейную функцию от функционалов из V^*, определённую правилом $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Векторы и функционалы ведут себя по отношению друг к другу совершенно одинаково. Вместо $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ часто пишут $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x})$.

Упражнение

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Зафиксируем вектор $\boldsymbol{x}_0 \in V$. Сопоставив каждому функционалу $\boldsymbol{f} \in V^*$ число $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}_0)$, мы получим линейную функцию $\eta_{\boldsymbol{x}_0} \colon V^* \to K \quad (\eta_{\boldsymbol{x}_0} \in V^{**} = V)$. Аналогично, зафиксировав функционал $\boldsymbol{f}_0 \in V^*$ и сопоставив каждому вектору $\boldsymbol{x} \in V$ число $(\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{x})$, мы получим линейную функцию $\theta_{\boldsymbol{f}_0} \colon V \to K \quad (\theta_{\boldsymbol{f}_0} \in V^*)$.

Покажите, что отображения

$$\mathrm{H} \colon V \to V \quad \text{и} \quad \Theta \colon V^* \to V^*,$$

определённые правилами $\mathrm{H}(\boldsymbol{x}) = \delta^{-1}(\eta_{\boldsymbol{x}})$ и $\Theta(\boldsymbol{f}) = \theta_{\boldsymbol{f}}$ (здесь δ — естественный изоморфизм $V \to V^{**}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \delta_{\boldsymbol{x}}$), являются изоморфизмами.